M. POTÁPOV
V. ALEXÁNDROV, P. PASICHENKO

# ÁLGEBRA

*y análisis de funciones elementales*

Algebra y análisis de funciones lineales

М. ПОТАПОВ,
В. АЛЕКСАНДРОВ,
П. ПАСИЧЕНКО

# АЛГЕБРА
## И АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»

M. POTÁPOV
V. ALEXÁNDROV, P. PASICHENKO

# ÁLGEBRA

*y análisis de funciones elementales*

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por el ingeniero
K. P. Medkov

Impreso en la URSS

На испанском языке

# ÍNDICE

CAPÍTULO

# I

# NÚMEROS REALES

## § 1. Números naturales

**Serie de números naturales.** El concepto de números naturales surgió debido a la necesidad de contar. Los números naturales pueden compararse entre sí y en este caso está claro cuál de los dos números es mayor. Todos los números naturales dispuestos en el orden de crecimiento forman una serie de números naturales: el primer número es el uno; el segundo, el dos; el tercero, el tres, etc. A todo número natural le corresponde su lugar en dicha serie. En lo sucesivo la serie de números naturales se designará con la letra $N$.

Para señalar que el número $m$ *es mayor* que $n$ se utiliza la notación $m > n$. Para designar que el número $m$ *es menor* que el número $n$, se usa la notación $m < n$. Dichas notaciones se llaman *desigualdades* de los números naturales. Para mostrar que el número $m$ y el $n$ representan *un mismo número* se emplea la notación $m = n$, llamada *igualdad* de los números naturales.

La adición de los números naturales se puede definir con ayuda de la serie de números naturales de la manera siguiente.

*Adicionar* dos números naturales $m$ y $n$ significa hallar en la serie de números naturales un número $p$ ($p > m$) dispuesto en el $n$-ésimo lugar a partir del número $m$, empezando la cuenta con el número $m + 1$. El número mencionado $p$ se denomina *suma* de los números $m$ y $n$; se denota con $m + n$, mientras que los números $m$ y $n$ se llaman *sumandos*. Por ejemplo, $m + 3$ es un número que ocupa, tras el número $m$, el tercer lugar. Para sumar varios números naturales, es necesario adicionar al principio los dos primeros, luego añadir a la suma obtenida el siguiente número natural, etc.

*Multiplicar* un número natural $m$ por otro número natural $n$ significa encontrar un número natural $q$ igual: a) a $n$, si $m = 1$; b) a la suma de $m$ números, cada uno de los cuales es $n$, siempre que $m > 1$. El número citado $q$ se denomina *producto* de los números $m$ y $n$; se denota con $mn$, y los números $m$ y $n$ se llaman *factores*. Por ejemplo, multiplicar el número natural 2 por el número $n$ significa hallar un número natural $q$ igual a la suma de dos números, cada uno

de los cuales es el número $n$. Este número se designa $2n$, es decir, $q = 2n$. Para multiplicar varios números naturales, se debe multiplicar al principio los dos primeros números, luego multiplicar el número natural obtenido por el siguiente número natural, etc.

Demos a conocer las *leyes* principales de adición y multiplicación de los números naturales:

a) $m + n = n + m$ (conmutatividad de la adición);

b) $(l + m) + n = l + (m + n)$ (asociatividad de la adición);

c) $mn = nm$ (conmutatividad de la multiplicación);

d) $(lm)\, n = l\, (mn)$ (asociatividad de la multiplicación);

e) $(l + m)\, n = ln + mn$ (distributividad de la adición respecto a la multiplicación).

Si el número $m$ figura en calidad de factor $k$ veces ($k$ es un número natural superior a la unidad), entonces el producto

$$\underbrace{mm \ldots m}_{k \text{ veces}}$$

se denomina *k-ésima potencia del número m* y se designa $m^k$, es decir, por definición,

$$m^k = \underbrace{mm \ldots m}_{k \text{ veces}}.$$

Además, de acuerdo con la definición,

$$m^1 = m.$$

Son válidas las siguientes propiedades de las potencias:

a) $m^k m^n = m^{k+n}$;

b) $(m^k)^n = m^{kn}$;

c) $m^k l^k = (ml)^k$.

Dichas propiedades se demuestran con ayuda de las leyes principales de adición y multiplicación de los números naturales.

Definamos ahora las operaciones inversas a la adición y multiplicación de los números naturales, a saber, las operaciones de sustracción y división para los números naturales.

*Sustraer* de un número natural $n$ otro número natural $m$ significa encontrar un número natural $p$ tal, que sea justo

$$m + p = n. \tag{1}$$

No siempre existe tal número natural $p$ que se cumpla la igualdad (1) para cualesquiera números naturales $n$ y $m$. Si $n > m$, tal número existe y es único. Este se denomina *diferencia* o *resto* entre los números $n$ y $m$, y se designa $n - m$; el número $n$ se llama *minuendo*, y $m$, *sustraendo*.

*Dividir* un número natural $n$ por otro número natural $m$ significa hallar un número natural $q$ tal que se verifique la igualdad

$$mq = n. \tag{2}$$

No siempre existe tal número natural $q$ que se verifique la igualdad (2) para cualesquiera números naturales $n$ y $m$. Si dicho número existe, entonces $m$ y $q$ se denominan *divisores* del número $n$ y se designan

$$q = n : m; \quad m = n : q.$$

Apoyándose en las leyes principales de adición y multiplicación de los números naturales y en las definiciones de las operaciones de sustracción y división, se pueden demostrar las siguientes afirmaciones o, dicho de otro modo, los teoremas.

**Teorema 1.** *Si el número m es un divisor de los números $n_1$ y $n_2$, entonces m será el divisor de la suma $n_1 + n_2$.*

**Demostración.** Por cuanto $m$ es el divisor del número $n_1$, entonces $n_1 = mq_1$. Por analogía, $n_2 = mq_2$. Aplicando la ley de distributividad de la adición respecto a la multiplicación de los números naturales, tenemos que $n_1 + n_2 = mq_1 + mq_2 = m(q_1 + q_2)$. Por consiguiente, el número $n_1 + n_2$ se divide por el número $m$.

**Teorema 2.** *Si m es un divisor de los números $n_1$ y $n_2$, siendo $n_1 > n_2$, entonces el número m será el divisor de la diferencia $n_1 - n_2$.*

La validez de esta afirmación se demuestra de manera análoga.

Indiquemos, además, algunas otras propiedades evidentes de las igualdades de números naturales:

a) si $m = n$, entonces $m + k = n + k$ para cualquier número natural $k$;

b) si $m = n$, entonces $m - l = n - l$ para cualquier número natural $l$ tal, que sea $m > l$;

c) si $m = n$, entonces $mp = np$ para cualquier número natural $p$;

d) si $m = n$, entonces $m : q = n : q$ para cualquier número natural $q$ que es el divisor del número $m$.

**Serie ampliada de números naturales.** Veamos un número nuevo, a saber, el número cero. Para designarlo se emplea el símbolo 0. El *cero* no es un número natural y se considera un número precedente a todos los números naturales. La serie de números naturales junto con el número cero lleva el nombre de *serie natural ampliada*. La serie natural ampliada se designará con la letra $Z_0$.

En la serie ampliada de números naturales se pueden definir las operaciones de adición y multiplicación; con este objeto es suficiente añadir a las definiciones de la adición y multiplicación de los números naturales las definiciones correspondientes de la adición y multiplicación, en las cuales interviene el número cero:

a) $0 + n = n + 0 = n$;

b) $0 + 0 = 0$;

c) $0 \cdot n = n \cdot 0 = 0$;

d) $0 \cdot 0 = 0$.

Por definición, la potencia nula de todo número natural $m$ es la unidad, es decir, $m^0 = 1$.

La división por cero y la elevación del cero a potencia nula son operaciones prohibidas.

Para poder operar con los números que forman parte de una serie

natural ampliada es necesario saber escribirlos. La escritura de un mismo número natural depende del sistema de numeración.

Todo sistema de numeración se basa en el siguiente principio: cierta cantidad de unidades constituye una nueva unidad del orden superior siguiente. Dicho número recibe el nombre de *base del sistema de numeración*. Si por base del sistema se toma el número dos, el sistema de numeración se denomina *binario*; si como base se ha elegido el número doce, el sistema de numeración será *de base* 12, etc.

En adelante se tratará sólo el sistema *decimal* de numeración. En este sistema se introducen diez signos llamados cifras; para designar los primeros nueve números naturales se introducen los signos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y para el número cero, el signo 0. En este sistema de numeración el número diez se denota por el símbolo 10, y cada número natural $p$ se representa en la forma

$$p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0, \tag{3}$$

donde $n$ es un número perteneciente a la serie natural ampliada; $a_n$ es uno de los números 1, 2, 3, . . ., 9; cualquiera de los signos $a_0$, $a_1$, $a_2$, . . ., $a_{n-1}$ representa uno de los números 0, 1, 2, 3, . . ., 9. Notemos que si el número $n$ es mayor que el número nueve, entonces él mismo debe ser escrito en la forma (3).

Para escribir el número $p$ se emplea corrientemente otra forma de notación que se basa en el principio del *valor de posición de las cifras*. La esencia de dicho principio consiste en que cada cifra recibe, además de su valor en función de su escritura, el así llamado valor de posición. Por ejemplo, la cifra 5 puede tener los siguientes valores: cinco unidades, si en la representación del número $p$ ocupa el primer lugar a la derecha; cinco decenas, si en la representación para el número $p$ ocupa el segundo lugar a la derecha, etc. En este principio se basa precisamente la escritura habitual de los números naturales. La escritura 2705 significa que el número consta de dos miles, siete centenas, cero decenas y cinco unidades, es decir,

$$2705 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5.$$

Si tomamos el número $p$ representado en la forma (3), su escritura basada en el principio de posición será:

$$p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$$

(la raya por encima se traza para distinguir este número del producto $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$). En adelante se emplearán dos formas de escritura del número natural $p$:

a) $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$,

b) $p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$,

es decir, se hará uso de la igualdad

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0. \tag{4}$$

**Criterios de divisibilidad.** Ya se ha indicado más arriba que no siempre un número natural se divide por otro. Por esta razón representa interés destacar los casos en que la división resulta posible. Los así llamados criterios de divisibilidad ayudan a distinguir los casos aducidos. He aquí algunos de ellos. Observemos previamente que de lo expuesto anteriormente se deduce:

a) que el cero se divide por cualquier número natural.

b) que todo número natural se divide por la unidad.

**Teorema 3.** *Para que un número natural* $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ *se divida por dos, es necesario y suficiente que la última cifra* $a_0$ *del número citado se divida entre 2.*

**Demostración.** Demostremos que si el número $a_0$ se divide por 2, entonces el número $p$ también se divide por 2. Escribamos el número $p$ en la forma

$$p = \alpha + \beta, \tag{5}$$

donde

$$\alpha = (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1) \cdot 10,$$
$$\beta = a_0.$$

Cualquier sumando en el segundo miembro de la igualdad (5) se divide entre 2, por consiguiente, toda la suma se divide por 2, es decir, $p$ se divide por 2.

Demostremos la afirmación inversa. Si el número $p$ se divide por 2, entonces el número $a_0$ también se divide por 2.

De la igualdad (5) se desprende, conforme a la propiedad b) de las igualdades, que

$$a_0 = p - (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1) \cdot 10.$$

Cada término de la diferencia en el segundo miembro de la igualdad se divide por 2, por consiguiente, toda la diferencia se divide por 2, es decir, el número $a_0$ se divide por 2. El teorema queda demostrado.

Los números naturales que se dividen por dos y el número cero llevan el nombre de *números pares*. Todos los demás números naturales son *impares*. El teorema 3 puede enunciarse de otra manera así: para que un número natural $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ sea par, es necesario y suficiente que la última cifra $a_0$ de este número sea un número par.

Analicemos los rasgos característicos de la demostración del teorema 3. En el propio teorema fueron enunciadas y, a continuación, demostradas dos afirmaciones: a) de la divisibilidad del número $a_0$ por 2 proviene la divisibilidad por 2 del número $p$ (*la condición suficiente* de divisibilidad del número $p$ por 2); b) de la divisibilidad del número $p$ por 2 se deduce la divisibilidad por 2 del número $a_0$ (*la condición necesaria* de divisibilidad del número $p$ por 2). Si designamos con la letra $A$ la propiedad de divisibilidad del número $a_0$ por 2, y con la letra $B$, la misma propiedad del número $p$, entonces la primera afirmación puede enunciarse brevemente así: de $A$ se deduce $B$ ($A \Rightarrow B$), y la segunda afirmación enseña que de $B$ se deduce

$A$ ($A \Leftarrow B$). Con ayuda de los símbolos introducidos el teorema puede ser escrito así: $A \Leftrightarrow B$.

La notación $A \Leftrightarrow B$ quiere decir también que la propiedad $A$, (más sencilla y fácilmente verificable) es la condición necesaria y suficiente para que se cumpla la propiedad más compleja $B$.

Como la propiedad $A$ es la condición suficiente para que se cumpla la propiedad $B$ ($A \Rightarrow B$), en la práctica, habiéndose convencido de que la última cifra es par, se puede estar seguro de que todo el número también se divide por 2. Como la propiedad $A$ es la condición necesaria para la propiedad $B$ ($A \Leftarrow B$), entonces, al establecer que el número $a_0$ no se divide por 2, podemos afirmar que el número $p$ tampoco se divide por 2, es decir, el teorema 3 puede ser formulado así: si la última cifra del número $p$ se divide por 2, entonces el número $p$ se divide entre 2; si no se divide por 2, el número $p$ tampoco se divide por 2.

Observemos que si cierta propiedad $C$ es la condición suficiente para la propiedad $D$, esto no significa ni mucho menos que no hay números que posean la propiedad $D$, pero no posean la propiedad $C$. Por ejemplo, la condición suficiente de divisibilidad del número $p$ por 4 es la condición $a_1 = a_0 = 0$. La validez de la última afirmación se deduce de la representación del número $p$ en la forma

$$p = (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot 10 + a_2) \cdot 10^2$$

y, además, de la divisibilidad del número 100 por 4. Al mismo tiempo, por ejemplo, el número 252 se divide por 4, aunque sus dos últimas cifras no son ceros.

Si queda demostrado que cierta propiedad $E$ es la condición necesaria para que se cumpla la propiedad $D$, esto no significa aún que no hay números que posean la propiedad $E$ sin poseer la propiedad $D$. Por ejemplo, la condición necesaria de divisibilidad del número $p$ por 4 es la paridad del número $p$. La validez de la última afirmación es evidente, puesto que si el número $p$ se divide por 4, con mayor razón se divide por 2. Al mismo tiempo, por ejemplo, el número 1222 no se divide por 4, aunque es par.

Si, en cambio, queda demostrado que la propiedad $S$ es la condición necesaria y suficiente para que se cumpla la propiedad $Q$ y si la propiedad $S$ se comprueba con facilidad para cualquier número $p$, entonces, al hallar todos los números que poseen la propiedad $S$, se puede decir que están determinados todos los números que poseen la propiedad *más compleja* $Q$.

En lo sucesivo, para abreviar, los símbolos $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ se utilizarán con frecuencia en el siguiente sentido: la notación $M \Rightarrow L$ significará que de la afirmación $M$ que se encuentra a la izquierda del símbolo $\Rightarrow$ se desprende la afirmación $L$ que se encuentra a la derecha. La notación $Q \Leftarrow S$ significará que de la afirmación $S$ que está a la derecha del símbolo $\Leftarrow$ sigue la afirmación $Q$ que está a la izquierda. La notación $E \Leftrightarrow F$ significará que las afirmaciones que se encuentran a la izquierda y a la derecha del símbolo $\Leftrightarrow$ son equivalentes,

es decir, de la afirmación $F$ que está a la derecha del símbolo $\Leftrightarrow$, se deduce la afirmación $E$ que está a la izquierda y de la afirmación $E$ que está a la izquierda del símbolo $\Leftrightarrow$ se deduce la afirmación $F$ que se dispone a la derecha.

Enunciemos y demostremos, además, los criterios de divisibilidad de los números naturales por 4 y por 9.

**Teorema 4.** *Para que un número natural* $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ *se divida por* 4, *es necesario y suficiente que el número* $\overline{a_1 a_0}$ *se divida por* 4.

**Demostración. Suficiencia.** Supongamos que el número $\overline{a_1 a_0}$ se divide por 4. Escribamos el número $p$ en la forma

$$p = \varphi + \psi, \qquad (6)$$

donde

$$\varphi = (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots + a_3 \cdot 10 + a_2) \cdot 10^2,$$

$$\psi = \overline{a_1 a_0}.$$

Cada sumando en el segundo miembro de la igualdad (6) se divide por 4, por consiguiente, toda la suma se divide por 4, es decir, el número $p$ se divide por 4.

**Necesidad.** Sea $p$ un número divisible por 4. De la igualdad (6) se desprende, conforme a la propiedad b) de las igualdades, que

$$\overline{a_1 a_0} = p - (a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \ldots - a_3 \cdot 10 + a_2) \cdot 10^2.$$

Cada término de la diferencia en el segundo miembro de la igualdad se divide por 4, por consiguiente, toda la diferencia se divide por 4, es decir, el número $\overline{a_1 a_0}$ se divide por 4. El teorema está demostrado.

Por ejemplo, el número 1232 se divide por 4, puesto que el número 32 es múltiplo de 4, mientras que el número 15126 no se divide por 4, puesto que el número 26 no es múltiplo de 4.

**Teorema 5.** *Para que un número natural* $p = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$ *se divida por* 9, *es necesario y suficiente que la suma de todas las cifras del número dado se divida por* 9.

**Demostración. Suficiencia.** Supongamos que la suma de las cifras del número dado se divide por 9. Escribamos el número $p$ en la forma

$$p = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Es fácil ver que es válida la igualdad

$$10^k = \underbrace{\overline{99 \ldots 999}}_{k \text{ veces}} + 1.$$

Haciendo uso de esta igualdad, escribamos $p$ en la forma

$$p = \gamma + \lambda, \qquad (7)$$

donde

$$\gamma=(a_n\cdot\underbrace{99\ldots 9}_{n \text{ veces}}+a_{n-1}\cdot\underbrace{99\ldots 9}_{(n-1) \text{ veces}}+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9),$$

$$\lambda = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0.$$

Cada sumando en el segundo miembro de la igualdad (7) se divide por 9, por consiguiente, toda la suma también se divide por 9, es decir, el número 9 es divisor de $p$.

**Necesidad.** Supongamos que el número $p$ se divide por 9. De la igualdad (7) se deduce, conforme a la propiedad b) de las igualdades, que

$$(a_0+a_1+\ldots+a_n) =$$
$$=p-(a_n\cdot\underbrace{99\ldots 9}_{n \text{ veces}}+a_{n-1}\cdot\underbrace{99\ldots 9}_{(n-1) \text{ veces}}+\ldots+a_2\cdot 99+a_1\cdot 9).$$

Cada término de la diferencia en el segundo miembro de la igualdad se divide por 9, por consiguiente, toda la diferencia se divide por 9, es decir, el número $(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$ se divide por 9. El teorema está demostrado.

Por ejemplo, el número 1215 se divide por 9, puesto que $1 + 2 + + 1 + 5 = 9$, mientras que el número 4232 no se divide por 9, dado que $4 + 2 + 3 + 2 = 11$, y no se divide por 9.

**Números primos y compuestos.** El conjunto de números naturales se compone de la unidad y de números primos y compuestos. Un número natural superior a la unidad se denomina *primo*, si es divisible solamente por sí mismo y por la unidad. Un número natural superior a la unidad se llama *compuesto*, si tiene por lo menos un divisor distinto de la unidad y de sí mismo.

Aprovechando esta definición, se puede mostrar que cualquier número compuesto tiene por lo menos un divisor, el cual es un número primo.

**Teorema 6.** *Existe una infinidad de números primos.*

**Demostración.** Supongamos que existe solamente un número finito de números primos $p_1, p_2, \ldots, p_n$. En este caso cualquier número natural superior a la unidad y que no coincide con ninguno de estos números será compuesto. El número $p = p_1\cdot p_2\cdot p_3 \ldots \ldots p_n + 1$ no coincide ni con cualquiera de los números $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, puesto que es mayor que cada uno de ellos. De acuerdo con nuestra suposición, además de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ no existen otros números primos. Por consiguiente, el número $p$ es compuesto y por esta razón es divisible al menos por uno de los números $p_1, p_2, \ldots \ldots, p_n$.

Por otro lado, el número $p$ no se divide por ninguno de los números $p_1, p_2, \ldots, p_n$, puesto que el producto $p_1\cdot p_2 \ldots\cdot p_n$ se divide por cada uno de estos números, mientras que el número 1 no se divide por ninguno de ellos.

Así pues, al suponer que existe sólo un número finito de números primos, llegamos a una contradicción. Por consiguiente, el conjunto de números primos es infinito.

El teorema 6 está demostrado por reducción al absurdo. Este método consiste en lo siguiente: se construye una negación de la afirmación enunciada en el teorema. Luego, a base de la negación construida, llegamos a una deducción que es o bien errónea o bien contradice la negación construida. De este modo, de las dos situaciones lógicamente posibles (o bien es cierta la afirmación dada o bien se confirma la negación de ésta) queda sólo una, a saber, es cierta la afirmación dada.

Todo número compuesto $p$ puede ser escrito en forma de un producto de números primos: así por ejemplo, $221 = 13 \cdot 17$. En este caso suele decirse que el número $p$ está descómpuesto en factores primos.

Cuando un número se descompone en factores primos, algunos de estos últimos pueden encontrarse en la descomposición varias veces. Tal factor primo se escribe, por costumbre, elevado a una potencia que muestra cuántas veces el interviene como factor, por ejemplo, $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

Cualquier número natural puede ser escrito en la forma

$$p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}, \tag{8}$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son diferentes divisores primos del número $p$, y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ señalan cuántas veces dichos divisores se repiten en la descomposición del número $p$. La descomposición (8) de un número natural $p$ en factores primos es única, es decir, no existen otros números primos que sean divisores del número $p$, y las potencias $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ no pueden sustituirse por otras potencias. Así pues, resulta válido el siguiente teorema que se acepta aquí sin demostración.

**Teorema 7** (teorema fundamental de la Aritmética). *Para todo número natural $p > 1$ existe la única descomposición de éste en factores primos.*

Si los números naturales $p_1$ y $p_2$ son divisibles por un mismo número natural $p$, este último se denomina *divisor común* de los números $p_1$ y $p_2$. El número natural máximo por el que se dividen $p_1$ y $p_2$ lleva el nombre de *máximo común divisor* de dichos números (MCD). Por ejemplo, el máximo común divisor de los números $p_1 = 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$ y $p_2 = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ es igual a $2 \cdot 3 = 6$.

Si el MCD de dos números es igual a la unidad, se llaman *recíprocamente primos*. Son recíprocamente primos, por ejemplo, los números $33 = 3 \cdot 11$ y $35 = 5 \cdot 7$.

**Teorema 8.** *Si los números naturales $p_1$ y $p_2$ son recíprocamente primos y el número natural $p$ es divisible tanto por $p_1$ como por $p_2$, entonces $p$ se divide por el producto $p_1p_2$.*

Omitiremos aquí la demostración de este teorema.

Observemos que si los números $p_1$ y $p_2$ no son recíprocamente primos, la afirmación del teorema no es siempre cierta. Por ejemplo, el número natural 180 se divide por 4 y por 6, no obstante, no es divisor de su producto 24.

Se llama *mínimo común múltiplo* (MCM) de dos números naturales $p_1$ y $p_2$ un número natural mínimo que es divisible por $p_1$ y por $p_2$. Por ejemplo, el MCM de los números 132 y 90 es el número $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \times \times 11 = 1980$.

**División entera (inexacta).** Si, como resultado de la división de un número natural $p$ por otro número natural $m$, se obtiene el número natural $q'$ tal que $p = mq$, se dice que $p$ se divide por $m$. Como se deduce de lo expuesto más arriba, el resultado de la división no siempre da tal número $q$. Sin embargo, es siempre realizable la división entera (inexacta).

*Dividir enteramente un número natural p por otro número natural m* significa encontrar tales dos números $q$ y $r$, pertenecientes a la serie natural ampliada, que se verifique la igualdad $p = mq + r$, con la particularidad de que $r$ satisfaga la condición $0 \leqslant r < m$. El número $q$ se denomina *cociente* y el número $r$, *resto* de la división. Si $r = 0$, se dice que el número natural $p$ se divide por el número natural $m$ exactamente.

**Teorema 9.** *Sean $p$ y $m$ dos números naturales cualesquiera. En este caso existe el único par de números $q$ y $r$, pertenecientes a la serie natural ampliada, que satisface las condiciones: $p = mq + r$, y $0 \leqslant \leqslant r < m$.*

**Demostración.** Si $p < m$, entonces el par de números $q = 0$, $r = p$ satisface las condiciones del teorema.

Si $p = m$, entonces el par de números $q = 1$, $r = 0$ satisface las condiciones del teorema.

Si $p > m$ y $p$ se divide por $m$, entonces existe un número natural $q_1$ tal que $p = mq_1$, en este caso el par de números $q = q_1$ y $r = 0$ satisface las condiciones del teorema.

Si $p > m$ y $p$ no es divisible por $m$, entonces el par de números $q_1 = 1$ y $r_1 = p - m$ satisfará las condiciones

$$p = m \cdot 1 + r_1, \quad r_1 > 0.$$

Por cuanto $p$ no se divide por $m$, entonces $r_1 \neq m$. Por lo tanto, bien $r_1 < m$, bien $r_1 > m$. Si $r_1 < m$, el par de números $q = 1$ y $r = r_1$ satisface las condiciones del teorema.

Si $r_1 > m$, el número $r_2 = r_1 - m$ es tal que $r_1 = m + r_2$ y $0 < r_2 < r_1$, razón por la cual resulta válida la igualdad

$$p = m \cdot 2 + r_2.$$

Por cuanto $p$ no se divide por $m$, entonces $r_2 \neq m$. Quiere decir, o bien $r_2 < m$, o bien $r_2 > m$. Si $r_2 < m$, el par de números $q = 2$ y $r = r_2$ satisface las condiciones del teorema.

Si, en cambio, $r_2 > m$, repetimos este procedimiento hasta que

resulte en algún $k$-ésimo paso que

$$p = mk + r_k, \quad 0 < r_k < m.$$

Esto precisamente significa que el par de números $q = k$ y $r = r_k$ satisface las condiciones del teorema. La existencia del $k$-ésimo paso mencionado se desprende del siguiente axioma para los números naturales: *para cualesquiera números naturales $p$ y $m$ tales que $p > m$, se encontrará un número natural $l$ tal, que $p < ml$.*

Así, pues, hemos demostrado la existencia de un par de números $q$ y $r$ que satisfacen las condiciones del teorema.

Ahora demostremos la unicidad de tal par de números. Supongamos que existen dos pares de números, $q$, $r$ y $q_0$, $r_0$, que satisfacen las condiciones del teorema, es decir, tales que

$$p = mq + r \quad \text{y} \quad 0 \leqslant r < m.$$

$$p = mq_0 + r_0 \quad \text{y} \quad 0 \leqslant r_0 < m.$$

Por consiguiente, $mq + r = mq_0 + r_0$.

Admitamos, para concretar, que $r_0 > r$, entonces $0 < r_0 - r < m$, y $q - q_0 > 0$, mientras que $m(q - q_0) = r_0 - r$. Entonces, en el segundo miembro de la última igualdad figura un número natural inferior a $m$, mientras que en el primer miembro, un número superior a $m$ o igual a éste y, por consiguiente, la igualdad $m(q - q_0) = r_0 - r$ no es cierta. Análogamente, analizando el caso en que $r_0 < r$, llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $r = r_0$. Entonces, de la igualdad $m(q - q_0) = r_0 - r = 0$ se desprende que $q = q_0$, es decir, el par de números $q$ y $r$, que satisface las condiciones del teorema, es único. El teorema queda demostrado.

He aquí un ejemplo de aplicación del teorema 9.

Demostremos que si $p$ es un número primo mayor que tres, uno de los números, sea $(p - 1)$ ó $(p + 1)$, se divide por tres. Efectivamente, el número $p$ no se divide por tres exactamente (sin resto), pues es primo y mayor que tres. Por consiguiente, el resto, al dividir por 3, puede ser 1 ó 2. Si el resto es igual a la unidad, es decir, si $p = 3q_1 + 1$, está claro que el número $p - 1$ se divide por 3. Si el resto es igual a dos, es decir, si $p = 3q_2 + 2$, está claro que el número $p + 1$ se divide por 3.

El teorema demostrado presta la posibilidad de hallar el máximo común divisor (MCD) de dos números. Tomemos dos números, $p$ y $m$, pertenecientes a una serie natural ampliada y supongamos, para concretar, que $p > m$. Si $m = 0$, entonces el MCD $(p; 0) = p$. Si $m \neq 0$, entonces $p = mq + r$, con la particularidad de que o bien $p$ se divide por $m$ exactamente (es decir, $r = 0$), o bien $p$ se divide por $m$ enteramente con resto $r$, donde $0 < r < m$. En el primer caso el MCD $(p; m) = m$, pero el MCD $(m; 0) = m$, es decir es válida la igualdad MCD $(p; m)$ = MCD $(m; r)$. Resulta que la igualdad análoga

$$\text{MCD}(p;\ m) = \text{MCD}(m;\ r) \tag{9}$$

tiene lugar también en el caso en que $0 < r < m$.

En efecto, sea $l$ el divisor común de los números $p$ y $m$, es decir, supongamos que $p = lk$ y $m = ln$, donde $k$, $l$ y $n$ son números naturales. Por cuanto $p = mq + r$ y $r > 0$, entonces $lk - lnq > 0$, es decir, $l(k - nq) > 0$. Pero, en este caso, $k - nq > 0$ y $r = ls$, donde $s = k - nq$ es un número natural, es decir, $l$ será divisor del número $r$.

Quiere decir, cualquier divisor común de los números $p$ y $m$ lo es también para los números $m$ y $r$. Razonando análogamente, obtendremos la afirmación inversa: cualquier divisor común de los números $m$ y $r$ lo es para los números $p$ y $m$. De aquí se deduce que coinciden también los máximos comunes divisores de los pares citados, es decir, que es válida la igualdad (9). Puesto que $m < p$ y $r < m$, el problema de hallar el MCD $(m; r)$ es más simple que el de hallar el MCD $(p; m)$.

Veamos el siguiente ejemplo. Hállese el MCD (1428; 420).

Como $1428 = 420 \cdot 3 + 168$, entonces MCD (1428; 420) = = MCD (420; 168).

Como $420 = 168 \cdot 2 + 84$, entonces MCD (420; 168) = = MCD (168; 84).

Como $168 = 84 \cdot 2$, entonces MCD (168; 84) = MCD (84; 0) = = 84, es decir, MCD (1428; 420) = 84.

De este modo, el método de determinación del MCD $(p; m)$ consiste en la aplicación de la igualdad (9).

Una vez determinado el MCD $(p; m)$, resulta posible hallar también el mínimo común múltiplo de estos números: MCM $(p; m)$. Con este fin se debe aprovechar el teorema 10, cuya demostración se omite en esta obra.

**Teorema 10.** MCD $(p; m) \cdot$ MCM $(p; m) = p \cdot m$.

Por ejemplo, determinemos el MCM (1428; 420). Del ejemplo anterior se deduce que el MCD (1428; 420) = 84. Por consiguiente,

$$\text{el MCM}\,(1428;\ 420) = \frac{1428 \cdot 420}{84} = 7140.$$

## § 2. Fracciones

Más arriba se ha señalado que la división no es siempre realizable dentro del conjunto de números naturales. Por ejemplo, en el conjunto de números naturales no se puede dividir 5 por 4. Para que la división sea siempre realizable, hay que considerar números nuevos, a saber, las partes de los números naturales o fracciones.

**Fracciones ordinarias.** Un número igual a la $k$-ésima parte del número uno ($k$ es un número natural mayor que la unidad) se designa $\frac{1}{k}$. Si la parte aducida se toma $m$ veces ($m$ es un número natural), entonces la designación del nuevo número obtenido será $\frac{m}{k}$. Un número que se determina según esta regla con ayuda de dos números

naturales $p$ y $q$ ($q > 1$) y que se anota en forma de $\frac{p}{q}$, se llama *fracción* o *cociente* de los números naturales $p$ y $q$, y en este caso $p$ se denomina *numerador* de esta fracción y el número $q$, *denominador*.

Todo número natural puede ser considerado como una *fracción cuyo denominador es la unidad*, es decir, cualquier número natural $n$ puede escribirse en forma de una fracción $\frac{n}{1}$. Por eso, en lo sucesivo se suprime la restricción $q > 1$, que se impone sobre el denominador de una fracción, y se dice que el cociente de dos números naturales cualesquiera $p$ y $q$ es una fracción $\frac{p}{q}$, y en este caso el conjunto de todas las fracciones contiene en sí el conjunto de todos los números naturales.

Dos fracciones $\frac{p}{q}$ y $\frac{m}{k}$ se consideran *iguales*, si el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda es igual al producto del numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera, es decir, $\frac{p}{q} = \frac{m}{k}$, si $pk = qm$.

Por analogía, $\frac{p}{q} > \frac{m}{k}$, si $pk > mq$; $\frac{p}{q} < \frac{m}{k}$, si $pk < mq$.

Se denomina *suma* de dos fracciones una fracción cuyo numerador es igual a la suma de los productos del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda y del numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera, mientras que el denominador es igual al producto de los denominadores de dichas fracciones, es decir,

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{k} = \frac{pk + qm}{qk}.$$

Se llama *producto* de dos fracciones una fracción cuyo numerador es igual al producto de los numeradores de estas fracciones y el denominador, al producto de los denominadores, es decir,

$$\frac{p}{q} \frac{m}{k} = \frac{pm}{qk}.$$

Son válidas las siguientes *leyes* de adición y multiplicación de las fracciones:

a) $\frac{p}{q} + \frac{m}{k} = \frac{m}{k} + \frac{p}{q}$ (conmutatividad de la adición);

b) $\left(\frac{p}{q} + \frac{m}{k}\right) + \frac{l}{n} = \frac{p}{q} + \left(\frac{m}{k} + \frac{l}{n}\right)$ (asociatividad de la adición);

c) $\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{k} = \frac{m}{k} \cdot \frac{p}{q}$ (conmutatividad de la multiplicación);

d) $\left(\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{k}\right) \cdot \frac{l}{n} = \frac{p}{q} \left(\frac{m}{k} \cdot \frac{l}{n}\right)$ (asociatividad de la multiplicación);

e) $\left(\frac{p}{q}+\frac{m}{k}\right)\cdot\frac{l}{n}=\frac{p}{q}\cdot\frac{l}{n}+\frac{m}{k}\cdot\frac{l}{n}$ (distributividad de la adición respecto a la multiplicación).

*Dividir* una fracción $\frac{p}{q}$ por otra fracción $\frac{m}{n}$ significa hallar tal fracción $\frac{l}{k}$ que se verifique

$$\frac{l}{k}\cdot\frac{m}{n}=\frac{p}{q}.$$

A diferencia de los números naturales, la división para las fracciones es siempre realizable. Aplicando la definición de igualdad de dos fracciones, es fácil mostrar que

$$\frac{l}{k}=\frac{pn}{qm}.$$

*Sustraer* de una fracción $\frac{p}{q}$ otra fracción $\frac{m}{n}$ significa hallar tal fracción $\frac{r}{s}$ que se cumpla la igualdad

$$\frac{m}{n}+\frac{r}{s}=\frac{p}{q}.$$

Al igual que en el caso de los números naturales, la sustracción de las fracciones no es siempre realizable. Si $\frac{p}{q}<\frac{m}{n}$, o bien $\frac{p}{q}=\frac{m}{n}$, no existe fracción que, siendo adicionada a la fracción $\frac{m}{n}$, de la fracción $\frac{p}{q}$. Si, en cambio, $\frac{p}{q}>\frac{m}{n}$, entonces la sustracción es realizable y se ve con facilidad que en este caso

$$\frac{r}{s}=\frac{pn-mq}{nq}.$$

De la definición de igualdad de dos fracciones se deduce la *propiedad fundamental de las fracciones: si el numerador y el denominador de una fracción dada se multiplican o se dividen por un mismo número natural k, se obtendrá una fracción igual a la dada:*

$$\frac{p}{q}=\frac{pk}{qk}.$$

La fracción $\frac{p}{q}$ se denomina *irreducible*, si los números $p$ y $q$ son recíprocamente primos.

**Teorema 1.** *Si $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible, la fracción $\frac{m}{n}$ será igual a ella cuando, y sólo cuando, $m=pk$ y $n=qk$, donde $k$ es un número natural.*

**Demostración. Suficiencia.** Sea $m = pk$ y $n = qk$. Entonces, las fracciones $\frac{p}{q}$ y $\frac{m}{n}$ son iguales en virtud de la propiedad fundamental de las fracciones.

**Necesidad.** Supongamos que $\frac{p}{q}=\frac{m}{n}$. De acuerdo con la definición de igualdad de fracciones, $pn = mq$. El primer miembro de esta igualdad se divide por el número $p$, y, por tanto, de acuerdo con el teorema fundamental de la Aritmética (véase el § 1, teorema 7), se divide por $p$ también el segundo miembro. Por cuanto los números $p$ y $q$ son recíprocamente primos y el producto $mq$ se divide por $p$, entonces $m$ también se divide por $p$ (es decir, existe un número natural $k$ tal, que $m = pk$). Al sustituir el valor de $m$ en la igualdad $pn = mq$, obtenemos: $np = pkq$, de donde $n = qk$. El teorema está demostrado.

**Fracciones decimales finitas.** Examinemos aquellas fracciones $\frac{p}{q}$, cuyo denominador $q = 10^k$, donde $k$ es un número natural. Para cada fracción de este tipo se ha adoptado una forma especial de anotación, a saber: se escribe el numerador de la fracción y, al contar, por el lado derecho, $k$ cifras, se separan éstas con una coma; si en el numerador hay menos cifras que $k$, por ejemplo, $n$ cifras ($n < k$), entonces se escribe el numerador y delante de la primera cifra de éste se ponen $k - n$ ceros, luego se pone la coma y delante de ésta se pone un cero más; en cambio, si en el numerador hay $k$ cifras, entonces se escribe el numerador, delante de la primera cifra de éste se marca una coma y se pone un cero delante de la coma.

Así, por ejemplo, las fracciones $\frac{3721}{100}$, $\frac{21}{10\,000}$, $\frac{131}{1000}$ pueden ser escritas así: 37,21; 0,0021; 0,131.

Una fracción escrita de esta forma se llama *fracción decimal finita.*

Quiere decir, las fracciones 37,21; 0,0021; 0,131 pueden servir de ejemplo de fracciones decimales finitas. En general, cada fracción decimal finita se designará, en adelante, del modo siguiente:

$$a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_k, \tag{1}$$

donde $k$ es un número natural, $a_0$ es un número perteneciente a la serie natural ampliada, cualquiera de $a_1, a_2, \ldots, a_k$, uno de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. La fracción decimal finita se denomina con frecuencia simplemente fracción decimal, omitiendo la palabra «finita».

Toda fracción decimal finita se transforma fácilmente en una ordinaria. Con este fin se debe escribir en el numerador un número entero que se obtiene, si se elimina la coma de la fracción decimal, y se escribe en el denominador el número 10 a una potencia que sea igual a la cantidad de cifras que se tienen en la fracción decimal tras la coma, después de lo cual la fracción puede ser simplificada por un factor común, si existe, por ejemplo, $0{,}34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$.

Escribir una fracción ordinaria en forma de fracción decimal finita significa hallar una fracción decimal finita que sea igual a la dada. Surge naturalmente la pregunta: ¿se puede escribir en forma

de fracción decimal finita cualquier fracción ordinaria? Resulta que este caso es mucho más complicado en comparación con la transformación de una fracción decimal finita en otra ordinaria.

**Teorema 2.** *Toda fracción $\frac{p}{q}$, en la que el número natural $q$ no tiene divisores primos distintos de 2 y 5, puede ser escrita en forma de una fracción decimal finita.*

**Demostración.** Sea dada la fracción $\frac{p}{q}$, donde $q = 2^m \cdot 5^n$. De acuerdo con la propiedad fundamental de una fracción, cualquier fracción ordinaria no cambia, si su numerador y denominador se multiplican por un mismo número. Multiplicando el numerador y el denominador de la fracción $\frac{p}{q}$ por $2^n 5^m$, obtendremos

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{2^m \cdot 5^n} = \frac{2^n \cdot 5^m \cdot p}{2^m \cdot 5^n \cdot 2^n \cdot 5^m} = \frac{2^n \cdot 5^m \cdot p}{2^{n+m} \cdot 5^{n+m}} = \frac{2^n \cdot 5^m \cdot p}{10^{n+m}}.$$

Ya que el producto $2^n \cdot 5^m p$ es un número natural, entonces, designándolo con $l$, escribamos la fracción en la forma $\frac{p}{q} = \frac{l}{10^{n+m}}$ de donde se ve que la fracción $\frac{p}{q}$ puede ser escrita como una fracción decima finita. El teorema queda demostrado.

**Teorema 3.** *Si la fracción irreducible dada $\frac{q}{p}$ puede ser escrita en forma de una fracción decimal finita, su denominador no contiene factores primos distintos de 2 y 5.*

**Demostración.** Si $q = 1$, el teorema es evidente. Examinemos el caso en que $q \neq 1$. La fracción $\frac{p}{q}$ está representada, por condición, en forma de una fracción decimal finita, por lo cual es válida la igualdad $\frac{p}{q} = \frac{l}{10^k}$, donde $l$ y $k$ son números naturales. Puesto que $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible, del teorema 1 se deduce que $l = pm$ y $10^k = qm$. El número $10^k$ contiene solamente los factores primos 2 y 5. Por consiguiente, el número $qm$ tampoco tiene otros factores primos, salvo 2 y 5, lo que se desprende de la unicidad de la descomposición de un número en factores primos. Por consiguiente, el número $q$ no contiene otros factores primos, a excepción de 2 y 5. El teorema queda demostrado.

**Teorema 4.** *Para que una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ pueda escribirse en forma de una fracción decimal finita, es necesario y suficiente que su denominador no contenga factores primos, a excepción de 2 y 5.*

La validez del teorema 4 se desprende de los teoremas 2 y 3.

Veamos ahora una fracción $\frac{p}{q}$ en la que $p$ y $q$ son números recíprocamente primos y $q$ contiene factores primos distintos de 2 y 5. Según se deduce del teorema 4, esta fracción no puede ser escrita en forma de una fracción decimal finita. No obstante, las fracciones

de este tipo pueden ser escritas con ayuda de las así llamadas fracciones decimales periódicas infinitas.

**Fracciones decimales periódicas infinitas.** Más arriba hemos atribuido el nombre de fracción decimal finita a una fracción escrita en la forma (1), donde a la coma le sigue un número finito de cifras. Será natural llamar *fracción decimal periódica infinita* aquella en la cual después de la coma viene una infinidad de cifras, con la particularidad de que una cifra o un conjunto ordenado de cifras se repiten a partir de cierto lugar tras la coma. Esto puede expresarse con mayor exactitud así: se denomina fracción decimal periódica infinita una fracción que puede ser escrita en la forma

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots, \qquad (2)$$

donde

1. $a_0$ es un número perteneciente a la serie natural ampliada;

2. en la anotación (2), para cualquier número natural $m$, en el $m$-ésimo lugar tras la coma figura uno de los números 0, 1, 2, . . ., 9, con la particularidad de que o bien $a_0$ es distinto de cero, o bien, si $a_0$ es igual a cero, existe al menos un número natural $q$ tal, que en el $q$-ésimo lugar tras la coma figure uno de los números 1, 2, . . ., 9;

3. existen tales números naturales $l$ y $p$ que para cualquier número natural $n \geqslant l$ es válida la igualdad $a_{n+p} = a_n$, y en este caso el conjunto ordenado de cifras $(a_la_{l+1} \ldots a_{l+p-1})$ se llama *período de la fracción decimal periódica infinita* (2).

Por regla general, al escribir una fracción decimal periódica infinita, los puntos suspensivos se ponen después del período que se repitió varias veces, es decir, cuando se hace claro cuál número es el período de esta fracción.

Por ejemplo, es obvio que la fracción

$$4{,}27131313 \ldots \qquad (3)$$

es una fracción decimal periódica infinita de período (13).

En lugar de escribir el período varias veces y poner luego puntos suspensivos, se ha aceptado escribir el período una sola vez encerrándolo entre paréntesis:

$$4{,}27131313 \ldots = 4{,}27\,(13).$$

$$0{,}454545 \ldots = 0{,}(45).$$

Es vigente el siguiente teorema cuya demostración aquí se omite.

**Teorema 5.** *Toda fracción* $\frac{p}{q}$, *donde p y q son recíprocamente primos y q contiene al menos un solo factor primo distinto de 2 y 5, puede ser escrita del modo único en forma de una fracción decimal periódica infinita.*

Reuniendo los teoremas 4 y 5, obtenemos que cualquier fracción ordinaria puede ser escrita en forma de fracción decimal finita o de fracción decimal periódica infinita. Expongamos sin demostración la regla que se usa para convertir una fracción decimal periódica

infinita en una fracción ordinaria (la regla se demostrará en el capítulo IX).

*Con el fin de convertir una fracción decimal periódica infinita en una fracción ordinaria, se debe sustraer del número que precede al segundo período otro número, que precede al primer período, y representar dicha diferencia como el numerador, poniendo en el denominador la cifra 9 tantas veces, cuantas cifras hay en el período, y escribir después de los nueves tantos ceros, cuantas cifras se encuentran entre la coma y el primer período.* Por ejemplo:

$$0{,}1172(0)=\frac{11\,720-1172}{90\,000}=\frac{10\,548}{90\,000}=\frac{1172\cdot 9}{9\cdot 10\,000}=\frac{293\cdot 4}{4\cdot 2500}=\frac{293}{2500};$$

$$0{,}(45)=\frac{45-0}{99}=\frac{5\cdot 9}{9\cdot 11}=\frac{5}{11};$$

$$4{,}27(13)=\frac{42\,713-427}{9900}=\frac{42\,286}{9900}=\frac{2\cdot 21\,143}{2\cdot 4950}=\frac{21\,143}{4950}$$

Haciendo uso de esta regla, podemos demostrar que cualquier fracción decimal finita se representa en forma de una fracción decimal periódica infinita y, además, por dos procedimientos.

Por ejemplo,

$$0{,}172=0{,}172(0)=\frac{1720-172}{9000}=\frac{1548}{9000}=\frac{172\cdot 9}{9\cdot 1000}=0{,}172;$$

$$0{,}172=0{,}171(9)=\frac{1719-171}{9000}=\frac{1548}{9000}=\frac{172\cdot 9}{9\cdot 1000}=0{,}172.$$

Para que no haya dos representaciones diferentes de una misma fracción decimal finita, se ha convenido en no tener en el período el número 9. Entonces, cada fracción decimal finita puede ser escrita de modo único en forma de una fracción decimal periódica infinita de período 0, y, viceversa, cada fracción de esta índole es una fracción decimal finita. Así pues, tiene lugar el

**Teorema 6.** *Cualquier fracción ordinaria* $\frac{p}{q}$ *puede ser representada de modo único en forma de una fracción decimal periódica infinita y, viceversa, toda fracción decimal periódica infinita puede ser representada de modo único en forma de una fracción ordinaria* $\frac{p}{q}$.

De este modo, se puede constatar que cualquier fracción decimal periódica infinita es otra forma de anotación de cierta fracción ordinaria bien determinada.

## § 3. Números enteros

Ya se ha señalado anteriormente que la sustracción no es siempre realizable dentro del conjunto de números naturales. Por ejemplo, en el conjunto de números naturales no se puede restar 5 del número 3. Por esta razón surge la necesidad de ampliar el conjunto de números naturales.

Introduzcamos en el análisis nuevos números, a saber, números naturales de signo menos, es decir, los números del tipo $(-m)$, donde $m$ es un número natural, y los llamaremos números enteros *negativos*. A veces se llama número entero negativo $(-m)$ el número *opuesto* del número natural $m$.

Diremos que dos números enteros negativos $(-m)$ y $(-n)$ son iguales, si son iguales los números $m$ y $n$. Examinemos ahora un conjunto de números, que incluye todos los números naturales, el cero y todos los números negativos. Convengamos en considerar que dos números de dicho conjunto son iguales, si ambos son números naturales iguales, si ambos son números enteros negativos iguales, o si cada uno de ellos es cero. Definamos ahora las operaciones de adición y multiplicación para los números de este conjunto. Si embos números que han de ser adicionados o multiplicados pertenecen a una serie natural ampliada, entonces, las operaciones de adición y multiplicación para dichos dos números se determinan igual que en el § 1. Si, en cambio, uno de los números o ambos números, que deben sumarse o multiplicarse, son enteros negativos, las operaciones de adición y multiplicación para estos dos números se realizan del modo siguiente:

a) $(-m) + (-n) = -(m + n)$;

b) $(-m) + 0 = 0 + (-m) = -m$;

c) $(-m) + n = \begin{cases} -(m - n), \text{ siempre que } m > n; \\ n - m, \text{ cuando } m < n; \\ 0, \text{ si } m = n; \end{cases}$

d) $(-m)\, n = m\, (-n) = -(mn)$;

e) $(-m)\, (-n) = mn$;

f) $(-m) \cdot 0 = 0 \cdot (-m) = 0$.

Un conjunto de números que incluye todos los números naturales, el cero y todos los números enteros negativos con las definiciones de igualdad y de operaciones de adición y multiplicación, que acabamos de introducir, se denomina *conjunto de números enteros* y se denota con la letra $Z$, mientras que los números mencionados llevan el nombre de *números enteros*. Los números naturales se denominan a veces números positivos enteros.

Las leyes principales de adición y multiplicación de los números enteros son análogas a aquellas que se usan para adicionar y multiplicar los números naturales y por esta razón no se aducen aquí.

Para las operaciones de adición y multiplicación de los números enteros se introducen operaciones inversas, las de sustracción y división (a excepción de la división por cero). La operación de sustracción es en este caso es siempre realizable, y la operación de división, no siempre. Sin embargo, al igual que para los números naturales, los números enteros siempre admiten la división entera (inexacta). Más abajo se estudia detalladamente sólo la división inexacta de un número entero por un número natural.

**División entera (inexacta).** *Dividir un número entero a por un número natural m con resto* significa hallar dos números enteros $q$ y $r$ tales, que sea válida la igualdad $a = mq + r$, con la particularidad de que $r$ satisface la condición $0 \leqslant r < m$.

Si $r = 0$, suele decirse que el número entero $a$ se divide exactamente por el número natural $m$.

**Teorema 1.** *Sea a un número entero cualquiera y sea m, cualquier número natural. Entonces, existe el único par de números enteros q y r que satisface las condiciones:* $a = mq + r$ *y* $0 \leqslant r < m$.
analizado en el § 1.

**Demostración.** El caso cuando $a$ es un número natural se ha analizado en el § 1.

Si $a = 0$, el par de números $q = 0$ y $r = 0$ satisface las condiciones del teorema.

Supongamos que $a = -n$ es un número entero negativo. Entonces $n$ es un número natural y, de acuerdo con lo demostrado, llegamos a la conclusión de que existe un par de números $q_1$ y $r_1$ tal que $n = mq_1 + r_1$ y $0 \leqslant r_1 < m$. Para el caso en que $r_1 = 0$, de la igualdad $n = mq_1 + r_1$ proviene otra igualdad $a = mq$, donde $q = (-q_1)$, es decir, el par de números $q = -q_1$ y $r = 0$ satisface las condiciones del teorema. Cuando $0 < r_1 < m$, de la igualdad $n = mq_1 + r_1$ se desprende otra igualdad $a = (-q_1 - 1)\, m + (m - r_1)$, y, entonces, el par de números $q = -q_1 - 1$ y $r = m - r_1$ satisface las condiciones del teorema.

Así pues, para cualquier número entero $a$ y para todo número natural $m$ existe un par de números enteros $q$ y $r$ tales que $a = mq + r$ y $0 \leqslant r < m$.

La unicidad del par de números enteros $q$ y $r$ se demuestra igual que en el teorema 9 del § 1. Lo mismo que en el § 1, un número entero divisible por 2 exactamente se llamará número **par**, y divisible por 2 con resto $r = 1$, número **impar**.

He aquí algunos **corolarios** del teorema 1.

a) *Todo número par a puede escribirse en la forma* $a = 2q$, *donde q es cierto número entero.*

b) *Todo número impar a puede escribirse en la forma* $a = 2q_1 + 1$, *donde* $q_1$ *es cierto número entero.*

c) *Cualquier número entero a que es divisible por tres exactamente puede escribirse en la forma* $a = 3q$, *donde q es un número entero.*

d) *Cualquier número entero a, que no se divide por tres exactamente, puede ser escrito en una de las siguientes formas:* $a = 3l + 1$, *o bien* $a = 3n + 2$, *donde l y n son ciertos números enteros.*

e) *Cualquier número entero a, que se divide exactamente por cierto número natural k, puede ser escrito en la forma* $a = kq$, *donde q es un número entero.*

f) *Cualquier número entero a, que no se divide exactamente por cierto número natural k, puede escribirse en la forma* $a = kq + r$, *donde r es uno de los números* $1, 2, \ldots, (k - 1)$, *y q, un número entero.*

En función de la divisibilidad de los números enteros por un

número natural dado $k$ el conjunto de números enteros puede ser partido en $k$ clases. Por ejemplo, si $k = 2$, el conjunto de todos los números enteros se parte en dos clases: números pares e impares.

El conjunto de todos los números enteros puede ser partido asimismo en tres clases:

a) números múltiplos del número tres, es decir, los del tipo $3q$, donde $q$ es un número entero cualquiera;

b) números que, siendo divididos por tres, tienen como resto la unidad, es decir, los números del tipo $3l + 1$, donde $l$ es un número entero cualquiera;

c) números que, siendo divididos por tres, tienen como resto un dos, es decir, los números del tipo $3n + 2$, donde $n$ es un número entero cualquiera.

Los ejemplos aducidos muestran cómo se parte el conjunto de números enteros en 4 clases, 5 clases, etc.

Expongamos algunos ejemplos que muestran cómo ayuda la partición de los números enteros en clases a resolver una serie de problemas.

1. Demuéstrese que para cualquier $b$ entero el número $b(2b + 1) \times (7b + 1)$ se divide por tres.

**Demostración.** Partiremos el conjunto de todos los números enteros en tres clases: a) $3q$; b) $3q + 1$; c) $3q + 2$, donde $q$ es un número entero cualquiera.

Sea $b$ un número cualquiera de la clase a). Entonces, $b(2b + 1) \times (7b + 1) = 3q(6q + 1)(21q + 1)$, de donde se ve que, para todo $q$ entero, este número es divisible por 3.

Sea $b$ un número cualquiera de la clase b). Entonces, $b(2b + 1) \times (7b + 1) = (3q + 1)\cdot 3\cdot(2q + 1)(21q + 8)$, de donde se ve que para todo $q$ entero este número se divide por 3.

Sea $b$ un número cualquiera de la clase c). Entonces, $b(2b + 1) \times (7b + 1) = (3q + 2)(6q + 5)\cdot 3\cdot(7q + 5)$, de donde se ve que para todo $b$ entero este número se divide por 3.

2. Demuéstrese que entre cualesquiera $k$ números enteros consecutivos hay un número que se divide por $k$ exactamente.

**Demostración.** Todos los números enteros pueden ser partidos en las siguientes $k$ clases:

$$\begin{array}{l} kq, \\ kq + 1, \\ kq + 2, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ kq + (k - 1), \end{array}$$

donde $q$ es un número entero cualquiera.

Sean dados $k$ números enteros consecutivos y supongamos que cierto número $b$ es el primero de ellos, es decir, $k$ números, $b$, $(b + 1)$, $(b + 2)$, . . ., $[b + (k - 1)]$; supongamos también que el número $b$

está contenido en la clase $kq + i$ para cierto $i$ $[i = 0, 1, 2, \ldots, (k-1)]$, es decir, sea $b = kq + i$, donde $q$ es un número entero. Por cuanto entre $k$ números consecutivos hay un número

$$[b + (k - i)] = [kq + i + (k - i)] = k(q + 1),$$

el cual se divide por $k$ exactamente, la afirmación 2 queda demostrada.

## § 4. Números racionales e irracionales

**Números racionales.** De acuerdo con lo observado anteriormente, en el conjunto de números naturales no son siempre realizables las operaciones de sustracción y división. En el § 2 el conjunto de números naturales ha sido ampliado hasta obtener un conjunto de fracciones ordinarias y en este último conjunto la operación de división ya es siempre realizable; no obstante la de sustracción se realiza no en todos los casos. Es por eso que surge la necesidad de introducir números nuevos.

Introduzcamos en el análisis números nuevos: *fracciones con signo menos*, es decir, números del tipo $\left(-\frac{m}{n}\right)$, donde $m$ y $n$ son números naturales. La fracción $\left(-\frac{m}{n}\right)$ se denomina a veces número *opuesto* de la fracción $\frac{m}{n}$.

Examinemos ahora un conjunto de números que incluye todas las fracciones, el número cero y todas las fracciones con signo menos. Podemos considerar que cada número de este conjunto es la razón entre un número entero y un número natural. Consideraremos por eso que el conjunto dado se compone de los números del tipo $\frac{p}{q}$, donde $q$ es un número natural y $p$, un número entero.

Convengamos en considerar que dos números de dicho conjunto $\frac{p}{q}$ y $\frac{m}{n}$ son iguales, si se cumple la igualdad $pn = qm$. Además, la adición y la multiplicación de los números de este conjunto se consideran realizables según las siguientes reglas:

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + qm}{qn} \quad \text{y} \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn}.$$

Un conjunto de números compuesto por todos los números del tipo $\frac{p}{q}$, donde $q$ es un número natural y $p$, un número entero, con las definiciones de igualdad y de operaciones de adición y multiplicación, que acabamos de introducir, recibe el nombre de *conjunto de números racionales* y se designa con la letra $Q$; los propios números se denominan *racionales.*

Si $p$ es un número natural, entonces $\frac{p}{q}$ se llama *número racional positivo* o *fracción positiva.*

Si, en cambio, $p$ es un número negativo, el número $\frac{p}{q}$ se denominará *número racional negativo* o *fracción negativa*. Está claro que el conjunto de números enteros es una parte del conjunto de números racionales.

Para las operaciones de adición y multiplicación de números racionales se introducen operaciones inversas, a saber, las de sustracción y división, y en este caso, ambas operaciones, a excepción de la división ilegítima por cero, son siempre realizables.

Las leyes principales de adición y multiplicación de números racionales son análogas a las leyes correspondientes de adición y multiplicación de números enteros y por esta razón no se dan aquí.

Si un número racional $r$ figura como factor $k$ veces ($k > 1$), entonces el producto $\underbrace{rr \ldots r}_{k \text{ veces}}$ se llama $k$-ésima potencia del número $r$ y se denota $r^k$. Además, por definición, $r^1 = r$.

Al igual que en el caso de números naturales, son válidas las siguientes propiedades de las potencias de los números racionales.

a) $r^m r^k = r^{m+k}$;

b) $r_1^m r_2^m = (r_1 r_2)^m$;

c) $(r^k)^m = r^{km}$;

d) $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k = \frac{r_1^k}{r_2^k}$, si $r_2 \neq 0$;

e) $\frac{r^k}{r^m} = r^{k-m}$, si $k > m$, $r \neq 0$.

Por definición, $r^0 = 1$ para cualquier número racional $r$, salvo el número cero.

En relación con el concepto de potencia de un número racional surge a menudo un problema en el que se pide hallar, para un número natural dado $k$ y para un número racional positivo dado $r_1$, otro número racional positivo $r_2$ tal, que tenga lugar $r_2^k = r_1$.

Este problema no siempre tiene solución.

**Teorema 1**. *No existe un número racional cuyo cuadrado sea igual a* 2.

**Demostración.** Supongamos que existe un número racional $\frac{p}{q}$ tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Sin restringir la generalidad de razonamientos consideraremos que $p$ y $q$ son recíprocamente primos (si el numerador y el denominador del número racional dado tienen factores comunes, entonces el número $\frac{p}{q}$ obtenido como resultado de la simplificación es igual al número dado). Haciendo uso de la propiedad d) de las potencias de los números racionales, escribamos nuestra suposición en la forma $\frac{p^2}{q^2} = \frac{2}{1}$.

De la definición de igualdad entre los números racionales se

deduce que $p^2 = 2q^2$. Por cuanto el segundo miembro de esta igualdad es divisible por 2, el primer miembro también debe dividirse por 2. Pero, el número $p^2$ se divide por 2 sólo cuando el número $p$ se divide por 2 (si $p$ no se divide por 2, entonces $p^2$ tampoco se divide por 2). Puesto que $p$ se divide por 2, existe, pues, un número entero $k$ tal, que $p = 2k$. Al sustituir este valor de $p$ en la igualdad $p^2 = 2q^2$, obtenemos $q^2 = 2k^2$. Por cuanto el segundo miembro de esta igualdad es divisible por 2, se dividirá por 2 también el primer miembro; quiere decir, el número $q$ se divide por 2, es decir, $q = 2m$.

Así pues, hemos llegado a que los números $p$ y $q$ poseen un factor común, que es el dos, mientras que, por hipótesis, los números $p$ y $q$ en la igualdad $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ son recíprocamente primos. Esta contradicción significa precisamente que la suposición admitida no es lícita y es cierta la afirmación del teorema.

De este modo, surge la necesidad de introducir números nuevos, distintos de los racionales, como, por ejemplo, un número cuyo cuadrado sea igual a 2.

**Números irracionales.** En el § 2 se han examinado fracciones decimales periódicas infinitas. Hagamos más amplia esta noción introduciendo en el análisis números nuevos que se llamarán fracciones decimales infinitas.

Llamemos *fracción decimal infinita* un número que puede ser escrito o bien en la forma

$$a_0,\ a_1 a_2 \ldots a_k \ldots, \tag{1}$$

o bien en la forma

$$-a_0,\ a_1 a_2 \ldots a_k \ldots, \tag{2}$$

donde $a_0$ es un número perteneciente a una serie natural ampliada; $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ son números del conjunto de números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Los puntos suspensivos significan que en el $m$-ésimo lugar tras la coma se dispone el número $a_m$, cualquiera que sea el número natural $m$.

Si entre los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k \ldots$ al menos uno de ellos es distinto de cero, entonces el número escrito en la forma (1) se denominará *fracción decimal infinita positiva*, y el número escrito en la forma (2), *fracción decimal infinita negativa*. Si entre los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ no hay números distintos de cero, entonces al número escrito en la forma (1) se considerará igual al número escrito en la forma (2) y se llamará fracción decimal periódica infinita nula, y se designará con el símbolo 0, (0). Es obvio que el conjunto de todas las fracciones decimales infinitas incluye:

1) el conjunto de todas las fracciones decimales periódicas infinitas positivas;

2) el conjunto de todas las fracciones decimales periódicas infinitas negativas;

3) la fracción decimal periódica infinita nula.

Mostremos ahora que con las fracciones decimales periódicas infinitas (que acabamos de mencionar) no se agota el conjunto de todas las fracciones decimales infinitas.

**Teorema 2.** *Una fracción decimal infinita*

$$0{,}1010010001000010000010000001\ \ldots,$$

*formada según la regla: tras cada unidad sigue un grupo de ceros que contiene un cero más que el grupo anterior, no es fracción decimal periódica.*

**Demostración.** Supongamos que ésta es una fracción periódica y su período consta de $n$ cifras, con la particularidad de que el primer período ocupa el $k$-ésimo lugar. Está claro que en la fracción que se analiza cada unidad irá precedida, a partir de cierto $m$-ésimo lugar, de $(2n+1)$ o más ceros seguidos. Examinemos cada uno de estos grupos de ceros, que empieza con cualquier $p$-ésimo lugar, donde $p > k$ y $p > m$. Tomemos ahora el cero que está en el centro de tal grupo. Se dispone o bien al principio o bien al final, o bien en el interior de cierto período de longitud $n$, pero en todos los casos citados dicho período se halla enteramente dentro del segmento tomado que está constituido por $(2n + 1)$ o más ceros. Quiere decir, el período consta solamente de ceros y, por consiguiente, en la escritura de la fracción a partir del $k$-ésimo lugar deben haber solamente ceros, lo que no es cierto. El teorema está demostrado.

De lo expuesto anteriormente se deduce que cada número racional puede ser escrito en forma de una fracción decimal periódica infinita. Resulta natural, por esta razón, llamar *número irracional* aquel que puede ser escrito en forma de una fracción decimal aperiódica infinita.

En adelante consideraremos que cualquier fracción decimal periódica infinita es un número racional bien determinado, y cualquier fracción decimal aperiódica infinita, un número irracional bien determinado. Ha de notarse que en virtud de las definiciones citadas una fracción periódica infinita nula es el número cero.

## § 5. Números reales

El conjunto de todas las fracciones decimales infinitas (con las definiciones, que se introducen más abajo, de la igualdad, de la suma y del producto de estos números) se denomina *conjunto de números naturales* y se designa con la letra $R$, mientras que toda fracción decimal infinita lleva el nombre de *número real*. La fracción decimal infinita positiva se llamará *número real positivo* y la fracción decimal infinita negativa, *número real negativo*; la fracción decimal periódica infinita nula (de período cero), *número cero*. Por cuanto las fracciones decimales infinitas pueden ser tanto periódicas como aperiódicas, todo número real es o bien racional o bien irracional.

Dos números reales positivos

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots,$$
$$b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$$

son iguales, si $b_k = a_k$ para todos los números $k$ pertenecientes a una serie natural ampliada.

De dos números reales positivos

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots,$$
$$b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$$

el primero es *mayor* que el segundo, siempre que o bien $a_0 > b_0$, o bien, si $a_0 = b_0$, pero $a_1 > b_1$, o bien, si $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ... ..., $a_n = b_n$ (para cierto número natural $n$), pero $a_{n+1} > b_{n+1}$.

Dos números reales

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots \quad \text{y} \quad -b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$$

se llaman *opuestos*, si $b_k = a_k$ para todos los números $k$ pertenecientes a una serie natural ampliada. *Dos números reales negativos son iguales*, si son iguales los números opuestos de ellos. *De dos números negativos el mayor es aquel* cuyo número opuesto (positivo) es menor. Un número positivo es mayor que al cero y que cualquier número negativo. El número cero es mayor que cualquier número negativo.

Examinemos los *valores aproximados de las fracciones infinitas.* Rompemos en algún lugar la fracción decimal positiva infinita que expresa el número real positivo dado. Obtendremos una fracción decimal finita (la cual puede escribirse en forma de una fracción infinita de período cero). La fracción obtenida será menor que el número dado (o igual a él). Tal fracción se denomina *valor aproximado del número real positivo por defecto.*

Si una fracción decimal infinita positiva se rompe en algún $k$-ésimo lugar y a la fracción obtenida se le adiciona la fracción $\frac{1}{10^k}$, se obtendrá una fracción decimal finita que será mayor que el número real dado. Tal fracción se denomina *valor aproximado del número real positivo dado por exceso.*

Si rompemos en algún lugar una fracción infinita negativa, obtendremos una fracción decimal finita, la cual será mayor que el número real dado (o igual a él). Tal fracción se denomina *valor aproximado del número real negativo dado por exceso.*

Si una fracción infinita negativa se rompe en cierto $k$-ésimo lugar y a la fracción obtenida se adiciona la fracción $\left(-\frac{1}{10^k}\right)$, tendremos una fracción decimal finita, la cual es mayor que el número real dado. Tal fracción se llama *valor aproximado del número negativo dado por defecto.*

**Ejemplos. 1.** El valor aproximado del número 0,4(31) por defecto se representará por las siguientes fracciones finitas: 0,4; 0,43; 0,431;

0,4313; 0,43131; . . . El valor aproximado del mismo número por exceso lo expresarán las fracciones 0,5; 0,44; 0,432; 0,4314; 0,43132; . . .

2. El valor aproximado del número —3,2 (17) por defecto lo expresan las siguientes fracciones finitas: —3,3; —3,22; —3,218; —3,2172; —3,21718; . . . El valor aproximado de este mismo número por exceso se representa por las fracciones —3,2; —3,21; —3,217; —3,2171; —3,21717; . . .

Determinemos ahora las operaciones de adición y multiplicación para los números reales.

Se denomina *suma* de dos números reales un número que es mayor (o igual) que la suma de sus dos valores aproximados cualesquiera por defecto, pero menor (o igual) a la suma de sus dos valores aproximados cualesquiera por exceso.

Admitamos sin demostración que tal número siempre existe y es, además, el único.

Indiquemos un caso particular: la suma de un número real $a$ con el número opuesto (que se designará con $(-a)$) es el número cero.

Se denomina *producto* de dos números reales positivos $a_0, a_1a_2 \ldots$ $\ldots a_k \ldots$ y $b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$ un número mayor (o igual) que el producto de sus dos valores aproximados cualesquiera por defecto, pero menor (o igual) que el producto de sus dos valores aproximados por exceso.

Admitamos sin demostración que tal número siempre existe y es, además, el único.

El producto de dos números reales negativos $(-a_0, a_1a_2 \ldots$ $\ldots a_k \ldots)$ y $(-b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots)$ es igual al producto de los números positivos, opuestos de los primeros, $a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots$ y $b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$. El producto de dos números reales de signos diferentes, $a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots$ y $(-b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots)$ ó $(-a_0, a_1a_2 \ldots$ $\ldots a_k \ldots)$ y $b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$, es igual al número negativo opuesto del producto de los números $a_0, a_1a_2 \ldots a_k \ldots$ y $b_0, b_1b_2 \ldots b_k \ldots$.

El producto de dos números, uno de los cuales es cero, es igual a cero.

Son vigentes las siguientes **leyes** principales de adición y multiplicación de los números reales:

a) $a + b = b + a$ (conmutatividad de la adición);

b) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociatividad de la adición);

c) $ab = ba$ (conmutatividad de la multiplicación);

d) $(ab)\,c = a\,(bc)$ (asociatividad de la adición);

e) $(a + b)\,c = ac + bc$ (distributividad de la adición respecto a la multiplicación).

Para las operaciones de adición y multiplicación de los números reales se introducen operaciones inversas: las de sustracción y división.

*Sustraer* de un número real $a$ otro número real $b$ significa hallar un número real $c$ tal que $b + c = a$.

*Dividir* un número real $a$ por otro número real $b$, distinto de cero, significa hallar un número real $d$ tal, que $bd = a$.

En el conjunto de números reales las operaciones de sustracción y división son siempre realizables, a excepción de la división ilegítima por cero.

Si un número real $a$ figura en calidad de factor $n$ veces ($n$ es un número natural, $n > 1$), entonces el producto $\underbrace{aa \ldots a}_{n \text{ veces}}$ recibe el nombre de *n-ésima potencia* del número $a$ y se designa $a^n$. Además, por definición $a^1 = a$. Las propiedades de la potencia de los números reales son análogas a las de la potencia de los números racionales y por esta razón no se exponen aquí. En relación con el concepto de potencia de los números reales surge a menudo un problema en el que se pide hallar, para el número natural dado $n$ y para el número real dado no negativo $a$, otro número real no negativo $b$ tal, que tenga lugar la igualdad $b^n = a$.

Un número no negativo $b$ tal, que la $n$-ésima potencia suya es el número dado $a$, es decir, $b^n = a$, se denomina *raíz aritmética* de $n$-ésimo grado del número no negativo $a$ y se designa $b = \sqrt[n]{a}$.

**Teorema.** *Para cualquier número natural n y para todo número no negativo a existe una raíz aritmética de n-ésimo grado del número a y esta raíz es la única en el conjunto de números no negativos.*

La demostración del teorema se omite.

Cuando $n = 2$, en la designación de la raíz no se pone la cifra 2; cuando $n = 1$, la raíz del primer grado del número $a$ es el propio número $a$. Las raíces aritméticas pueden ser números racionales e irracionales.

Por ejemplo, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ es el número racional $\frac{2}{3}$; $\sqrt{2}$ es un número irracional (esto se desprende del teorema 1, § 4).

Señalemos que, por definición, la raíz aritmética del número 0 es cero.

Se llama *valor absoluto* (*módulo*) de un número natural $a$: este mismo número, si $a$ es positivo; cero, si $a$ es cero; el número opuesto de $a$, si $a$ es negativo. El valor absoluto de un número real $a$ se designa $|a|$. La definición recién enunciada puede escribirse en forma breve del modo siguiente:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0; \\ 0, & \text{si } a = 0; \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Las propiedades fundamentales de los valores absolutos de los números reales se darán en el capítulo 11.

Observemos que en virtud de la definición de raíz aritmética de un número no negativo es válida, para cualquier número real, la igualdad $\sqrt{a^2} = |a|$.

Planteemos un problema más general: hallar, para cualquier número real $a$ y para cualquier número natural $n$, los números reales $b$ tales, que se verifique $b^n = a$. Si los números mencionados existen, se denominan *raíces algebraicas reales de n-ésimo grado* del número real $a$. Si $a$ es un número no negativo, entonces, según lo expuesto más arriba, existe un número no negativo $b$ tal, que $b^n = a$, es decir, para cualquier número no negativo $a$ siempre existe al menos una raíz algebraica $b$, para cuya designación se emplea un símbolo especial $\sqrt[n]{a}$ (raíz aritmética). Si existen otras raíces algebraicas, además de la raíz aritmética, para su designación no se emplean ningunos símbolos especiales.

Examinemos la cuestión referente a la existencia de la raíz algebraica de un número real. Señalemos que en este párrafo las afirmaciones sobre la cantidad de raíces reales para el número real dado se aceptan sin demostración alguna. La validez de ellas se desprende del teorema general sobre la cantidad de raíces de un número complejo (capítulo XI).

Sea $a = 0$, entonces para todo número natural $n$ existe una, y sólo una raíz algebraica de $n$-ésimo grado, que es el número $b$, igual a cero.

Supongamos que $a$ es un número positivo y $n$, un número natural impar ($n = 2k + 1$). En este caso existe una, y sólo una, raíz aritmética, $b_1 = \sqrt[2k+1]{a}$, de este número y no hay otras raíces algebraicas reales de él. De este modo, existe una sola raíz algebraica de grado impar de un número positivo, a saber, la raíz aritmética.

Supongamos que $a$ es un número positivo y $n$, un número natural par ($n = 2k$). En este caso existe y, además, una sola raíz aritmética, $b_1 = \sqrt[2k]{a}$, y una raíz algebraica real, $b_2 = -\sqrt[2k]{a}$, del número citado. De este modo, existen dos raíces algebraicas reales de grado par del número positivo $a$: $b_1 = \sqrt[2k]{a}$ y $b_2 = -\sqrt[2k]{a}$.

Sean, ahora, $a$ un número negativo y $n$, un número natural par ($n = 2k$). Por cuanto cualquier número real distinto de cero a la potencia par es un número positivo, y el número 0 a toda potencia natural es cero, no existe ningún número real $b$ tal, que $b^{2k}$ sea un número negativo. Esto quiere decir que no existe raíz algebraica real de grado par de un número negativo.

Supongamos ahora que $a$ es un número negativo y $n$, un número natural impar ($n = 2k + 1$). Mostremos que existe un número real negativo $b$ tal, que $b^n = a$. Denotemos $c = -a$. Entonces, $c > 0$, razón por la cual existe la única raíz aritmética $d$ de grado $(2k + 1)$ del número $c$: $d^{2k+1} = c$, o bien $d = \sqrt[2k+1]{c} = \sqrt[2k+1]{-a} = \sqrt[2k+1]{|a|}$. Hagamos ahora $b = -d$. En este caso $b^{2k+1} = (-1)^{2k+1}d^{2k+1} = (-1)\,c = (-1)\,(-a) = a$. Quiere decir, $b = -\sqrt[2k+1]{|a|}$ es un número negativo tal, que $b^{2k+1} = a$, es decir, $(-\sqrt[2k+1]{|a|})$ es la raíz algebraica real del número negativo $a$.

**Ejemplos.** 1. Sea $a = -7$, $n = 5$, entonces la raíz algebraica

real de quinto grado del número $(-7)$ es el número $b = -\sqrt[5]{|-7|} = -\sqrt[5]{7}$.

2. Sea $a = -8$, $n = 3$, entonces la raíz algebraica real de tercer grado del número $(-8)$ es el número $b = -\sqrt[3]{|-8|} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

**Observación.** A veces la raíz de grado impar de un número negativo $a$ se escribe en la forma $b = \sqrt[2k+1]{a}$, sobreentendiéndose que $b = -\sqrt[2k+1]{|a|}$. Por ejemplo, en lugar de $b = -\sqrt[5]{7}$ se escribe $b = \sqrt[5]{-7}$. Pero, esta forma de escritura no se usará en adelante.

Pasemos ahora a la *interpretación geométrica* de los números reales. Sea dada una recta horizontal (fig. 1). Esta tiene dos direcciones mutuamente opuestas. Llamemos positiva una de estas direcciones




Fig. 1

y negativa, la otra. Para concretar, por dirección positiva elegimos la dirección a la derecha (véase la figura). Fijemos en la recta cierto punto $O$ y llamémoslo *punto de referencia*. El punto $O$ divide la recta en dos partes denominadas *rayos*. El rayo dirigido a la derecha se llamará *positivo* y el rayo dirigido a la izquierda, *negativo*. Sea dado un segmento, tomado por unidad de longitud; en estos casos se dice que se ha introducido una escala.

Se llama *recta numérica* aquella en la que se han elegido el punto de referencia, la dirección positiva y se ha introducido la escala.

*A todo punto de la recta numérica se le puede poner en correspondencia un número real*, rigiéndose por la regla siguiente:

— al punto elegido $O$ le pondremos en correspondencia el número cero;

— a todo punto $N$ en el rayo positivo le pondremos en correspondencia el número positivo $a$, donde $a$ es la longitud del segmento $ON$;

— a todo punto $M$ en el rayo negativo le pondremos en correspondencia el número negativo $b$, donde $|b|$ es la longitud del segmento $OM$.

De este modo, a cualquier punto de la recta numérica (con la escala elegida) se le ha puesto en correspondencia un único número real.

Mostremos que este proceso abarca todos los números reales. Supongamos lo contrario, es decir, admitamos que cierto número real $c$ no se ha puesto en correspondencia con cierto punto en la recta numérica. Si el número $c$ es positivo, se encontrará un segmento cuya longitud sea igual a $c$. Al marcar este segmento a la derecha del punto $O$ en la recta numérica, obtendremos un punto, al cual debe corresponder el número $c$, es decir, llegaremos a una contradicción. En cambio, si $c$ es un número negativo, se encontrará un segmento,

cuya longitud sea igual a $|c|$; al marcar este último a la izquierda del punto $O$ en la recta numérica, obtendremos un punto, al cual ha de corresponder el número $c$, es decir, otra vez llegaremos a una contradicción.

Así pues:

1. A todo punto en la recta numérica se le ha puesto en correspondencia un número real y este número es único;
2. A distintos puntos de la recta numérica se les han puesto en correspondencia números diferentes;
3. No existe un número real que no corresponda a cierto punto de la recta numérica.

En estos casos suele decirse que entre el conjunto de todos los puntos de la recta numérica y el de todos los números reales se ha establecido una *correspondencia biunívoca.*

Ha de señalarse que los puntos de la recta numérica se identifican a menudo con los números que se les han puesto en correspondencia. Aprovechando esta circunstancia resulta fácil formular cuál de dos números reales es mayor: *el mayor es aquel que en la recta numérica se ubica más a la derecha que el otro.*

**Sistema de coordenadas en una recta.** Si en una recta se han elegido el punto de referencia, la dirección positiva y la escala, se dice también que en la recta está dado *un sistema de coordenadas.* La propia recta se denomina *eje de coordenadas* y el punto $O$, *origen de coordenadas.* A todo punto $M$ de esta recta se le pone en correspondencia un número llamado *coordenada* del punto $M$ en el sistema de coordenadas dado. Dicho número se determina según la regla: si el punto $M$ se dispone en el rayo positivo, este número es igual al número positivo expresado por la longitud del segmento $OM$; si el punto $M$ se dispone en el rayo negativo, este número es igual al número negativo expresado por la longitud del segmento $OM$ que se toma con el signo menos; si el punto $M$ coincide con el origen de coordenadas, el número es igual a cero.

Supongamos que el eje de coordenadas dado se dispone horizontalmente de modo tal, que el rayo positivo esté orientado a la derecha. Entonces, cualquier punto dispuesto a la derecha respecto del origen de coordenadas $O$ tendrá coordenadas positiva y cualquier punto dispuesto a la izquierda del origen de coordenadas $O$, coordenada negativa. La coordenada del punto $O$, es decir, del origen de coordenadas, es igual a cero. Es fácil ver que la coordenada de cualquier punto $M$ del eje de coordenadas es igual al número real puesto en correspondencia al punto en la recta numérica.

Al examinar varios puntos distintos fijos del eje $t$, se designan frecuentemente con cierta letra mayúscula que tienen diferentes subíndices, por ejemplo, $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n, \ldots$; las coordenadas de estos puntos se denotan por la letra del eje con los correspondientes subíndices, es decir, $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$ Con el fin de indicar que el punto dado tiene una coordenada dada, ésta se escribe entre paréntesis al lado de la designación del propio punto, por

ejemplo $M_1(t_1)$, $M_2(t_2)$, $M_3(t_3)$, . . ., $M_n(t_n)$, . . .. Cuando se dice que está dado un punto, se entiende que está prefijada su coordenada; al decir que se debe encontrar un punto, se busca la coordenada de este punto.

**Teorema 1.** *Cualquiera que sea la disposición de dos puntos distintos $M_1(t_1)$ y $M_2(t_2)$ en el eje de coordenadas la distancia $d$ entre estos puntos es igual al módulo de la diferencia de sus coordenadas, es decir,*

$$d = |t_1 - t_2|.$$

**Demostración.** Si los puntos $M_1$ y $M_2$ coinciden, la afirmación del teorema es evidente. Supongamos ahora que los puntos $M_1$ y $M_2$ no coinciden y que, para concretar, el punto $M_2(t_2)$ se dispone más

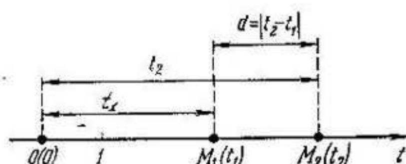



Fig. 2




Fig. 3

a la derecha del punto $M_1(t_1)$ (si el punto $M_1(t_1)$ se ubica más a la derecha que el punto $M_2(t_2)$, entonces la demostración se repite sustituyendo $t_2$ por $t_1$, y $t_1$ por $t_2$).

Sean $M_1(t_1)$ y $M_2(t_2)$ unos puntos cualesquiera no coincidentes situados a la derecha del origen de coordenadas $O$ (fig. 2). Entonces

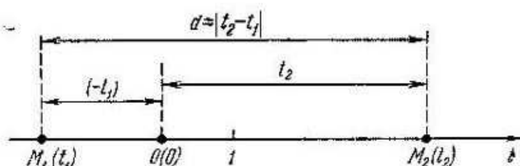



Fig. 4

la longitud del segmento $M_1M_2$ es igual a la del segmento $OM_2$, que es igual a $t_2$, menos la longitud del segmento $OM_1$, que es igual a $t_1$, es decir,

$$d = t_2 - t_1 = |t_2 - t_1|.$$

Supongamos que $M_1(t_1)$ coincide con el origen de coordenadas $O(0)$, es decir, que $t_1 = 0$, mientras que $M_2(t_2)$ es cualquier punto dispuesto a la derecha del origen de coordenadas $O$ (fig. 3). En este caso la longitud $d$ del segmento $M_1M_2$ será igual a la del segmento $OM_2$, que, a su vez, es igual a $t_2$, es decir,

$$d = t_2 = |t_2 - 0| = |t_2 - t_1|.$$

Sea $M_1$ ($t_1$) un punto cualquiera dispuesto a la izquierda del origen de coordenadas y sea $M_2$ ($t_2$), un punto cualquiera dispuesto a la derecha del origen de coordenadas (fig. 4). Entonces, la longitud $d$ del segmento $M_1M_2$ es igual a la del segmento $OM_2$, igual a $t_2$, más la longitud del segmento $OM_1$, que es igual a $(-t_1)$, es decir,

$$d = t_2 + (-t_1) = t_2 - t_1 = | t_2 - t_1 |.$$

Sea ahora $M_1$ ($t_1$) un punto cualquiera situado a la izquierda respecto del origen de coordenadas y supongamos que el punto $M_2$ ($t_2$)

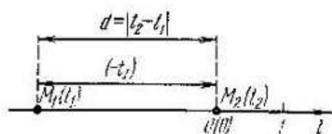



Fig. 5

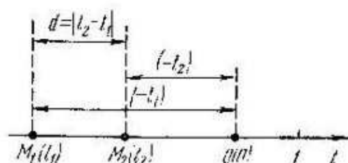



Fig. 6

coincide con el origen de coordenadas $O$ (0), es decir, $t_2 = 0$ (fig. 5). Entonces la longitud $d$ del segmento $M_1M_2$ coincide con la del segmento $M_1O$, que es igual a $(-t_1)$, es decir,

$$d = -t_1 = | 0 - t_1 | = | t_2 - t_1 |.$$

Ahora, supongamos que $M_1$ ($t_1$) y $M_2$ ($t_2$) son cualesquiera puntos no coincidentes, dispuestos a la izquierda del origen de coordenadas $O$ (fig. 6). En este caso la longitud $d$ del segmento $M_1M_2$ es igual a la del segmento $OM_1$, que es igual a $(-t_1)$, menos la longitud del segmento $OM_2$, que es igual a $(-t_2)$, es decir,

$$d = (-t_1) - (-t_2) = t_2 - t_1 = | t_2 - t_1 |.$$

Así pues, en todo caso $d = | t_2 - t_1 |$. El teorema queda demostrado.

**Ejemplos.** 1. Hállese la distancia entre los puntos $M$ (3) y $P$ (—2)

$$d = | 3 - (-2) | = | 3 + 2 | = 5, \text{ o bien } d = | -2 - 3 | = | -5 | = 5.$$

2. Hállese la distancia entre los puntos $M$ (—4) y $P$ (—10).

$$d = | -4 - (-10) | = | 6 | = 6, \text{ o bien } d = | (-10) - (-4) | = | -6 | = 6.$$

De este modo podemos decir que el módulo de cualquier número real $a$, es decir, $| a |$ es la distancia del punto $M$ ($a$) al origen de coordenadas.

## § 6. Igualdades y desigualdades numéricas

En el § 5 hemos tocado la cuestión sobre la comparación de los números y hemos dado ciertas definiciones, de acuerdo con las cuales se puede aclarar, si son iguales dos números reales dados, o bien uno de ellos es mayor que el otro. Todas las definiciones mencionadas se pueden escribir de otra forma, haciendo uso de la comparación de los números reales con el número cero, a saber: dos números reales, $a$ y $b$, son iguales, si, y sólo si, la diferencia entre ellos es nula, es decir, $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$; el número $a$ es mayor que el número $b$, si, y sólo si, la diferencia $(a - b)$ es positiva, es decir, $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$; el número $a$ es inferior al número $b$, si, y sólo si, la diferencia $(b - a)$ es positiva, o si la diferencia $(a - b)$ es negativa, es decir, $a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow b - a > 0$.

Si dos números están unidos entre sí mediante el signo de igualdad se dice que se ha dado una igualdad numérica. Sin embargo, dicha igualdad puede ser cierta y puede ser incierta. Por ejemplo, $2 = 5 - 3$, $\frac{4}{7} = \frac{\sqrt{16}}{7}$ son igualdades ciertas, mientras que las igualdades $3 = 5 - 1$, $6 = \frac{7}{3}$ son inciertas.

Análogamente, si dos números están unidos mediante cualquier signo de desigualdad, suele decirse que viene dada una desigualdad numérica, la cual puede ser cierta o incierta. Por ejemplo, $110{,}1 < 11^2$, $\sqrt{10} > 3$ son desigualdades ciertas, y $-5 > \sqrt{2}$, $\frac{7}{5} > 3$, inciertas.

La cuestión de si es cierta o incierta tal o cual igualdad numérica (desigualdad numérica) no es siempre obvia. Por ejemplo, la validez de la desigualdad

$$(100)^{53} < 1 \; 2 \cdot 3 \cdot \ldots \; 99 \cdot 100$$

no es evidente. En tales casos las igualdades y desigualdades numéricas han de ser demostradas. Desempeñan un papel de gran importancia las propiedades principales de las igualdades y desigualdades, que se exponen más abajo.

1. *Si los números $a$, $b$* y *$c$ son tales, que $a = b$ y $b = c$, entonces* $a = c$ (propiedad de transitividad de las igualdades).

2. *Si los números $a$, $b$, $c$, $d$ son tales, que $a = b$ y $c = d$, entonces* $a + c = b + d$.

3. *Si los números $a$, $b$, $c$, $d$ son tales, que $a = b$, $c = d$, entonces* $ac = bd$.

4. *Para cualesquiera números reales $a$, $b$ y $c$ las igualdades $a = b$* y *$a + c = b + c$ son equivalentes, es decir, la validez de la igualdad $a = b$ predetermina la validez de la igualdad $a + c = b + c$, y, viceversa, de la validez de la igualdad $a + c = b + c$ sigue la validez de la igualdad $a = b$, es decir, $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$.*

5. *Para cualesquiera números reales $a$ y $b$ para todo número real $c$,*

*distinto de cero, las igualdades* $a = b$ *y* $ac = bc$ *son equivalentes, es decir, si* $c \neq 0$, *entonces* $a = b \Leftrightarrow ac = bc$.

Expongamos las propiedades análogas para las desigualdades numéricas.

1. *Si los números* $a$, $b$ *y* $c$ *son tales, que* $a > b$ *y* $b > c$, *entonces* $a > c$ (propiedad de transitividad de las desigualdades).

**Demostración.** $a-c=(a-c)+(b-b)=(a-b)+(b-c)$. Por cuanto $a > b$, tenemos $a - b > 0$; por cuanto $b > c$, tenemos $b - c > 0$, pero la suma de dos números positivos es positiva, por lo cual $a - c > 0$, es decir $a > c$.

2. *Si los números* $a$, $b$, $c$, $d$ *son tales, que* $a > b$, $c > d$, *entonces* $a + c > b + d$.

**Demostración.** $(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d)$. Por cuanto $a > b$, el número $(a - b)$ es positivo; por cuanto $c > d$, entonces $(c - d)$ es también un número positivo; la suma de dos números positivos es positiva, por lo cual $(a + c) - (b + d) > 0$, es decir, $a + c > b + d$

2a. *Si los números* $a$, $b$, $c$, $d$ *son tales, que* $a > b$ y $c < d$, *entonces* $a - c > b - d$.

**Demostración.** $(a - c) - (b - d) = (a - b) + (d - c)$. Por cuanto $a > b$, el número $(a - b)$ es positivo; por cuanto $c < d$, entonces $(d - c)$ es también un número positivo; la suma de dos números positivos es positiva, por lo cual $(a - c) - (b - d) > 0$, es decir, $a - c > b - d$.

3. *Si* $a$, $b$, $c$, $d$ *son números positivos y, además,* $a > b$ *y* $c > d$, *entonces* $ac > bd$.

**Demostración.** $ac - bd = (ac - bd) + (bc - bc) = (ac - bc) + (bc - bd) = c(a - b) + b(c - d)$. Puesto que $a > b$, entonces $(a - b)$ es un número positivo; por cuanto $c$ es un número positivo y como el producto de números positivos es positivo, entonces $c(a - b)$ es un número positivo; de modo análogo se demuestra que $b(c - d)$ es también un número positivo; la suma de dos números positivos es positiva, por lo cual $ac - bd > 0$, es decir, $ac > bd$.

4. *Para cualesquiera números reales* $a$, $b$ *y* $c$, *las desigualdades* $a > b$ *y* $a + c > b + c$ *son equivalentes, es decir, la validez de la desigualdad* $a > b$ *predetermina que es válida la desigualdad* $a + c > b + c$, *y, viceversa, de la validez de la desigualdad* $a + c > b + c$ *se desprende la validez de la desigualdad* $a > b$, *es decir,* $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.

**Demostración.** Sea $a > b$. Entonces $(a + c) - (b + c) = (a - b) + (c - c) = (a - b) > 0$, es decir, $a + c > b + c$. Sea $(a + c) > (b + c)$. Entonces $a - b = (a - b) + (c - c) = (a + c) - (b + c) > 0$, es decir, $a > b$.

5. *Para cualesquiera números reales* $a$ *y* $b$ *y para todo número positivo* $c$, *las desigualdades* $a > b$ *y* $ac > bc$ *son equivalentes, es decir, si* $c > 0$, *entonces* $a > b \Leftrightarrow ac > bc$.

**Demostración.** Sea $a > b$, entonces $ac - bc = (a - b)c$. Por cuanto $c$ y $(a - b)$ son números positivos, el producto de ellos es un

número positivo, es decir, $ac - bc > 0$, o bien $ac > bc$. Sea $ac > bc$, entonces $(a - b) c = ac - bc > 0$.

Si el producto de dos números es positivo y uno de ellos es también positivo, entonces será positivo el otro número, es decir, por cuanto $c > 0$, tenemos $a - b > 0$, o sea, $a > b$.

5a. *Para cualesquiera números reales a y b y para todo número negativo c, las desigualdades $a > b$ y $ac < bc$ son equivalentes, es decir, si $c < 0$, entonces $a > b \Leftrightarrow ac < bc$.*

La demostración de esta afirmación es análoga a la de la propiedad 5.

De este modo, tienen lugar las siguientes propiedades principales de las igualdades y desigualdades:

| | |
|---|---|
| 1) $a = b,\ b = c \Rightarrow a = c$; | 1) $a > b,\ b > c \Rightarrow a > c$; |
| 2) $a = b,\ c = d \Rightarrow a + c = b + d$; | 2) $a > b,\ c > d \Rightarrow a + c > b + d$; |
| | 2a) $a > b,\ c < d \Rightarrow a - c > b - d$; |
| 3) $a = b,\ c = d \Rightarrow ac = bd$; | 3) $a > b > 0,\ c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$; |
| 4) $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$; | 4) $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$; |
| 5) $a = b \Leftrightarrow ac = bc$ para $c \neq 0$; | 5) $a > b \Leftrightarrow ac > bc$ para $c > 0$; |
| | 5) $a > b \Leftrightarrow ac < bc$ para $c < 0$. |

Más arriba se han usado los signos de igualdad ($=$) y de desigualdad rigurosa ($<$ o bien $>$). A veces estos signos son insuficientes. Hay problemas, donde se necesitan desigualdades no rigurosas.

**Ejemplo.** Hoy día en Moscú la temperatura es de 0°, y en Leningrado, no es superior a la de Moscú.

Si la temperatura en Leningrado se designa con la letra $T$, entonces o bien $T = 0°$, o bien $T < 0°$. En estos casos suele escribirse $T \leqslant 0°$.

Demos a conocer las definiciones de desigualdades no rigurosas $a \geqslant b$ y $a \leqslant b$. Una desigualdad numérica $a \leqslant b$ se considera cierta para $a < b$ y para $a = b$, y es incierta sólo en el caso en que $a > b$. Por ejemplo, las desigualdades $6 \leqslant 9$ y $3 \leqslant 2 + 1$ son ambas ciertas, y la desigualdad $7 \leqslant 6$ es incierta. (La escritura $a \leqslant b$ se lee o bien como «$a$ no es mayor que $b$», o bien como «$a$ es menor o igual a $b$»).

Una desigualdad numérica $a \geqslant b$ se considera cierta tanto para $a > b$ como para $a = b$; se considera incierta sólo en el caso cuando $a < b$. (La anotación $a \geqslant b$ se lee o bien como «$a$ no es menor que $b$» o bien como «$a$ es mayor o igual a $b$»).

Para las desigualdades no rigurosas son válidas las propiedades 1—5a, si sustituimos en ellas el signo de desigualdad rigurosa por el signo de desigualdad no rigurosa.

Diremos que

se verifica la desigualdad doble $a < b < c$, siempre que sean válidas a la vez dos desigualdades $a < b$ y $b < c$;

se verifica la desigualdad doble $a \leqslant b < c$, si son válidas a la vez dos desigualdades: $a \leqslant b$ y $b < c$;

se verifica la desigualdad doble $a < b \leqslant c$, cuando son válidas a la vez dos desigualdades: $a < b$ y $b \leqslant c$;

se verifica la desigualdad $a \leqslant b \leqslant c$, siempre que sean válidas a la vez dos desigualdades: $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$.

## § 7. Conjuntos de números

Los conceptos de conjunto y de elemento de un conjunto se consideran fundamentales, es decir, ellos no se definen.

En este párrafo se analizan los conjuntos de números cuyos elementos son números reales.

Si un número $a$ pertenece al conjunto $M$, se escribe $a \in M$; si $a$ no pertenece al conjunto $M$, se escribe $a \notin M$.

Por ejemplo: $2 \in N$, $0 \notin N$.

Más arriba fueron introducidos los siguientes conjuntos de números:

$N$, el conjunto de todos los números naturales (serie de números naturales);

$Z$, el conjunto de todos los números enteros;

$Z_0$, el conjunto de todos los números enteros no negativos (serie ampliada de números naturales);

$Q$, el conjunto de todos los números racionales;

$R$, el conjunto de todos los números reales.

Expongamos ahora ejemplos de otros conjuntos de números y convengamos cómo se denotarán éstos en lo que sigue.

Un conjunto que no contiene elementos se denomina vacío y se designa con el símbolo $\varnothing$.

Si un conjunto se compone de una cantidad finita de elementos, tal conjunto se escribe del modo siguiente: entre llaves se ponen todos los elementos del conjunto (en cualquier orden) separándolos uno de otro con punto y coma. Por ejemplo, un conjunto $M$ compuesto por los primeros seis números de la serie natural puede escribirse así: $M = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, y el conjunto $L$, que se compone de un número $\frac{\sqrt{2}-3}{4}$, se escribirá así: $L = \left\{\frac{\sqrt{2}-3}{4}\right\}$.

Si un conjunto se compone de una infinidad de elementos o de elementos que son, a su vez, conjuntos, entonces las llaves introducidas se conservan y entre ellas se da una breve descripción del conjunto. Por ejemplo, el conjunto de todos los pares de números $a$ y $b$, de los cuales $a$ es un número entero cualquiera y $b$, un número real cualquiera, se escribe así:

$$M = \{(a;\ b) \mid a \in Z,\ b \in R\}.$$

Si cada elemento del conjunto $A$ pertenece al conjunto $B$, el conjunto $A$ se denomina *subconjunto* del conjunto $B$. En este caso suele escribirse $A \subset B$ o bien $B \supset A$.

Por ejemplo: $N \subset Z$; $\{(a; b) \mid a \in N;\ b \in Z\} \subset \{(a; b) \mid a \in Z; b \in R\}$.

El conjunto de todos los números reales $t$, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $-1 < t < 2$, se denota $(-1; 2)$ y se llama *intervalo* $(-1; 2)$. Debido a la correspondencia biunívoca que existe entre el conjunto de todos los números reales y el conjunto de todos los puntos de la recta numérica, suele decirse,



Fig. 7

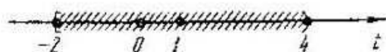


Fig. 8

refiriéndose al intervalo $(-1; 2)$, que es éste un conjunto de todos los puntos de la recta numérica dispuestos entre los puntos $(-1)$ y $(2)$, siendo excluidos estos últimos (fig. 7).

El conjunto de todos los números reales $t$, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $-2 \leqslant t < 4$, se denota



Fig. 9

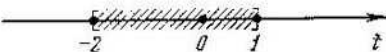


Fig. 10

$[-2; 4)$ y se denomina *semiintervalo* $[-2; 4)$. Suele decirse también que el semiintervalo $[-2; 4)$ es el conjunto de todos los puntos de la recta numérica dispuestos entre los puntos $(-2)$ y $(4)$, incluido el punto $(-2)$ (fig. 8).

El conjunto de todos los números reales $t$, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $0 < t \leqslant 3$, se denota $(0; 3]$ y se llama *semiintervalo* $(0; 3]$. Suele decirse en este caso que el semiintervalo $(0; 3]$ es el conjunto de todos los puntos de la recta numérica dispuestos entre los puntos $(0)$ y $(3)$, incluido el punto $(3)$ (fig. 9).

El conjunto de todos los números reales $t$, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $-2 \leqslant t \leqslant 1$, se denota $[-2; 1]$ y se denomina *segmento* $[-2; 1]$. Se dice que el segmento $[-2; 1]$ es el conjunto de todos los puntos de la recta numérica, dispuestos entre los puntos $(-2)$ y $(1)$, siendo incluidos estos dos puntos (fig. 10).

En el caso general, si $a < b$,

se denomina *segmento* $[a; b]$ el conjunto de todos los números reales $t$, para cada uno de los cuales se cumple la desigualdad doble $a \leqslant t \leqslant b$;

se denomina *semiintervalo* $[a; b)$ el conjunto de todos los números reales $t$, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $a \leqslant t < b$;

se denomina semiintervalo $(a; b]$ el conjunto de todos los números reales $t$, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $a < t \leqslant b$;

se llama *intervalo* $(a;\ b)$ al conjunto de todos los números reales $t$, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad doble $a < t < b$;

se denomina *rayo* $[a;\ +\infty)$ el conjunto de todos los números reales $t$, para cada uno de los cuales es válida la desigualdad $t \geqslant a$;

se denomina *rayo* $(a;\ +\infty)$ el conjunto de todos los números reales $t$, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad $t > a$;

se denomina *rayo* $(-\infty;\ a]$ el conjunto de todos los números reales $t$, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad $t \leqslant a$;

se denomina *rayo* $(-\infty;\ a)$ el conjunto de todos los números reales $t$, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad $t < a$.

Señalemos que, a veces, cuando se dice «*intervalo*», se entiende un rayo, un segmento, el propio intervalo o un semiintervalo. En fin, algunas veces el conjunto $R$ de todos los números reales se denota así: $(-\infty;\ +\infty)$.

**Unión e intersección de los conjuntos.**

Se llama *unión* de los conjuntos $A$ y $B$ al conjunto $C$ compuesto de todos los elementos tales, que cada uno de ellos está contenido siquiera en uno de los conjuntos dados $A$ y $B$. Para la unión de los conjuntos se emplea el símbolo $\cup$: $C = A \cup B$.

**Ejemplos.** 1. Si $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ y $B = \{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, entonces $A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

2. $N \cup Z_0 \cup \{0\} = Z_0$; 3. $(-1;\ 2) \cup (0;\ 3] = (-1;\ 3]$;
4. $(-1;\ 2)] \cup [-2;\ 1) = [-2;\ 2)$; 5. $[-2;\ 1] \cup (0;\ 3] = [-2;\ 3]$;
6. $(-1;\ 2] \cup (2;\ 4) = (-1;\ 4)$; 7. $(0;\ 1) \cup (-1;\ +\infty) = = (-1;\ +\infty)$.

Se llama *intersección* de los conjuntos $A$ y $B$ al conjunto $L$, cuyos elementos serán aquellos, y sólo aquellos, que pertenecen a la vez tanto al conjunto $A$ como al conjunto $B$, es decir, la intersección de dos conjuntos es la *parte común* de estos conjuntos. Para la intersección de los conjuntos se emplea el signo $\cap$: $L = A \cap B$.

**Ejemplos. 1.** Si $A = \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$ y $B = \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, entonces $A \cap B = \{2;\ 3\}$;

2. $N \cap Z_0 = N$; 3. $N \cap Z = N$;
4. $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\} \cap \{2;\ 3;\ 4;\ 5\} = \{2;\ 3;\ 4\}$;
5. $(-1;\ 2) \cap (0;\ 3] = (0;\ 2)$;
6. $(-\infty;\ 1] \cap (0;\ 3) = (0;\ 1]$;
7. $(-1,\ 3) \cap (3;\ +\infty) = \varnothing$.

**Conjuntos ordenados. Permutaciones y variaciones.** Al estudiar un conjunto de números, se puede disponer los números pertenecientes a dicho conjunto en cierto orden. En este caso tiene sentido hablar de un conjunto ordenado. Uno de los ejemplos del conjunto ordenado es la serie de números naturales. Si dos conjuntos ordenados contienen los mismos elementos, pero dispuestos en diferente orden, diremos que estos conjuntos ordenados se distinguen por el orden de disposición de los elementos. Por ejemplo, operando con tres números 4, 7, 1, se puede componer seis diferentes conjuntos ordenados: $\{1;\ 4;\ 7\}$, $\{1;\ 7;\ 4\}$, $\{4;\ 7;\ 1\}$, $\{4;\ 1;\ 7\}$, $\{7;\ 1;\ 4\}$, $\{7;\ 4;\ 1\}$.

Esta cuestión la analizaremos más detalladamente para los conjuntos finitos, es decir, para aquellos que se componen de un número finito de elementos, por ejemplo, de números.

**Definición.** *El orden establecido en un conjunto finito recibe el nombre de permutación de los elementos del conjunto citado.* El número de permutaciones es precisamente el número de diferentes conjuntos ordenados compuestos de los mismos elementos. El número de permutaciones de $n$ elementos se denota con $P_n$. Para dar la respuesta a la pregunta, ¿a qué es igual el número de permutaciones de $n$ elementos?, examinemos el problema general. Sea dado un conjunto compuesto de $n$ elementos. Escojamos $m$ elementos ($m \leqslant n$) en este conjunto y dispongámoslos en cierto orden. Llamemos *variación* al conjunto ordenado finito obtenido. El problema general puede enunciarse así: «¿Cuántas son las variaciones de $n$ elementos tomados en grupos de $m$?». Respondamos primeramente a la pregunta ¿cuántas son las variaciones de $n$ elementos tomados a dos? En el primer lugar de tal variación puede estar cualquier elemento de $n$ elementos, en el segundo lugar puede estar cualquiera de $(n-1)$ elementos restantes. Supongamos que el primer lugar lo ocupa el elemento $a_1$, entonces en el segundo lugar puede estar cualquiera de los elementos $a_2, a_3, \ldots, a_n$. Obtenemos $(n-1)$ variaciones. Si el primer lugar está ocupado por el elemento $a_2$, en el segundo lugar puede estar cualquiera de los elementos $a_1, a_3, a_4, \ldots, a_n$, es decir, tendremos $(n-1)$ variaciones más. Al agotar todos los elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, obtendremos $n$ grupos, en cada uno de los cuales se contienen $(n-1)$ variaciones. Por consiguiente, el número de todas las variaciones de $n$ elementos tomados a dos será $n(n-1)$.

Si se requiere determinar el número de variaciones de $n$ elementos tomados a tres, se debe añadir, por turno, a toda variación de $n$ elementos tomados a dos un elemento de $(n-2)$ restantes. Entonces obtendremos $n(n-1)$ grupos, en cada uno de los cuales se contendrán $(n-2)$ variaciones. Por consiguiente, el número de variaciones de $n$ elementos tomados a tres será en total $n(n-1)(n-2)$. Si el número de variaciones de $n$ elementos tomados a $m$ lo designamos con $A_n^m$, podemos escribir las fórmulas siguientes:

$$A_n^2 = n(n-1), \quad A_n^3 = n(n-1)(n-2). \tag{1}$$

Escribamos las fórmulas (1) en otra forma:

$$A_n^2 = n[n-(2-1)], \quad A_n^3 = n(n-1)[n-(3-1)]. \tag{2}$$

En las fórmulas (2) se observa cierta regularidad, a saber, el número de variaciones es igual al producto de números naturales sucesivos, empezando con $n$ y acabando con $[n-(k-1)]$, donde $k = 2, 3$. Razonando análogamente a lo anterior, obtendremos

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)], \quad 1 \leqslant m \leqslant n. \tag{3}$$

**Ejemplo.** En el 1er grado de una escuela hay 6 asignaturas 1er y 4 lecciones diarias. ¿Cuántos métodos pueden aplicarse para hacer el horario de un día de estudios (no se admite que a una asignatura se le asigne más de una lección por día)?

Para resolver este problema se debe determinar el número de variaciones de 6 elementos tomados a 4: $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. Así pues, son posibles 360 métodos para hacer el horario de un día. Evidentemente, la permutación es una variación de $n$ elementos tomados a $n$. De acuerdo con la fórmula (3) tenemos

$$P_n = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1. \tag{4}$$

Si aprovechamos el símbolo $n!$ (se lee: «factorial de $n$»), el cual significa el producto de $n$ primeros números de la serie natural ($n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n$), entonces la fórmula (4) puede escribirse del modo siguiente:

$$P_n = n!. \tag{5}$$

La fórmula (3) también puede reducirse a otra forma, aprovechando este mismo símbolo:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]\cdot[(n-m)\ldots 2\cdot 1]}{[(n-m)\ldots 2\cdot 1]} = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{6}$$

Para que la fórmula 6 coincida con la (5) cuando $m = n$, suele considerarse que $0! = 1$.

**Combinaciones y sus propiedades.** Tropezamos frecuentemente con los problemas en que se pide formar, a partir de un conjunto finito de $n$ elementos, otro conjunto de $m$ elementos ($m \leq n$), con la particularidad de que en el conjunto nuevo tiene importancia sólo la presencia de los elementos y no el orden que ellos siguen.

Por ejemplo, se pregunta cuántos son los métodos a emplear para la elección de tres alumnos, entre los diez, que realicen la limpieza de la clase. En este caso la ordenación del grupo compuesto por tres alumnos no es obligatoria. Tales conjuntos compuestos de $n$ elementos tomados a $m$, que se diferencian uno del otro sólo por los elementos y no por el orden de disposición, se denominan *combinaciones*; el número de combinaciones se denota con $C_n^m$. Es evidente que el número de combinaciones de $n$ elementos tomados a $n$ es igual a la unidad: $C_n^n = 1$. Examinemos el caso general en que $1 \leq m \leq n$.

Sean formadas todas las combinaciones $C_n^m$ de $n$ elementos tomados a $m$. Elijamos cualquiera de estas combinaciones y reordenemos en ella los elementos empleando con tal fin todos los medios posibles. Entonces, el número de toda clase de conjuntos ordenados obtenidos de $n$ elementos tomados a $m$ es igual a $C_n^m P_m$. Demostremos que este número coincide con el número de todas las variaciones de $n$ elementos tomados a $m$. Efectivamente, tomemos todas las variaciones posibles y escribámoslas reunidas en grupos. En cada grupo incluyamos variaciones compuestas de elementos iguales, que se diferencian por el orden de su disposición. De este modo, en cada grupo entrarán

tantas variaciones cuántas permutaciones puedan formarse de $m$ elementos dados, es decir, $m$ variaciones. Todas las variaciones que se disponen en un grupo y que se consideran como combinaciones, son iguales, puesto que contienen elementos iguales. Por consiguiente, el número de grupos no es otra cosa que el número de diferentes combinaciones de $n$ elementos tomados a $m$, es decir,

$$A_n^m = C_n^m m! \tag{7}$$

A partir de la igualdad (7) obtendremos la fórmula para calcular el número de combinaciones

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!},$$

o bien, haciendo uso de la fórmula (6):

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}. \tag{8}$$

Observemos que en virtud del acuerdo aceptado $0! = 1$, la fórmula (8) es válida también para $m = 0$, a saber, $C_n^0 = 1$.

Resolvamos ahora el problema enunciado más arriba sobre la elección de tres alumnos. El número de métodos posibles para escoger los alumnos será igual a

$$C_{10}^3 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7)\,(1\cdot2\cdot3)} = 120.$$

Si calculamos $C_{10}^7$, obtendremos el mismo resultado:

$$C_{10}^7 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{(1\cdot2\cdot3)\,(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7)} = 120.$$

Mostremos en el caso general que $C_n^m = C_n^{n-m}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$. En efecto,

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{[n-(n-m)]!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = C_n^m. \tag{9}$$

La fórmula (9) permite calcular con facilidad el número de combinaciones de $n$ elementos tomados a $m$, cuando $m$ es próximo a $n$. Por ejemplo,

$$C_9^8 = C_9^1 = \frac{9!}{8!} = 9.$$

He aquí una propiedad más que es propia para el número de combinaciones:

$$C_n^{m+1} + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}. \tag{10}$$

Efectivamente, haciendo uso de la fórmula (8), tenemos

$$C_n^{m+1}+C_n^m=\frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!}+\frac{n!}{m!\,(n-m)!}=$$

$$=\frac{n!}{m!\,(m+1)\,(n-m-1)!}+\frac{n!}{m!\,(n-m-1)!\,(n-m)}=$$

$$=\frac{n!}{m!\,(n-m-1)!}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{n-m}\right)=$$

$$=\frac{n!\,(n+1)}{m!\,(n-m-1)!\,(m+1)\,(n-m)}=\frac{(n+1)!}{(m+1)!\,[(n+1)-(m+1)]!}.$$

Empleando una vez más la fórmula (8), obtenemos que la fórmula (10) es cierta.

### *Ejercicios*

Calcúlense (1 . . . 10):

1. $3\frac{5}{14}-\left[1\frac{11}{49}:\left(76\cdot\frac{25}{38}-47\frac{3}{7}\right)\right]\cdot\frac{12}{55}$.

2. $\left\{5\frac{68}{126}\cdot\left[5\frac{5}{9}-8\frac{3}{4}:\left(\frac{8}{11}\cdot 9\frac{3}{16}-1\frac{2}{5}\right)\right]+5\frac{2}{19}\right\}:12\frac{3}{5}+\frac{5}{4}$.

3. $\left\{\left[\left(6\frac{9}{16}-2\frac{1}{2}\cdot 1\frac{9}{14}\right)\cdot 0{,}58\right]:0{,}75\right\}:6\frac{2}{3}$

4. $$\left[\frac{3\frac{1}{3}+4\frac{1}{9}-6\frac{5}{6}}{5\frac{7}{8}-2\frac{1}{4}-0{,}5}:\left(13\frac{8}{11}-8\frac{50}{99}\right)\right]\cdot\left(2\frac{3}{8}-1\frac{5}{8}\right)+$$
$$+\frac{\left(3\frac{6}{7}-1\frac{5}{3}-\frac{4}{21}\right):47}{9\frac{5}{51}-3\frac{2}{9}+5\frac{7}{18}-10\frac{9}{34}}.$$

5. $$\left\{\frac{4\frac{1}{3}+5{,}4+0{,}2\,(6)}{\frac{13}{15}+0{,}0\,(3)+0{,}1}:\left[\left(4-0{,}8\,(3)-2\frac{7}{8}\right):\left(8\frac{7}{24}-7{,}91\,(6)\right)\right]\right\}:$$
$$:\left(\frac{3}{14}+\frac{9}{42}\right).$$

6. $$\left[\left(\frac{3{,}25}{5{,}5}:\frac{3{,}125}{341}\right):\frac{0{,}341}{6{,}875}\right]:\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}+0{,}125}\cdot\frac{8}{13}\right)+$$
$$+\frac{1{,}01-\frac{1}{5}}{3\frac{1}{2}-0{,}8}\cdot\frac{2-0{,}04}{1-0{,}11}.$$

7. $\dfrac{\left[\left(17\dfrac{3}{100}-11{,}27\right)\cdot 2\right]:3\dfrac{1}{3}}{12:[2{,}28:(28{,}57-5{,}03)]}+4\dfrac{1}{2}\left\{\left[3:\left(0{,}2-\dfrac{1}{10}\right)\right]:\left[2\dfrac{1}{2}\times\right.\right.$
$\left.\left.\times\left(0{,}8+\dfrac{6}{5}\right)\right]\right\}.$

8. $\left\{\left[\dfrac{(4{,}6+5:6{,}25)\cdot 14}{4\cdot 0{,}125+2{,}3}\right]:\dfrac{7}{6}\right\}:\dfrac{2}{12{,}4+4\dfrac{2}{5}}+$
$+\left(4\dfrac{5}{8}-\dfrac{13}{6}:8\dfrac{2}{3}\right):\left(3{,}25-2\dfrac{1}{4}\right).$

9. $\dfrac{2{,}(3)-\left(2\dfrac{3}{16}-\dfrac{2}{3}\right):\dfrac{3}{8}}{\left[10-0{,}21:\left(4{,}2-3\dfrac{4}{5}\right)\right]:\left(1{,}3\cdot 1\dfrac{19}{24}\right)}+$
$+\dfrac{\left[\left(0{,}3-\dfrac{3}{20}\right)\cdot 3\dfrac{1}{2}\right]:0{,}05}{\left(1\dfrac{22}{25}+2{,}12\right)\left(0{,}1+\dfrac{1}{40}\right)}.$

10. $\dfrac{4\dfrac{8}{37}\cdot\left(2{,}8(4):2\dfrac{2}{5}\right)+\left[18\dfrac{13}{17}+\left(15\dfrac{13}{137}-\dfrac{2068}{137}\right):8{,}01\right]\cdot 5\dfrac{2}{3}}{\left[\left(1{,}08-\dfrac{2}{25}\right):0{,}(571\,428)\right]:\left[\left(6{,}(5)-3\dfrac{1}{4}\right)\cdot 2\dfrac{2}{17}\right]}.$

Demuéstrense las afirmaciones siguientes (11 . . . 33):

11. Para que el número natural $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ sea divisible por 5, es necesario y suficiente que $a_0 = 0$, o que $a_0 = 5$.

12. Para que un número natural sea divisible por 6, es necesario que se divida por 3.

13. Para que un número natural sea divisible por 3, es suficiente que se divida por 6.

14. Para que el número natural $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, $n \geqslant 1$, sea divisible por 4, es necesario y suficiente que el número $\overline{a_1 a_0}$ se divida por 4.

15. Para que el número natural $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, $n \geqslant 2$, sea divisible por 8, es necesario y suficiente que se divida por 8 el número $\overline{a_2 a_1 a_0}$.

16. Un número natural es divisible por 11, si, y sólo si, la diferencia entre la suma de sus cifras, que ocupan los lugares impares, y la suma de sus cifras, que se disponen en los lugares pares, es divisible por 11.

17. Para cualquier número natural $n$ el número $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ es natural.

18. El producto de dos números naturales sucesivos dividido por tres da en el resto cero o dos.

19. El número que es el cuadrado de un número natural, o bien se divide por tres, o bien, siendo dividido por tres, da en el resto la unidad.

20. El número que es el cubo de un número natural, al dividirlo por 9, da en el resto 0, 1, o bien 8.

21. Para cualquer $n$ natural, el número $n(n^2+5)$ es divisible por 6.

22. La suma de los cubos de tres números naturales sucesivos es divisible por 3.

23. El producto de tres números naturales sucesivos, entre los cuales el del medio es el cuadrado de un número natural, es divisible por 60.

24. Para cualesquiera $n$ y $m$ enteros el número $[nm(n-m)]$ es par.

25. El producto de dos números pares sucesivos es divisible por ocho.

26. La diferencia entre el cubo de un número impar y el propio número es divisible por 24.

27. El cuadrado de todo número impar, disminuido en la unidad, es divisible por 8.

28. La suma de dos números impares sucesivos es divisible por 4.

29. Dos números impares sucesivos son recíprocamente primos.

30. Para cualquier número natural $n$ los números $n$, $n+1$ y $2n+1$ son recíprocamente primos de dos en dos.

31. La suma de cuatro números naturales sucesivos no puede ser un número primo.

32. Cada una de dos fracciones, $\frac{14n+3}{21n+4}$ y $\frac{2n+3}{5n+7}$, es irreducible cualquiera que sea $n$ natural.

33. Si una fracción dada es irreducible, será irreducible también la fracción cuyo numerador es igual a la suma del numerador y denominador de la fracción dada y cuyo denominador es igual al producto del numerador por el denominador de la fracción dada.

34. ¿Cuántas veces el número 2 figura como factor en la descomposición del número 100! en factores primos?

35. ¿Cuántas veces el número 5 entra como factor en la descomposición del número 1980! en factores primos?

36. Hállese el resto que queda al dividir el número:
a) $2^{1980}$ por 5; b) $7^{7100}$ por 3.

37. ¿Cuál es la última cifra del número que se obtiene como resultado de la siguiente elevación a potencia: a) $2^{1980}$; b) $7^{1980}$?

38. ¿Se podrá representar el número 101 010 en forma de la diferencia entre los cuadrados de dos números enteros?

39. ¿Será divisible por 81 el número $\underbrace{11\ldots11}_{81 \text{ veces}}$?

40. Hállese el MCD (247, 221), MCD (323; 187; 209).

41. Hállense los números $a$ y $b$, si: el MCD $(a; b) = 13$, el MCM $(a; b) = 1989$.

42. ¿Para que cifras $x$ e $y$ el número $\overline{34x5y}$ se divide por 36?

43. La diferencia de dos números es igual a 5, y la suma de los cuadrados es igual a 157. Hállense dichos números.

44. Hállense todos los números de tres cifras, cada uno de los cuales sea 12 veces mayor que la suma de sus cifras.

45. Hállese una fracción propia, superior a $\frac{1}{3}$, si se sabe que al aumentar su numerador en cierto número entero y al multiplicar su denominador por el mismo número, la magnitud de la fracción no varía.

46. La fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible. Aclárese si es reducible o no la suma de dos fracciones $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{a+b}$.

47. Hállense todos los números naturales $n$ tales que para cada uno de ellos el número $\frac{3n+4}{5}$ sea natural.

48. ¿Es cierta la afirmación de que la suma de dos números naturales, cada uno de los cuales no se divide por 7, tampoco es divisible por 7?

49. Hállese el número natural mínimo, el cual, siendo dividido por 7, da en el resto 6, y, dividido por 9, da en el resto 8.

50. Hállese el número máximo de tres cifras, el cual, siendo dividido por 6, da en el resto 5, y al dividirlo por 4, da el resto igual a 3.

51. Hállense todos los números naturales, superiores a 200 e inferiores a 1500, cada uno de los cuales, siendo dividido tanto por 7, como por 21, da en el resto 2.

**52.** Hállense todos los números naturales, inferiores a 150, cada uno de los cuales, siendo dividido tanto por 6, como por 8, da en el resto 5.

**53.** Sea $p$ ($p \geqslant 5$) un número primo. Demuéstrese que el número ($p^2 - 1$) es divisible por 24.

**54.** Sea $p$ ($p \geqslant 7$) un número primo. Demuéstrese que el número ($p^2 - 13$) no se divide por 24.

**55.** Hállense los números primos $p$ y $q$ tales, que $p^2 - 2q^2 = 1$.

**56.** ¿Será primo el número ($4p + 1$), si se sabe que los números $p$ y ($2p+1$) son primos y $p > 3$?

**57.** Hállese el número $p$, si se sabe que $p$, ($p + 2$) y ($p + 4$) son números primos.

**58.** Demuéstrese que la suma (la diferencia, el producto, el cociente) de dos números irracionales puede ser un número racional.

**59.** Demuéstrese la irracionalidad de los números $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{49}$; ($\sqrt{2}+\sqrt{3}$); ($\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$).

**60.** Demuéstrese que una fracción decimal infinita 0,1234567891011 . . ., donde tras la coma vienen seguidamente todos los números naturales, es aperiódica.

**61.** Sea $a \geqslant b > 0$; $c > d > 0$. Demuéstrese que $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

**62.** Demuéstrese que $|a| = |-a|$; $|a| \geqslant a$; $|a| \geqslant -a$.

Hállese el conjunto de todos los números, para cada uno de los cuales es válida la igualdad (63 . . . 73):

**63.** $|-a| = a$. **64.** $|-a| = -a$. **65.** $a + |a| = 0$. **66.** $a - |a| = 0$. **67.** $a + |a| = 2a$. **68.** $a\,|a| = -a^2$. **69.** $\frac{a}{|a|} = 1$.

**70.** $\frac{a}{|a|} = -1$. **71.** $\sqrt{a^2} = -a$. **72.** $a\sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$. **73.** $\sqrt{3a^2} = -a\sqrt{3}$.

**74.** ¿Cuáles de las siguientes desigualdades son válidas: $5 \geqslant 2$; $3 \geqslant 3$; $\sqrt{4} \leqslant 2$; $6 \leqslant \sqrt{49}$ y $38 \leqslant \sqrt{912}$?

Si dos números reales $a$ y $b$ son tales que $a > b$, ¿será válida la desigualdad (75, 76): **75.** $a^2 > b^2$; **76.** $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$?

Hállese el conjunto de todos los números, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad (77 . . . 88):

**77.** $|-a| \leqslant a$. **78.** $|a| \leqslant -a$. **79.** $|a| \leqslant |-a|$. **80.** $a\,|a| \geqslant a^2$.

**81.** $\frac{a}{|a|} \leqslant -1$. **82.** $\frac{a}{|a|} \geqslant 1$. **83.** $\sqrt{a^2} \leqslant -a$. **84.** $a\sqrt{5} \leqslant \sqrt{5a^2}$.

**85.** $\sqrt{7a^2} \leqslant -a\sqrt{7}$. **86.** $|a| - a \leqslant 0$. **87.** $|a| + a \leqslant 2a$. **88.** $|a| + a \leqslant 0$.

Hállese la intersección de los siguientes dos conjuntos (89 . . . 96):

**89.** $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ y $[-6; 2[$. **90.** $\left[\sqrt{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$ y $\left[1\frac{2}{5}; \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right]$.

**91.** $[-\sqrt{3}; 2]$ y $\left(1\frac{18}{25}; 4\right)$. **92.** $(-\sqrt{5}; 4]$ y $[4; \sqrt{17}]$.

**93.** $\left(1; \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}; 2\right)$. **94.** $(-\infty; 2)$ y $(-\sqrt{3}; 10]$.

**95.** $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ y $\left(\frac{-\sqrt{2}-0{,}6}{2}; +\infty\right)$.

96. $(-\sqrt{17};\ \sqrt{5})$ y $\left[\frac{\sqrt{3}+2}{2};\ 6\right]$.

Hállese la unión de los siguientes dos conjuntos (97 . . . 105):
97. $[-1{,}5;\ 4]$ y $[-2;\ 1]$. 98. $[1;\ 5]$ y $[0;\ 6)$. 99. $[2;\ 4]$ y $[4;\ 7]$.
100. $(-1;\ 4)$ y $(0;\ 3]$.
101. $(-\infty;\ 2]$ y $[-3;\ 5)$. 102. $(0;\ 1)$ y $\left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$

103. $(-\infty;\ 2]$ y $\left[\frac{\sqrt{7}}{2};\ \sqrt{17}\right)$. 104. $(-4;\ 3)$ y $(2;\ 4]$.
105. $[-1;\ 1)$ y $(0{,}2;\ 2]$.

Indíquese en el eje numérico el conjunto de todos los números que satisfacen la condición (106 . . . 113):

106. $|x| = 1$. 107. $|x| < 3$. 108. $|x| \geqslant 2$. 109. $1 < x \leqslant 4$. 110. $-3 \leqslant x < 0$. 111. $(x-1)(x-2) = 0$. 112. $(x-1)^2(x+3) \leqslant 0$. 113. $(x-2)^2 \times (x^2+4) \leqslant 0$.

114. ¿Cuántos números diferentes de cuatro cifras se pueden formar empleando las cifras 1, 2, 3, 4, 5, si en la anotación de cada tal número ninguna de las cifras se repite?

115. ¿Cuántos números diferentes del teléfono, compuestos de siete cifras, pueden marcarse con ayuda del disco dotado de diez orificios que tienen los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0?

116. ¿Cuántos son los métodos con cuya ayuda se pueden elegir en un grupo de 25 hombres un responsable sindical, un responsable del deporte y un funcionario de la sección de cultura?

117. ¿Cuántos son los métodos que pueden emplearse para seleccionar unos cuantos libros (no menos de un libro) entre 5 manuales iguales de Algebra y 4 manuales iguales de Geometría?

118. Una compañía se compone de 3 oficiales, 6 sargentos y 60 soldados. ¿Cuántos son los métodos que pueden emplearse para formar la guardia de servicio que sea compuesta por un oficial, 2 sargentos y 20 soldados?

119. ¿Cuántos son los métodos que pueden emplearse para poner 20 libros en un armario de 3 anaqueles, si en cada anaquel caben todos los 20 libros?

120. Un hombre tiene 7 libros y otro, 9. ¿Cuántos son los métodos con ayuda de los cuales ellos pueden cambiar de a dos libros uno con el otro?

CAPÍTULO

# II

# EXPRESIONES ALGEBRAICAS

## § 1. Definiciones y propiedades principales

**Expresiones matemáticas y algebraicas.** En el capítulo anterior se han examinado números reales y algunas operaciones con éstos. Con ayuda de los números, los signos de operaciones y del paréntesis se componían diferentes *expresiones numéricas*. Aduzcamos ejemplos de ciertas expresiones numéricas:

$$(27:9);\quad \sqrt{8+1}.$$

$$\frac{\left(\frac{3}{11}-\frac{7}{2}\right)\frac{11}{71}-\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{7}\right)\frac{35}{47}}{\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{2}\right)\frac{19}{17}};$$

$$2\cdot 10^3+7\cdot 10^2+10-5.$$

Si en una expresión numérica se pueden realizar todas las operaciones indicadas en ella, el número real, obtenido como resultado de las operaciones cumplidas, se denomina *valor numérico de la expresión numérica dada* y, refiriéndose a la propia expresión, se dice que *tiene sentido*. En los ejemplos citados cada una de las primeras tres expresiones numéricas tiene un valor numérico igual a 3, y la cuarta, a 2705.

Si una expresión numérica consta de un solo número real, su valor numérico será el propio número.

A veces la expresión numérica no tiene valor numérico, puesto que no son realizables todas las operaciones indicadas en ella; refiriéndose a tal expresión numérica, se dice que *ella no tiene sentido* (*está privada de sentido*). Por ejemplo, las expresiones numéricas $\frac{7}{3\cdot 2-6}$; $\sqrt{10-8}$ y $(2-2)^0$ están privadas de sentido.

De este modo, cualquier expresión numérica o bien tiene valor numérico o bien está privada de sentido.

La expresión numérica se usa frecuentemente para describir tal o cual propiedad de un número que representa el valor numérico de dicha expresión. Así, por ejemplo, la propiedad del número (—17)

de dar, al dividirlo por 2, un resto igual a la unidad se escribe mediante una expresión numérica $2(-9)+1$. Para describir la propiedad de todo número impar encerrado dentro del segmento $[-2; 14]$ de dar, al dividirlo por 2, un resto igual a 1, se debe escribir la expresión numérica correspondiente para cada uno de los números $-1$, 1, 3, 5, 7, 9, 11 y 13, es decir, las siguientes ocho expresiones:

$$2\cdot(-1)+1; \quad 2\cdot 0+1; \quad 2\cdot 1+1; \quad 2\cdot 2+1;$$
$$2\cdot 3+1; \quad 2\cdot 4+1; \quad 2\cdot 5+1; \quad 2\cdot 6+1.$$

La misma propiedad se puede escribir, aplicando el simbolismo literal, de la manera siguiente: $2l+1$, donde $l\in\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

El ejemplo aducido muestra que en lugar de las expresiones numéricas resulta, a menudo, más cómodo analizar las expresiones, en las cuales en algunos lugares figuran letras en vez de números. Toda expresión de esta índole se llama *expresión matemática*. Los ejemplos de expresiones matemáticas son:

$$\frac{7}{a}; \quad 2^{b+3}\operatorname{sen}\frac{b-a}{c}; \quad \sqrt{3+\lambda}; \ \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}; \quad \log_c\frac{3+\sqrt{m}}{n}.$$

Observemos que el concepto «expresión matemática» es el más simple, por lo cual no se define, sino sólo se describe, lo que se ha hecho más arriba. La expresión matemática en la cual con los números y las letras (que figuran en dicha expresión) se realizan operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, elevación a potencia natural y extracción de una raíz aritmética, recibe el nombre de *expresión algebraica*.

Más abajo vienen los ejemplos de expresiones algebraicas:

$$a+b; \quad \frac{a-c}{a-b}; \quad 2-\frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\beta} \quad \sqrt{2\alpha\beta}-1; \quad \frac{\sqrt{3}(a^2-b^2)}{(m-n)+\sqrt{xy}}+abc$$

Una expresión algebraica se llama *racional*, si participan en ella (respecto de las letras que figuran en la expresión) sólo las operaciones de adición, multiplicación, sustracción, división y elevación a potencia natural (la expresión algebraica racional puede contener cualesquiera números, incluídos los irracionales). Los ejemplos de expresiones algebraicas racionales son:

$$\frac{\alpha}{2m}+\sqrt{3}\,a^7; \quad \frac{a-b}{c-a} \quad \frac{3b+m}{\sqrt{5}(m-n)}+xy; \quad 2x-\pi ab.$$

Una expresión racional se llama *entera respecto de la letra dada*, si no contiene la operación de división por la letra dada o por una expresión en que figura esta letra.

*La expresión racional fraccionaria respecto de una letra dada* es una expresión racional que contiene la operación de división por cierta expresión en la que figura esta letra, o por la propia letra.

Por ejemplo, la expresión racional $\frac{a+b+c}{3a+4b}$ es entera respecto de la letra $c$, y fraccionaria respecto de las letras $a$ y $b$; la expresión racional $\frac{3a}{7}+\frac{\sqrt{2}}{b}$ es entera respecto de $a$, pero fraccionaria respecto de $b$.

Una expresión algebraica se denomina *irracional*, si en ella se prevé la operación de extracción de una raíz aritmética respecto de las letras que la integran.

Los ejemplos de expresiones algebraicas irracionales son:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+2ab; \quad \sqrt{c+1}; \quad 2\sqrt{3}\,l+\sqrt[3]{3l-1}.$$

**Operaciones con expresiones algebraicas.** Sean dadas dos expresiones algebraicas que se denotan con las letras $A$ y $B$. Definamos para ellas las operaciones aritméticas.

*Adicionar* dos expresiones algebraicas $A$ y $B$ significa escribir formalmente la expresión algebraica $A+B$, denominada *suma* de las expresiones $A$ y $B$.

Por ejemplo, la suma de las expresiones algebraicas $\frac{a-b}{c-a}$ y $\frac{\alpha}{2p}$ será la expresión algebraica $\frac{a-b}{c-a}+\frac{\alpha}{2p}$.

*Multiplicar* dos expresiones algebraicas $A$ y $B$ significa escribir formalmente la expresión algebraica $AB$ denominada *producto* de las expresiones $A$ y $B$.

Por ejemplo, el producto de las expresiones algebraicas $\frac{3b}{\sqrt{x+y}}$ y $(a^2-b^2)$ lo representará la expresión algebraica $\frac{3b}{\sqrt{x+y}}\cdot(a^2-b^2)$.

Si hay necesidad de adicionar varias expresiones algebraicas, se suman primeramente las dos primeras expresiones y luego a la suma obtenida se le adiciona la tercera expresión, etc. Por ejemplo, la suma de cinco expresiones algebraicas es como sigue: $\{[(A+B)+C]+ +D\}+E$. De modo análogo se define también el producto de varias expresiones algebraicas.

Si en un producto una misma expresión algebraica $A$ interviene como factor $n$ veces ($n>1$, $n\in N$), se escribe $A^n$ en lugar del producto $\underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ veces}}$.

Por ejemplo, en lugar del producto $(a+b)(a+b)(a+b)$ se escribe $(a+b)^3$. En vez de $A^1$ se escribe, de ordinario, $A$.

*Sustraer* de una expresión algebraica $A$ otra expresión algebraica $B$ significa escribir formalmente la expresión algebraica $A-B$, llamada *diferencia* de las expresiones $A$ y $B$.

Por ejemplo, la diferencia entre las expresiones algebraicas $abc^3$ y $\frac{a^{2mn}}{pq}$ tendrá por expresión algebraica: $abc^3-\frac{a^{2mn}}{pq}$.

*Dividir* una expresión algebraica $A$ por otra expresión algebraica $B$ significa escribir formalmente la expresión algebraica $A : B$, denominada *cociente* de la división de la expresión $A$ por la expresión $B$.

Por ejemplo, el cociente de la división de la expresión algebraica $(a - b^2)$ por la expresión algebraica $\frac{p}{5l}$ será la expresión algebraica $(a - b^2) : \frac{p}{5l}$. Indiquemos que el cociente de la división de la expresión algebraica $A$ por la $B$ se denota frecuentemente en la forma $\frac{A}{B}$.

**Campo de valores admisibles de una expresión algebraica.** Está claro que por campo de valores admisibles de una expresión algebraica se debe entender el dominio en que dicha expresión algebraica tiene sentido. Sin embargo, este concepto requiere una precisión.

Sea dada una expresión algebraica. El conjunto de todas las letras que integran dicha expresión se denomina *colección literal* de la expresión algebraica dada.

Si en una expresión algebraica entran $n$ letras $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la colección literal de dicha expresión algebraica se escribe en la forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Cualquier letra, independientemente de la frecuencia con la que se encuentra en la expresión algebraica, se escribe en la colección literal sólo una vez. Al componer la colección literal de la expresión algebraica dada, el orden en que siguen las letras puede mantenerse cualquiera, pero fijo de una vez y para siempre.

Por ejemplo, para la expresión algebraica $\frac{2a-7b}{\sqrt{19ac}}$, de colección literal puede servir la $(a, b, c)$; para la expresión algebraica $\sqrt[3]{\frac{a}{2}+a^3b^k-\alpha}$, la colección $(k, \alpha, a, b)$.

Si en la colección literal $(\alpha, \beta, \gamma)$ tomamos en lugar de la letra $\alpha$ un número, por ejemplo, $\left(-\frac{7}{16}\right)$, en lugar de $\beta$, el número $\sqrt{2}$, y en lugar de $\gamma$, el número 0,3, entonces la colección de números $\left(-\frac{7}{16}\right)$, $\sqrt{2}$ y 0,3 se denominará colección numérica correspondiente a la colección literal dada $(\alpha, \beta, \gamma)$ y se escribirá en la forma $\left(-\frac{7}{16}, \sqrt{2}, 0{,}3\right)$. En este caso se dice que la colección numérica $\left(-\frac{7}{16}, \sqrt{2}, 0{,}3\right)$ corresponde a la colección literal $(\alpha, \beta, \gamma)$ para $\alpha=-\frac{7}{16}$, $\beta=\sqrt{2}$, $\gamma=0{,}3$.

De modo análogo se determina la colección numérica correspondiente a la colección literal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y para cualquier colección de $n$ letras ($n$ es un número natural cualquiera).

A una misma colección literal se le puede poner en correspondencia una infinidad de diferentes colecciones numéricas.

Dos colecciones numéricas se consideran diferentes, si al menos en un lugar y, además, en el mismo en cada colección, por ejemplo en el $i$-ésimo lugar de dichas colecciones numéricas se disponen números no iguales (es decir, en vez de una misma letra dispuesta en el $i$-ésimo lugar de la colección literal, en estas dos colecciones numéricas figuran números distintos). Por ejemplo, las colecciones numéricas $\left(1, -3, -5, -\sqrt{2}, \frac{7}{3}\right)$ y $\left(1, -3, -4, -\sqrt{2}, \frac{7}{3}\right)$, correspondientes a la colección literal $(a, b, c, d, e)$, son diferentes, puesto que en un mismo (tercer) lugar de ellas se disponen números desiguales $(-5)$ y $(-4)$ (es decir, en la primera colección $c = -5$, y en la segunda, $c = -4$). Las colecciones numéricas $\left(-3, -\frac{9}{7}\right)$ y $\left(-\frac{9}{7}, -3\right)$, correspondientes a la colección literal $(x, y)$, son diferentes, puesto que los primeros lugares de ellas están ocupados por números desiguales (es decir, en la primera colección $x = -3$, y en la segunda, $x = -\frac{9}{7}$; además, son diferentes, porque en el segundo lugar de ellas figuran números desiguales (es decir, en la primera colección $y = -\frac{9}{7}$, y en la segunda, $y = -3$).

Sean dadas una expresión algebraica y su colección literal. Examinemos cierta colección numérica correspondiente a la colección literal citada. Esta colección numérica se denomina *colección numérica* para las letras de la expresión algebraica dada. Si en dicha expresión algebraica sustituimos en lugar de cada letra, cualquiera que sea el lugar que ocupe, el número, que le corresponde, de la colección literal dada, obtendremos una expresión numérica, la cual o bien tiene sentido o bién está privada de sentido. Por ejemplo, examinemos la expresión algebraica $\frac{b-3a}{\sqrt{5+a}}$. Escribamos su colección literal en la forma $(a, b)$. Para la colección numérica $(4, 5)$, correspondiente a la colección literal $(a, b)$, (es decir, para $a = 4$, $b = 5$), esta expresión algebraica se escribe en forma de la expresión algebraica $\frac{5-3\cdot 4}{\sqrt{5+4}}$ y tiene el valor numérico $\left(-\frac{7}{3}\right)$. Para la colección numérica $(-6, 5)$ (es decir para $a = -6$ y $b = 5$) esta expresión algebraica se escribirá en forma de la expresión algebraica $\frac{5-3(-6)}{\sqrt{5-6}}$, la cual no tiene sentido.

La colección numérica correspondiente a la colección literal de la expresión algebraica dada se llama *admisible* para dicha expresión, siempre que tiene sentido la expresión numérica que se obtiene a partir de la expresión algebraica dada, si en lugar de cada letra, independientemente del lugar que ocupa en ella, sustituimos el número, que le corresponde, perteneciente a la colección numérica dada.

La totalidad de todas las colecciones numéricas admisibles,

correspondientes a la colección literal de la expresión algebraica dada, se llama *campo de valores admisibles* (CVA) de la expresión algebraica dada.

Observemos que existen expresiones algebraicas cuyo CVA es vacío. Por ejemplo, es vacío el CVA de la expresión algebraica $\frac{1}{2a-(a+a)}$, pues para cualquier valor numérico de la letra $a$, la correspondiente expresión numérica no tiene sentido. Las expresiones de esta índole se llaman expresiones privadas de sentido y no se tratarán en lo que sigue. El CVA de una expresión algebraica se escribe, por regla general, en forma de la colección de conjuntos, con la particularidad de que se indica a qué letra corresponde cada conjunto. Así por ejemplo, el CVA de la expresión $\frac{b-3}{\sqrt{5+a}}$ se escribe en la forma $\{(a, b) \mid a \in (-5; +\infty); b \in (-\infty; +\infty)\}$.

Se llama *valor numérico* o *magnitud numérica* de una expresión algebraica para la colección numérica dada del CVA al valor numérico de aquella expresión numérica que se obtiene, si se sustituye en lugar de cada letra de la expresión algebraica dada, independientemente del lugar que ocupa, el número, perteneciente a la colección numérica dada, que le corresponde.

Por ejemplo, el valor numérico de la expresión algebraica $\frac{b-3}{\sqrt{5+a}}$ para $a=4$ y $b=5$, será el número $\frac{2}{3}$, y para $a=0, b=4$, el número $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

A menudo las expresiones algebraicas se analizan no en todo su campo de valores admisibles, sino sólo en una parte de él, a saber, en cierta región $M$.

Por ejemplo, examinemos la expresión algebraica $vt$. El CVA de esta expresión es $\{(v, t) \mid v \in R; t \in R\}$. Supongamos que dicha expresión algebraica $vt$ representa el camino recorrido durante el tiempo $t$ a la velocidad $v$. Entonces, de acuerdo con el sentido físico del problema, se deben imponer a $v$ y $t$ las restricciones: $v \geqslant 0$ y $t \geqslant 0$. Con otras palabras, se debe examinar la expresión algebraica $vt$ en la siguiente región $M$ que forma parte del CVA de esta expresión: $M = \{(v, t) \mid v \in [0; +\infty); t \in [0; +\infty)\}$. La expresión algebraica se da habitualmente junto con la región $M$, en la que se analiza. Si la región $M$ no está definida, la expresión algebraica ha de analizarse en todo el CVA que debemos previamente determinar.

Sean dadas dos expresiones algebraicas $A$ y $B$. El conjunto de todas las letras de estas dos expresiones se llamará *colección literal de dos expresiones $A$ y $B$*. La colección numérica, correspondiente a la colección numérica literal de dos expresiones algebraicas, se denomina *admisible*, si tienen sentido simultáneamente ambas expresiones numéricas que se obtienen a partir de las expresiones algebraicas dadas, si en lugar de cada letra, no importa en qué lugar se dis-

ponga, sustituimos en éstas el número perteneciente a la colección numérica mencionada, que le corresponde a dicha letra.

La totalidad de todas las colecciones numéricas admisibles, correspondientes a la colección literal de dos expresiones algebraicas, recibe el nombre de *campo de valores admisibles* (CVA) de estas expresiones algebraicas.

**Ejemplo.** $A=\frac{b+7}{\sqrt{b+3}\,(a-2)}$; $B=\frac{(a+b)\sqrt{a+1}}{b+8}$. El CVA de estas dos expresiones algebraicas se escribe en la forma $\{(a, b) \mid a \in [-1; 2) \cup (2; +\infty);\ b \in (-3; +\infty)\}$.

De modo análogo se determina el CVA de $n$ expresiones algebraicas. Dos expresiones algebraicas pueden analizarse no en todo el CVA, sino sólo en cierta parte de él, es decir, en cierta región $M$. En vista de ello, por región $M$, perteneciente al CVA de las expresiones algebraicas, se entenderá en adelante o bien todo el CVA o bien una parte de él que se indica de modo explícito.

## § 2. Igualdades y desigualdades de las expresiones algebraicas

**Igualdades de las expresiones algebraicas.** Dos expresiones algebraicas se llaman *idénticamente iguales en la región M*, si para cualquier colección numérica de la región $M$ son iguales los valores numéricos correspondientes de estas expresiones.

Por ejemplo, dos expresiones algebraicas $(a+1)^2$ y $(a^2+2a+1)$ son idénticamente iguales tanto en todo el CVA de estas expresiones, es decir, en el campo $\{(a) \mid a \in (-\infty; +\infty)\}$, como en cualquiera de sus partes. Dos expresiones algebraicas $m+d+\frac{a-b}{3+c}$ y $\frac{d(3+c)+(a-b)}{3+c}$ son idénticamente iguales no en todo el CVA de estas dos expresiones que se representa por el campo $\{(a, b, m, c, d) \mid a \in R, b \in R; m \in R; c \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty); d \in R\}$, sino sólo en una parte de él, es decir, en la región $M$, donde $M=\{(a, b, m, c, d) \mid a \in R;\ b \in R;\ m \in \{0\};\ c \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty);\ d \in R\}$. Para escribir una igualdad idéntica de dos expresiones algebraicas en la región $M$ se emplea, a veces, el signo de igualdad, por encima del cual se pone la letra $M$, es decir, si ciertas expresiones algebraicas vienen denotadas con las letras $A$ y $B$, la escritura $A \overset{M}{=} B$ significa que las expresiones algebraicas $A$ y $B$ son idénticamente iguales en la región $M$, y la propia región $M$ es una parte del CVA de dos expresiones $A$ y $B$.

Por ejemplo, la escritura

$$\frac{a-b}{3+c} \overset{\text{CVA}}{=} \frac{a}{3+c}-\frac{b}{3+c}$$

significa que las expresiones algebraicas $\left(\frac{a-b}{3+c}\right)$ y $\left(\frac{a}{3+c}-\frac{b}{3+c}\right)$ son idénticamente iguales en el CVA de estas expresiones, es decir, en el campo $\{(a, b, c) \mid a \in R; b \in R, c \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)\}$ y la notación $\sqrt{a^2} \overset{M}{=} a$, en la que $M = \{(a) \mid a \in [0; +\infty)\}$ significa que la igualdad idéntica de las expresiones algebraicas $\sqrt{a^2}$ y $a$ se confirma sólo en la región $M$.

La sustitución de una expresión algebraica $A$ por otra expresión algebraica $B$, idénticamente igual a $A$ en la región $M$, perteneciente al CVA de las expresiones $A$ y $B$, se denomina *transformación idéntica en la región M* de la expresión algebraica $A$. Si no se indica la región $M$, en la que se realiza la transformación idéntica, suele considerarse que dicha transformación tiene lugar en el CVA de dos expresiones: la dada y la transformada.

Por ejemplo, la sustitución de la expresión algebraica $(a+1)^2$ por la expresión algebraica $a^2+2a+1$ será idéntica en el CVA de estas expresiones, es decir, en la región $M$, donde $M = \{(a) \mid a \in \in R\}$.

Será legítima la pregunta de si es posible la notación $A = B$ sin la letra $M$ por encima de igualdad y qué significa esta notación.

Por supuesto, se puede escribir formalmente $A = B$, pero si junto a esta igualdad no hay palabras que expliquen cómo debe entenderse tal escritura, entonces la última está privada de sentido lógico alguno. Por consiguiente, la escritura de este tipo ha de utilizarse sólo acompañada de explicaciones determinadas que puedan explicar cómo ella se debe entender.

Indiquemos ahora los casos, que se encuentran con mayor frecuencia, en los que la escritura $A = B$ se acompaña de explicaciones correspondientes referentes a cómo se debe entender tal escritura.

a) Supongamos que se sabe que en cierta región $M$, perteneciente al CVA de dos expresiones algebraicas $A$ y $B$, estas dos expresiones son idénticamente iguales. Entonces esta afirmación se escribe así: «*Se sabe* (*o por hipótesis*) *que* $A = B$ *en la región* $M$». En este caso se dice también que en la región $M$ *viene dada la igualdad idéntica* $A = B$.

b) Supóngase que se necesita demostrar la validez de la afirmación: las expresiones algebraicas $A$ y $B$ son idénticamente iguales en la región $M$ perteneciente al CVA de estas expresiones. En este caso se escribe: «*Demuéstrese que* $A = B$ *en la región* $M$». Suele decirse también que se necesita *demostrar que en la región M es válida la igualdad idéntica* $A = B$.

c) Supóngase que se necesita hallar una región $M$, perteneciente al CVA de dos expresiones algebraicas $A$ y $B$, tal que para cualquier colección numérica de la región $M$ el correspondiente valor numérico de la expresión $A$ sea igual al valor numérico correspondiente de la expresión $B$, y para cualquier colección numérica que no forma parte de la región $M$, pero sí pertenece al CVA de dichas expresiones,

los valores numéricos correspondientes de las expresiones dadas sean distintos. En semejantes casos dicen: «*Resolver la ecuación* $A = B$».

Observemos, ante todo, que la adición y la multiplicación de las expresiones algebraicas se realizan haciendo uso de las siguientes **afirmaciones**:

1. *En el CVA de las expresiones A y B se verifica la igualdad idéntica* $A + B = B + A$.

2. *En el CVA de tres expresiones A, B y C se verifica la igualdad idéntica* $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. *En el CVA de dos expresiones A y B se verifica la igualdad idéntica* $AB = BA$.

4. *En el CVA de tres expresiones A, B y C se verifica la igualdad idéntica* $(AB)\,C = A\,(BC)$.

5. *En el CVA de tres expresiones A, B y C se verifica la igualdad idéntica* $A\,(B + C) = AB + AC$.

Por cuanto la validez de estas afirmaciones se demuestra mediante un mismo método, daremos a conocer aquí solamente la **demostración** de la afirmación 1.

Elijamos una colección numérica dentro del CVA de dos expresiones $A$ y $B$ y denotemos con $A_0$ y $B_0$ respectivamente, los correspondientes valores numéricos de estas expresiones. Entonces, conforme a la propiedad de conmutatividad de la adición de números, para los números $A_0$ y $B_0$ es válida la igualdad numérica $A_0 + B_0 = B_0 + A_0$. Quiere decir, se ha mostrado que para la colección numérica dada dentro del CVA de dos expresiones $A$ y $B$ los valores numéricos correspondientes de las expresiones $A_0 + B_0$ y $B_0 + A_0$ son iguales. Por cuanto este razonamiento puede aplicarse para cualquier colección numérica del CVA de dos expresiones $A$ y $B$, queda demostrada la igualdad idéntica $A + B = B + A$ en el CVA de estas expresiones.

De modo análogo se demuestran también las **afirmaciones** siguientes:

6. *En el CVA de la expresión A se verifican las igualdades idénticas* $A + 0 = A$, $0 + A = A$.

7. *En el CVA de la expresión A se verifican las igualdades idénticas* $A \cdot 1 = A$, $1 \cdot A = A$.

8. *En el CVA de la expresión A se verifica la igualdad idéntica* $A + (-A) = 0$.

9. *En la región M (una parte del CVA de la expresión A), donde no existe una colección numérica, para la cual el valor numérico correspondiente de la expresión A fuera igual a cero, se verifica la igualdad idéntica* $A \cdot \frac{1}{A} = 1$.

Haciendo uso de las afirmaciones 1 . . . 9, podemos mostrar que las operaciones de sustracción y división de las expresiones algebraicas son respectivamente inversas a las operaciones de adi-

ción y multiplicación de expresiones algebraicas. A saber, son lícitas las siguientes *afirmaciones*.

10. *En el CVA de dos expresiones A y B se verifica la igualdad idéntica* $B + (A - B) = A$.

11. *En la región M (una parte del CVA de dos expresiones A y B), donde no existe una colección numérica para la cual el valor numérico correspondiente de la expresión B fuera igual a cero, se verifica la igualdad idéntica* $B\left(\frac{A}{B}\right) = A$.

Aduzcamos ahora las **afirmaciones**, empleadas frecuentemente al demostrar las igualdades de las expresiones algebraicas.

12. *Si en cierta región M, perteneciente al CVA de tres expresiones algebraicas A, B y C, se verifican simultáneamente las igualdades idénticas* $A = B$ *y* $B = C$, *entonces, en la región M se verifica también la igualdad idéntica* $A = C$ *(transitividad de las igualdades).*

13. *Si en cierta región M, perteneciente al CVA de cuatro expresiones algebraicas A, B, C y D, se verifican simultáneamente las igualdades idénticas* $A = B$ *y* $C = D$, *entonces en la región M se verifica también la igualdad idéntica* $A + C = B + D$.

14. *Si en cierta región M, perteneciente al CVA de cuatro expresiones algebraicas A, B, C y D, se verifican simultáneamente las igualdades idénticas* $A = B$ *y* $C = D$, *entonces en la región M se verifica también la igualdad idéntica* $AC = BD$.

El método por el que se demuestran las afirmaciones 10 . . . 14 es el mismo que se emplea para demostrar las afirmaciones 1 . . . 9. **Demostremos**, por ejemplo, la afirmación 12.

Tomemos cierta colección numérica de la región $M$. Denotemos los valores numéricos correspondientes de las expresiones $A$, $B$ y $C$ con $A_0$, $B_0$ y $C_0$, respectivamente. Del hecho de que en la región $M$ se verifican las igualdades idénticas $A = B$ y $B = C$ se desprende la validez de las igualdades idénticas $A_0 = B_0$ y $B_0 = C_0$. En tal caso, de acuerdo con la propiedad de transitividad de las igualdades idénticas, se verifica también la igualdad numérica $A_0 = C_0$. De este modo se ha mostrado que para la colección numérica dada de la región $M$ los valores numéricos correspondientes de las expresiones $A$ y $C$ son iguales. Por cuanto tal razonamiento puede realizarse para cualquier colección numérica de la región $M$, la validez de la igualdad idéntica $A = C$ en la región $M$ queda demostrada.

Se ha aceptado el siguiente convenio: si no se indica explícitamente la región $M$, en la cual se estudia la igualdad idéntica $A = B$, ésta se analiza en el CVA de dos expresiones $A$ y $B$. Por esta razón las palabras «se sabe que $A = B$» significan que en el CVA de dos expresiones $A$ y $B$ se verifica la igualdad idéntica $A = B$. Las palabras «demostrar que $A = B$» significan que primeramente es necesario hallar el CVA de dos expresiones $A$ y $B$, y luego demostrar la igualdad idéntica $A = B$ en el CVA dado.

En particular, teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, las **afirmaciones** 1 . . . 5, llamadas comúnmente leyes de adición

y multiplicación de las expresiones algebraicas, se pueden escribir también del modo siguiente:

Son válidas las siguientes leyes de adición y multiplicación de las expresiones algebraicas:

1. $A + B = B + A$ (conmutatividad de la adición);
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociatividad de la adición);
3. $AB = BA$ (conmutatividad de la multiplicación);
4. $(AB)\,C = A\,(BC)$ (asociatividad de la multiplicación);
5. $(A + B)\,C = AC + BC$ (distributividad de la adición respecto a la multiplicación).

Antes de estudiar la aplicación de estas afirmaciones para demostrar las igualdades, demos la definición de paso equivalente de una igualdad a otra.

Si en cierta región $M$ la validez de una igualdad idéntica predetermina la validez de la segunda, y de la validez de la segunda igualdad se deduce la de la primera, entonces se dice que estas dos igualdades idénticas son *equivalentes en la región $M$*, y la sustitución de una de ellas por la otra se denomina *paso equivalente en la región $M$* de la primera igualdad a la segunda.

En adelante omitiremos, para brevedad, la palabra «idéntica», siempre que ello no lleve a una equivocación.

El paso equivalente en la región $M$ de una igualdad a otra se denota con una flecha doble, por encima de la cual se escribe la letra $M$, es decir, la notación $A = B \overset{M}{\Leftrightarrow} C = D$ significa que en la región $M$ las igualdades $A = B$ y $C = D$ son equivalentes.

Entonces, de la validez de las afirmaciones 13, 14 se desprende la validez de los siguientes pasos equivalentes.

15. *Sea $M$ el CVA de tres expresiones algebraicas $A$, $B$ y $C$, entonces* $A = B \overset{M}{\Leftrightarrow} A + C = B + C$.

16. *Supongamos que la región $M$ pertenece al CVA de tres expresiones algebraicas $A$, $B$ y $C$, y posee la propiedad siguiente: cualquiera que sea la colección numérica perteneciente a la región $M$, el valor numérico correspondiente de la expresión $C$ no es igual a cero. Entonces,* $A = B \overset{M}{\Leftrightarrow} AC = BC$.

Demostremos, por ejemplo, la afirmación 15. Por cuanto $C = C$, de la afirmación 13 se deduce que resulta legítimo el paso de la igualdad $A = B$ a otra igualdad $A + C = B + C$. Viceversa, disponiendo de las igualdades $A + C = B + C$ y $(-C) = (-C)$ y recurriendo a las afirmaciones 13 y 8, llegamos a que resulta legítimo el paso de la igualdad $(A + C) = (B + C)$ a la igualdad $A = B$. Por consiguiente, es válido el paso equivalente

$$A = B \overset{M}{\Leftrightarrow} A + C = B + C.$$

Las afirmaciones aducidas 1 . . . 16 permiten demostrar las igualdades entre expresiones algebraicas. Demostremos, por ejemplo,

plo, que en el CVA de dos expresiones $A$ y $B$ se verifica la igualdad

$$A - B = A + (-B).$$

En virtud de la afirmación 15, esta igualdad es equivalente a la igualdad

$$A - B + B = A + (-B) + B.$$

De acuerdo con las afirmaciones 1, 2 y 10 se verifican las siguientes igualdades:

$$A - B + B = B + (A - B) \quad \text{y} \quad B + (A - B) = A.$$

Por consiguiente, $A - B + B = A$.

Análogamente, haciendo uso de las afirmaciones 2, 8, tenemos $A + (-B) + B = A$.

De este modo, queda demostrado que la igualdad $A - B + B = A + (-B) + B$ se verifica en el CVA de las expresiones algebraicas $A$ y $B$. Por consiguiente, en este CVA se verifica también la igualdad $A - B = A + (-B)$.

**Desigualdades de las expresiones algebraicas.** Pasemos ahora al empleo del signo de desigualdad para las expresiones algebraicas. El signo de desigualdad $>$ ($\geqslant$, $<$ o $\leqslant$), al igual que el signo de igualdad, se usa para las expresiones algebraicas sólo con ciertas explicaciones respecto a cómo se debe entender una notación de esta índole. Demos a conocer algunos de los casos en que dichos signos se emplean con mayor frecuencia.

a) Supongamos que se sabe que en cierta región $M$, perteneciente al CVA de dos expresiones algebraicas $A$ y $B$, para cualquier colección numérica de $M$ el correspondiente valor numérico de la expresión $A$ es mayor que el valor numérico correspondiente de la expresión $B$. Entonces, esta afirmación se escribe del modo siguiente: «*Se sabe* (o *por hipótesis*) *que* $A > B$ *en la región* $M$». En este caso se dice también que en la región $M$ *se verifica la desigualdad idéntica* $A > B$.

b) Supongamos que se necesita demostrar la validez de la afirmación: «para cualquier elección numérica de la región $M$, perteneciente al CVA de dos expresiones $A$ y $B$ el valor numérico correspondiente de la expresión $A$ es superior al valor numérico correspondiente de la expresión $B$». Entonces se escribe: «*Demuéstrese que en la región* $M$ $A > B$». En este caso se dice también que *se necesita demostrar la validez de la desigualdad idéntica* $A > B$ *en la región* $M$.

c) Supongamos que se necesita hallar una región $M$, perteneciente al CVA de dos expresiones algebraicas $A$ y $B$, tal que para cualquier colección numérica de la región $M$ el valor numérico correspondiente de la expresión $A$ es mayor que el valor numérico correspondiente de la expresión $B$, y para cualquier colección numérica del CVA, que no forma parte de la región $M$, el valor numérico correspondiente de la expresión $A$ es menor o igual que el valor numé-

rico correspondiente de la expresión $B$. En estos casos se dice: «*Resuélvase la desigualdad* $A > B$».

Al demostrar igualdades idénticas hay que emplear frecuentemente las **afirmaciones** siguientes:

17. *Si en cierta región* $M$, *perteneciente al CVA de tres expresiones algebraicas* $A$, $B$ *y* $C$, *se verifican simultáneamente las desigualdades idénticas* $A > B$ *y* $B > C$, *entonces en la región* $M$ *se verifica también la desigualdad idéntica* $A > C$ (propiedad de transitividad de una desigualdad).

18. *Si en cierta región* $M$, *perteneciente al CVA de cuatro expresiones algebraicas* $A$, $B$, $C$ *y* $D$, *se verifican simultáneamente las desigualdades idénticas* $A > B$ *y* $C > D$, *entonces en la región* $M$ *se verifica también la desigualdad idéntica* $A + C > B + D$.

19. *Si para cualquier colección numérica de cierta región* $M$, *perteneciente al CVA de cuatro expresiones algebraicas* $A$, $B$, $C$ *y* $D$, *los valores numéricos correspondientes de estas expresiones* $A$, $B$, $C$ *y* $D$ *son positivos y si en esta región se verifican simultáneamente las desigualdades idénticas* $A > B$ *y* $C > D$, *entonces será válida también la desigualdad idéntica* $AC > BD$.

Demos ahora la definición de paso equivalente de una desigualdad a otra.

Si en cierta región $M$ de la validez de la primera desigualdad idéntica se desprende la validez de la segunda, y de la validez de la segunda desigualdad se deduce la validez de la primera, suele decirse que estas dos desigualdades idénticas *son equivalentes en la región* $M$, y la sustitución de una de ellas por la otra se denomina *paso equivalente* de una desigualdad a la otra. En este caso se emplea el signo de paso equivalente $\Leftrightarrow$.

La validez de las afirmaciones 17 . . . 19 predetermina la validez de los siguientes pasos equivalentes.

20. *Sea* $M$ *el CVA de tres expresiones algebraicas* $A$, $B$ *y* $C$, *entonces,* $A > B \overset{M}{\Leftrightarrow} A + C > B + C$.

21. *Supongamos que cierta región* $M$ *pertenece al CVA de tres expresiones algebraicas* $A$, $B$ *y* $C$ *y posee la siguiente propiedad: para cualquier colección numérica perteneciente a la región* $M$ *el valor numérico correspondiente de la expresión* $C$ *es positivo. Entonces,* $A > B \overset{M}{\Leftrightarrow}$ $\overset{M}{\Leftrightarrow} AC > BC$.

Existe el convenio siguiente: si no se indica explícitamente la región $M$, en la que se analiza la desigualdad idéntica $A > B$, ésta se estudia en el CVA de dos expresiones algebraicas $A$ y $B$. Por eso, las palabras «*sea* $A > B$» significan que en el CVA de dos expresiones $A$ y $B$ se verifica la desigualdad idéntica $A > B$; las palabras «*demuéstrese que* $A > B$» significan la necesidad de demostrar que en el CVA de dos expresiones $A$ y $B$ se verifica la igualdad idéntica $A > B$ (en este caso se sobreentiende que dicho CVA debe ser determinado obligatoriamente). Si se da la desigualdad $A > B$, entonces

el CVA de dos expresiones $A$ y $B$ se denomina, a menudo, CVA de la desigualdad $A > B$.

Cabe señalar que las afirmaciones 17 . . . 21 quedan en vigor también en el caso de desigualdades no rigurosas. Por ejemplo, la propiedad de transitividad de las igualdades puede enunciarse así.

17a. *Si en cierta región $M$, perteneciente al CVA de tres expresiones algebraicas $A$, $B$ y $C$, se verifican simultáneamente las igualdades idénticas $A \geqslant B$ y $B > C$, entonces en la región $M$ se verifica también la desigualdad $A > C$.*

17b. *Si en cierta región $M$, perteneciente al CVA de tres expresiones algebraicas $A$, $B$ y $C$, se verifican simultáneamente las desigualdades idénticas $A > B$ y $B \geqslant C$, entonces en la región $M$ se verifica también la desigualdad $A > C$.*

Si ambas desigualdades son no rigurosas, la desigualdad que proviene de ellas tampoco será rigurosa. Por ejemplo, en este caso la afirmación concerniente a la transitividad de las desigualdades se enunciará así.

17c. *Si en cierta región $M$, perteneciente al CVA de tres expresiones algebraicas $A$, $B$ y $C$, se verifican simultáneamente las igualdades idénticas $A \geqslant B$ y $B \geqslant C$, entonces en la región $M$ se verifica también la desigualdad $A \geqslant C$.*

En adelante, la palabra «idéntica» se omitirá, como se hizo en el caso de igualdades.

Examinemos ahora algunos métodos que se usan para demostrar las igualdades y desigualdades.

**1. Análisis de todos los casos posibles.** Demostremos, empleando dicho método, las propiedades de los valores absolutos de los números reales del tipo de igualdades y desigualdades:

$$\begin{aligned} &1.\ |a+b| \leqslant |A| + |b|;\\ &2.\ |a| - |b| \leqslant |a-b|;\\ &3.\ |ab| = |a|\,|b|; \qquad (1)\\ &4.\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ \text{si } b \neq 0. \end{aligned}$$

Comencemos, por ejemplo, con la propiedad 3. Examinemos todos los casos posibles:

$$\begin{aligned} &\alpha)\ \{(a,\ b)\mid a \in [0;\ +\infty);\ \ b \in [0;\ +\infty)\},\\ &\beta)\ \{(a,\ b)\mid a \in [0;\ +\infty);\ \ b \in (-\infty;\ 0]\},\\ &\gamma)\ \{(a,\ b)\mid a \in (-\infty;\ 0];\ \ b \in [0;\ +\infty)\},\\ &\delta)\ \{(a,\ b)\mid a \in (-\infty;\ 0];\ \ b \in (-\infty;\ 0]\} \end{aligned}$$

y realicemos la demostración en cada caso por separado.

En el caso $\alpha$), por definición del valor absoluto, tenemos $|a| = a$ y $|b| = b$, por lo cual $|ab| = ab$. Quiere decir, en el caso $\alpha$)

la igualdad $|ab| = |a||b|$ puede escribirse en la forma $ab = ab$, después de lo cual se hace obvia.

En el caso β) $ab \leqslant 0$, por lo cual según la definición de valor absoluto, $|a| = a$, $|b| = -b$, $|ab| = -ab$. Por lo tanto, en este caso la propiedad 3 puede escribirse en la forma $-ab = a(-b)$, o bien $-ab = -ab$, después de lo cual ella se hace evidente.

En los casos γ) o δ) la propiedad 3 se demuestra análogamente. Del hecho de que la propiedad 3 es válida en todo caso posible se infiere su validez en la enunciación en que está escrito.

Demostremos ahora la propiedad 1. Veamos los siguientes 6 casos:

$$\begin{array}{lll} \alpha)\ a \geqslant 0; & b \geqslant 0; & \\ \beta)\ a \geqslant 0; & b \leqslant 0; & a + b \geqslant 0; \\ \gamma)\ a \geqslant 0; & b \leqslant 0; & a + b \leqslant 0; \\ \delta)\ a \leqslant 0; & b \geqslant 0; & a + b \geqslant 0; \\ \lambda)\ a \leqslant 0; & b \geqslant 0; & a + b \leqslant 0; \\ \nu)\ a \leqslant 0; & b \leqslant 0. & \end{array}$$

En el caso α) tenemos $|a + b| = a + b = |a| + |b|$, por lo cual la propiedad 1 en este caso puede escribirse en la forma $|a + b| = |a| + |b|$, después de lo cual se hace evidente.

En el caso β) tenemos $|a + b| = a + b = a - (-b) = |a| - |b|$, por lo cual la propiedad 1 en este caso puede escribirse en la forma $|a| - |b| \leqslant |a| + |b|$, después de lo cual la propiedad se hace evidente.

En el caso γ) tenemos $|a + b| = -(a + b) = (-b) - a = |b| - |a|$, por lo cual la propiedad 1 en este caso puede escribirse en la forma $|b| - |a| \leqslant |a| + |b|$, después de lo cual la propiedad se hace evidente.

En los casos δ), λ) y ν) las demostraciones de la propiedad 1 son análogas a las anteriores. De la validez de la propiedad 1 se deduce en todos los casos posibles su validez en la enunciación en que está escrita. Las propiedades 2 y 4 de los valores absolutos (1) se demuestran análogamente.

**2. Utilización de las leyes que rigen las operaciones sobre las expresiones algebraicas y de las propiedades (1—21) que se desprenden de ellas.** Demostremos, empleando este método, una igualdad siguiente

$$(a + b)(a^2 + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3. \qquad (2)$$

Observemos que la igualdad (2) se demuestra en el CVA de tres expresiones $(a + b)$, $(a^2 + b^2)$ y $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$, es decir, en el conjunto $\{(a, b) \mid a \in R;\ b \in R\}$. En razón de la ley de distributividad de las operaciones con expresiones algebraicas podemos afirmar que se verifica la igualdad

$$(a + b)(a^2 + b^2) = a(a^2 + b^2) + b(a^2 + b^2). \qquad (3)$$

En virtud de la ley de conmutatividad de la multiplicación se verifican las igualdades

$$a\,(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)\,a, \tag{4}$$

$$b\,(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)\,b. \tag{5}$$

En virtud de la ley de distributividad se verifican las igualdades

$$(a^2 + b^2)\,a = a^2a + b^2a, \tag{6}$$

$$(a^2 + b^2)\,b = a^2b + b^2b. \tag{7}$$

En virtud de las leyes de conmutatividad y asociatividad de la multiplicación tenemos

$$a^2a = a^3, \tag{8}$$

$$b^2a = ab^2, \tag{9}$$

$$a^2b = a^2b, \tag{10}$$

$$b^2b = b^3. \tag{11}$$

Por cuanto las igualdades pueden sumarse (véase la propiedad 13 de las igualdades), al adicionar las igualdades (8) y (9) y, luego, las (10) y (11), constatamos que se verifican las igualdades

$$a^2a + b^2a = a^3 + ab^2,$$

$$a^2b + b^2b = a^2b + b^3.$$

Al adicionar estas igualdades y, luego, las (6) y (7), nos convencemos de que se verifican las desigualdades

$$a^2a + b^2a + a^2b + b^2b = a^3 + ab^2 + a^2b + b^3, \tag{12}$$

$$(a^2 + b^2)\,a + (a^2 + b^2)\,b = a^2a + b^2a + a^2b + b^2b. \tag{13}$$

Sumando las igualdades (4) y (5), obtenemos la validez de las igual) dades

$$a\,(a^2 + b^2) + b\,(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)\,a + (a^2 + b^2)\,b. \tag{14}$$

Aplicando las propiedades de transitividad de las igualdades, de la validez de las igualdades (3), (14), (13) y (12) se deduce la validez de las igualdades (2).

Ha de notarse que todos los razonamientos precedentes se escriben en forma de la siguiente cadena de igualdades:

$$(a + b)\,(a^2 + b^2) =$$

$$= a\,(a^2 + b^2) + b\,(a^2 + b^2) = (a^2 + b^2)\,a + (a^2 + b^2)\,b =$$

$$= a^2a + b^2a + a^2b + b^2b = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3.$$

De la validez de esta cadena de igualdades se deduce la validez de la igualdad (2). En lo que sigue, empleando para la demostración

con este u otros métodos, escribiremos sólo la cadena de igualdades evidentes.

**3. Demostración directa.** A menudo, al buscar la demostración, pasando de la desigualdad dada a la siguiente, se llega al final a una desigualdad evidente. Si, en este caso, se realizan sólo pasos equivalentes, es decir al realizarse un paso, se obtiene cada vez una desigualdad equivalente a la anterior, de este modo se obtiene, pues, la demostración de la desigualdad de partida. Demostremos, empleando dicho método, la desigualdad siguiente: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ en la región $M = \{(a, b) \mid a \in (0, +\infty);\ b \in (0;, +\infty)\}$. Escribamos la cadena de pasos equivalentes en la región $M$:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \overset{M}{\Leftrightarrow} a+b-2\sqrt{ab} \geqslant 0 \overset{M}{\Leftrightarrow} (\sqrt{a})^2 -$$

$$-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2 \geqslant 0 \overset{M}{\Leftrightarrow} (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0.$$

Por cuanto la validez de la última desigualdad es evidente, la equivalencia entre la primera y última desigualdades predetermina la validez de la primera desigualdad.

La desigualdad demostrada se enuncia con frecuencia del modo siguiente: *la media aritmética de dos números positivos no es menor que su media proporcional.*

**4. Método por reducción al absurdo.** Este método ya se ha usado en el capítulo I al demostrar el teorema sobre la infinidad de números primos. Puede aplicarse también en la demostración de las igualdades y de las desigualdades.

Demostremos, por ejemplo, empleando dicho método, que para cualquier número positivo $a$ se verifica la desigualdad $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe al menos un número positivo $a$ tal que para él se verifica la desigualdad $a + \frac{1}{a} < 2$. Por cuanto $a$ es un número positivo, dicha desigualdad será equivalente, en virtud de la afirmación 21, a la desigualdad $\left(a + \frac{1}{a}\right)a < 2a$, es decir, a la desigualdad $a^2 + 1 < 2a$, la cual conforme a la afirmación 20, es equivalente a la desigualdad $(a^2 + 1) - 2a < 2a - 2a$, es decir, a la desigualdad $a^2 - 2a + 1 < 0$. Reescribamos la última desigualdad en la forma $(a - 1)^2 < 0$. Llegamos a una contradicción con el hecho obvio de que el cuadrado de cualquier número real es no negativo. La contradicción obtenida habla de que la suposición admitida no es cierta. Por consiguiente, la desigualdad $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ se cumple para cualquier $a$ positivo.

**5. Utilización de la propiedad de transitividad de las desigualdades.** Supongamos que se pide demostrar en la región $M$ la desigualdad $A < C$. Si se conoce o se ha demostrado que en la región $M$ se verifican las desigualdades $A < B$, $B < C$, o las desigualdades

$A \leqslant B$, $B < C$, o bien las desigualdades $A < B$, $B \leqslant C$, entonces, de acuerdo con la propiedad de transitividad de las desigualdades, será válida también la desigualdad de partida.

Demostremos, empleando este método, la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$$

en el conjunto $M = \{(n) \mid n \in N\}$.

Para $n=1$ la desigualdad es evidente. Examinemos ahora cualquier número natural $n \geqslant 2$. Todo sumando de la suma, comenzando por el segundo, lo sustituimos por otro mayor: $\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}< <\frac{1}{k(k-1)}$, donde $2 \leqslant k \leqslant n$. De este modo tenemos la desigualdad válida $A_n < B_n$, donde $A_n=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ y $B_n= =\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}$. Cabe notar que la desigualdad $A_n < B_n$ es rigurosa, cualquiera que sea $n \geqslant 2$.

La expresión algebraica $B_n$ se puede simplificar si cada sumando, a partir del segundo, se sustituye por la suma algebraica $\frac{1}{k(k-1)}= = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Obtendremos

$$B_n=\frac{1}{1^2}+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+ +\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}.$$

Es fácil observar que la desigualdad $B_n < 2$ se verifica para cualquier $n$ natural. Por consiguiente, de acuerdo con la propiedad de transitividad de las desigualdades, tenemos $A_n < 2$, lo que se trataba de demostrar.

Demostremos en conclusión las propiedades de elevación a potencia natural de las expresiones algebraicas; estas propiedades son de amplio uso al resolver ecuaciones y desigualdades (véase el cap. III).

**Teorema 1.** *Supongamos que una región $M$ pertenece al CVA de dos expresiones algebraicas $A$ y $B$, y posee la siguiente propiedad: para cualquier colección numérica de la región $M$ los valores numéricos correspondientes de las expresiones $A$ y $B$ son positivos. Entonces, en la región $M$ para cualquier número natural $n$ ($n \geqslant 2$):*

a) *las igualdades $A = B$ y $A^n = B^n$ son equivalentes;*

b) *las desigualdades $A > B$ y $A^n > B^n$ son equivalentes.*

**Demostración.** Denotemos con $C$ la expresión algebraica $A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1}$. En el § 6 se demostrará la validez de la siguiente igualdad de las expresiones algebraicas:

$$A^n - B^n = (A - B)\, C. \qquad (15)$$

Es obvio que para cualquier colección numérica de la región $M$ el valor numérico correspondiente de la expresión $C$ es positivo.

Demostremos la afirmación a). Supongamos que $A = B$ en la región $M$. Entonces, en virtud de la afirmación 15, en la región $M$ se verifica la igualdad $A - B = 0$, y de aquí, según la afirmación 16, tendremos que en $M$ se verifica la igualdad $(A - B) C = 0$. De acuerdo con la propiedad de transitividad de las igualdades, de la última igualdad y de la (15) se deduce que $A^n - B^n = 0$, de donde se desprende, conforme a la afirmación 15, que en la región $M$ es válida la igualdad $A^n = B^n$.

Hemos demostrado pues, que en la región $M$ la validez de la igualdad $A = B$ predetermina la validez de la igualdad $A^n = B^n$.

Sea dado ahora que $A^n = B^n$ en la región $M$. Entonces, en la región $M$ se verifica, según la afirmación 15, la igualdad $A^n - B^n = 0$. De aquí y de la igualdad (15) en la región $M$ tenemos, en virtud de la propiedad de transitividad de las igualdades, $(A - B) C = 0$, de lo cual se deduce, según la afirmación 16, que $A - B = 0$, y, por fin, según la afirmación 15, resulta que $A = B$. Quiere decir, en la región $M$ la validez de la igualdad $A^n = B^n$ predetermina la validez de la igualdad $A = B$. La afirmación a) queda así demostrada.

Demostremos ahora la afirmación b). Sea dado que en la región $M$ tenemos $A > B$. Entonces, en virtud de la afirmación 20, en $M$ se verifica también la desigualdad $A - B > 0$, y de aquí, según la afirmación 21, obtenemos la validez de la desigualdad $(A - B) C > 0$. Tomando en consideración que la igualdad (15) se verifica, llegamos a que $A^n - B^n > 0$. Por fin, de acuerdo con la afirmación 20, resulta que en $M$ se verifica la desigualdad $A^n > B^n$.

Así pues, se ha demostrado que en la región $M$ de la validez de la desigualdad $A > B$, se desprende la validez de la desigualdad $A^n > B^n$.

Sea dado, ahora, que $A^n > B^n$ en la región $M$. Entonces, de acuerdo con la afirmación 20, en la región $M$ se verifica la desigualdad $A^n - B^n > 0$. De aquí y de la igualdad (15) resulta que $(A - B) C > 0$ en la región $M$. Al aplicar, ahora, la afirmación 21, encontramos que $A - B > 0$ en $M$. Por fin, conforme a la afirmación 20 tenemos en $M$ que $A > B$. Así pues, en la región $M$ se predetermina la validez de la desigualdad $A > B$, puesto que es válida la desigualdad $A^n > B^n$. La afirmación b) está demostrada y queda completamente demostrado el teorema.

## § 3. Polinomios

Una expresión racional en la que se prevén solamente dos operaciones respecto de las letras que lo integran, a saber, multiplicación y elevación a potencia natural, se llama *monomio*.

Los ejemplos de monomios son: $3a$, $2abc \frac{23ab}{7} abc$, $\frac{2ab}{3}$.

Una expresión racional se denominará *polinomio*, si es entera respecto de toda letra que figura en dicha expresión.

Por ejemplo, la expresión racional $\sqrt{35}\,abc-\frac{16ad}{7}+0{,}3dc$ es un polinomio, puesto que es entera respecto a las letras $a$, $b$, $c$ y $d$.

En particular, una expresión racional que contiene una sola letra y que es entera respecto de esta letra, se llama polinomio entero respecto de una letra.

De la definición de polinomio y de las reglas que rigen las operaciones sobre expresiones algebraicas se desprende que la suma, la diferencia y el producto de dos polinomios serán polinomios.

Si en un polinomio entran $n$ letras, éste tiene sentido para cualquier colección numérica de $n$ números. Es por eso que, al analizar un polinomio, no se habla, corrientemente, de su CVA. Por regla general, los monomios se transforman idénticamente conforme a las leyes de operaciones aducidas en el § 2, reuniendo juntos todos los números que integran el monomio y escribiéndolos ante las letras del monomio, y también, reuniendo juntas las letras iguales que integran el monomio y escribiéndolas en forma de una potencia natural de dicha letra. Realizada tal transformación, un monomio se considera escrito en la *forma estándar*, mientras que el factor numérico que precede a las letras del monomio se denomina *coeficiente* del monomio dado.

Por ejemplo, el monomio $3abc2cb\frac{3}{7}ac$ se reduce a la forma estándar $\frac{18}{7}a^2b^2c^2$, y el número $\frac{18}{7}$ es su coeficiente.

Según las reglas de operaciones sobre las expresiones algebraicas, todo polinomio siempre puede transformarse en una forma en la que el polinomio se componga de varios monomios escritos en la forma estándar y unidos entre sí mediante los signos de adición y de sustracción; por esta razón se dice habitualmente que un *polinomio es la suma algebraica de monomios*.

*Los términos semejantes* de un polinomio son sus monomios escritos en forma estándar y que se diferencian en nada más que los coeficientes. *Reducir los términos semejantes* de un polinomio significa sustituir la suma algebraica de los términos semejantes por un solo término idénticamente igual a dicha suma.

En virtud de las reglas de operaciones con las expresiones algebraicas, podemos concretar las leyes que rigen las operaciones sobre los polinomios del modo siguiente.

Para *adicionar* dos polinomios, se deben escribir todos los términos seguidos del primer polinomio y, luego, todos los términos del segundo polinomio, conservando para cada monomio el signo que está delante de su coeficiente, después de lo cual es necesario reducir los términos semejantes.

Por ejemplo: $(2cd+5a)+(x+7a-4cd)=2cd+5a+x+$ $+7a-4cd=12a+x-2cd$.

Para *sustraer* de un polinomio otro polinomio, se deben escribir todos los términos seguidos del primer polinomio, conservando inalterable el signo de cada monomio que está delante de su coeficiente, a continuación se escriben todos los términos del segundo polinomio, cambiando por opuestos todos los signos que están delante de los coeficientes de los monomios del segundo polinomio, después de lo cual es necesario reducir los términos semejantes.

Por ejemplo: $(x^2 - y^2) - (-7x^2 + 8y^2 - 5a) = x^2 - y^2 + 7x^2 - 8y^2 + 5a = 8x^2 - 9y^2 + 5a$.

Para *multiplicar un monomio por un polinomio*, se debe multiplicar dicho monomio por cada término del polinomio, escribir los términos seguidos del producto con aquellos signos que tenían los términos del polinomio, si delante del coeficiente del monomio está el signo más, y con los signos opuestos, si el coeficiente del monomio tiene el signo menos, a continuación se debe escribir en la forma estándar cada monomio del producto y reducir los términos semejantes.

Por ejemplo: $(-4ab)(3ab - 2 + 3a^2b^2) = -(4ab)(3ab) + (4ab)\cdot 2 - (4ab)(3a^2b^2) = -12a^2b^2 + 8ab - 12a^3b^3$; $5c(2ab + 1 - 3b) = (5c)(2ab) + (5c)\cdot 1 - (5c)(3b) = 10abc + 5c - 15bc$.

Para *multiplicar un polinomio por otro polinomio* se debe multiplicar cada monomio (junto con el signo que está delante de su coeficiente) del primer polinomio por el segundo polinomio, escribir todos los productos seguidos, escribir en la forma estándar cada monomio obtenido y, luego, reducir los términos semejantes.

Por ejemplo: $(ab - cd)\cdot(ab + cd) = (ab)(ab) + (ab)(cd) - (cd)(ab) - (cd)(cd) = a^2b^2 + abcd - abcd - c^2d^2 = a^2b^2 - c^2d^2$.

Haciendo uso de las reglas de adición y multiplicación de polinomios y de las propiedades que poseen las igualdades de expresiones algebraicas, obtendremos igualdades idénticas, las cuales se denominan a menudo *fórmulas de multiplicación reducida.*

Empecemos con la multiplicación de polinomios iguales del tipo $(a + b)$. Usando las leyes de las operaciones sobre expresiones algebraicas, podemos escribir la siguiente cadona de igualdades idénticas:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = (a)(a) + (a)(b) + (b)(a) + (b)(b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (1)$$

La fórmula (1) se enuncia del modo siguiente: *el cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primer número, más el producto duplicado del primer número por el segundo, más el cuadrado del segundo número.*

Ahora, haciendo uso de la fórmula citada, se puede escribir la siguiente cadena de igualdades idénticas:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = (a)(a^2) + (a)(2ab) + (a)(b^2) + (b)(a^2) + (b)(2ab) + (b)(b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (2)$$

La fórmula (2) se enuncia del modo siguiente: *el cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primer número, más el producto triplicado del cuadrado del primer número por el segundo, más el producto triplicado del primer número por el cuadrado del segundo y más el cubo del segundo número.*

Escribamos una cadena más de igualdades idénticas:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3 = (a+b)(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) =$$
$$= (a)(a^3) + (a)(3a^2b) + (a)(3ab^2) + (a)(b^3) + (b)(a^3) +$$
$$+ (b)(3a^2b) + (b)(3ab^2) + (b)(b^3) = a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 +$$
$$+ ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 = a^4 + 4a^3b +$$
$$+ 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Las fórmulas aducidas permiten observar cierta regularidad con ayuda de la cual podemos escribir la fórmula para $(a+b)^n$, donde $n$ es un número natural cualquiera. A saber, es fácil ver que habrá en total $(n+1)$ términos: el primer término es el primer número a la potencia $n$; en cada término subsiguiente la potencia del primer número será en una unidad menor que su potencia en el término antecedente, y en el último término la potencia del primer número es nula; el segundo número tiene en el primer término la potencia nula, en el segundo término, la primera potencia, en cada término subsiguiente la potencia del segundo número será en una unidad mayor que su potencia en el término antecedente, y en el último término el segundo número figura a la potencia $n$.

El coeficiente de cada término puede hallarse con ayuda del «triángulo de Pascal»:

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 1 |
| 2 | 1 2 1 |
| 3 | 1 3 3 1 |
| 4 | 1 4 6 4 1 |
| 5 | 1 5 10 10 5 1 |
| 6 | 1 6 15 20 15 6 1 |
| 7 | 1 7 21 35 35 21 7 1 |
| 8 | 1 8 28 56 70 56 28 8 1 |
| 9 | 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1 |
| | . . . . . . . . . . |

Es simple la regla conforme a la cual se forman las líneas del «triángulo de Pascal». Cada línea puede obtenerse de la línea supe-

rior anterior del modo siguiente. En el intervalo entre cualesquiera números vecinos de la línea superior (pero más abajo) se escribe la suma de éstos, y en los extremos se ponen las unidades. El número de la línea enseña a qué potencia se eleva el binomio $(a + b)$, mientras que los números de dicha línea son los coeficientes de los términos correspondientes escritos en el orden estudiado más arriba.

Por supuesto, si se necesita escribir la fórmula para $(a + b)^n$, donde $n$ es un número grande (100, por ejemplo), está claro que el cálculo de los coeficientes del segundo miembro con ayuda del triángulo de Pascal será engorroso, razón por la cual resulta deseable conocer otra fórmula para calcular $(a + b)^n$. Tal fórmula existe y lleva el nombre de *binomio de Newton*, teniendo por expresión

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots$$
$$\dots + C_n^n b^n, \quad (3)$$

donde $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $0! = 1$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ para cualquier $k \in \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

La demostración de la igualdad (3) se realizará en el § 6.

Apliquemos la fórmula del binomio de Newton para calcular, por ejemplo, $(a + b)^5$:

$$(a + b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 a b^4 + C_5^5 b^5.$$

Calculemos los coeficientes $C_5^m$, donde $m \in \{0, 1, 2\}$. Para el cálculo de los coeficientes restantes hagamos uso de la igualdad

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{[n-(n-m)]!\,(n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \text{ para } 0 \leqslant m \leqslant n,$$

demostrada en el cap. I.

De este modo,

$$C_5^0 = C_5^5 = 1, \quad C_5^1 = C_5^4 = \frac{5!}{1!\,4!} = 5, \quad C_5^2 = C_5^3 = \frac{5!}{2!\,3!} = 10.$$

Por consiguiente

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

De la fórmula para el binomio de Newton se deduce fácilmente la fórmula para $(a - b)^n$. Denotemos $d = -b$ y apliquemos la fórmula del binomio de Newton:

$$(a - b)^n = (a + d)^n = C_1^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} d + \dots$$
$$\dots + C_n^k a^{n-k} d^k + \dots + C_n^n d^n.$$

Sustituyendo $(-b)$ en lugar de $d$, obtenemos

$$(a - b)^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + \dots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \dots$$
$$\dots + (-1)^n C_n^n b^n.$$

Los casos particulares de esta fórmula para $n = 2$ y $n = 3$ son:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

La fórmula para el binomio de Newton $(a + b)^n$ y la que se deduce de ella, $(a - b)^n$, son *fórmulas de multiplicación reducida*, en las cuales el producto de polinomios iguales (binomios) se toma $n$ veces.

Demostremos ahora algunas fórmulas en las cuales se toma el producto de diferentes polinomios. Es evidente la siguiente cadena de igualdades idénticas:

$$(a - b)(a + b) = (a)(a) + (a)(b) - (b)(a) - (b)(b) =$$
$$= a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Esta fórmula se recuerda, habitualmente, en una escritura, donde se cambian de lugar los miembros segundo y primero: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. He aquí su enunciación verbal: *la diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto de la diferencia de estos números por la suma de los mismos.*

Deduzcamos la fórmula para la diferencia entre los cubos de dos números $(a^3 - b^3)$. Por cuanto

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a)(a^2) + (a)(ab) + (a)(b^2) -$$
$$- (b)(a^2) - (b)(ab) - (b)(b^2) = a^3 + a^2b + ab^2$$
$$- a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3,$$

entonces

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Aduzcamos la enunciación verbal de esta fórmula: *la diferencia entre los cubos de dos números es igual al producto de la diferencia de estos números por el cuadrado incompleto de la suma de estos números.*

Las fórmulas mencionadas permiten ver una regularidad con ayuda de la cual resulta fácil escribir la fórmula $a^n - b^n$ para cualquier número natural $n$. Esta fórmula tiene por expresión

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

La demostración de esta fórmula se dará en el § 6 por el método de inducción matemática.

Por fin, deduzcamos la siguiente fórmula:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

En efecto,

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$$
$$= (a)(a^2) - (a)(ab) + (a)(b^2) + (b)(a^2) - (b)(ab) + (b)(b^2) =$$
$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

La enunciación verbal de esta fórmula es la siguiente: *la suma de los cubos de dos números es igual al producto de la suma de los mismos por el cuadrado imperfecto de la diferencia entre ellos.*

Demos a conocer algunas fórmulas que han de recordarse:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Las fórmulas, demostradas en este párrafo, son válidas para cualesquiera valores numéricos de la letras $a$ y $b$. A veces dichas fórmulas se emplean en los casos en que con las letras $a$ y $b$ se han designado ciertas expresiones algebraicas, mas en estos casos las fórmulas serán válidas ya en el CVA de dos expresiones algebraicas $a$ y $b$.

En una serie de problemas, al operar con polinomios, resulta más cómodo examinarlos no en la forma estándar, sino en forma de un producto.

La transformación idéntica de un polinomio en la forma de un producto de polinomios se llama *descomposición del polinomio en factores*. Hablando en general, todas las fórmulas de multiplicación reducida son precisamente fórmulas que rigen la descomposición del polinomio en factores.

Además de la aplicación de las fórmulas de multiplicacón reducida existen también otros procedimientos para descomponer los polinomios en factores, por ejemplo, la *agrupación* o procedimiento consistente *en sacar el factor común del paréntesis.* Para descomponer un polinomio en factores son útiles todos los procedimientos.

Analicemos un ejemplo de descomposición de un polinomio en factores. Agrupando, sacando el factor común del paréntesis y empleando la fórmula de multiplicación reducida, obtenemos una cadena de igualdades idénticas:

$$a^2c + 2abc + b^2c + (a + b)^2 d = c(a^2 + 2ab + b^2) + d(a + b)^2 =$$
$$= c(a + b)^2 + d(a + b)^2 = (a + b)^2 (c + d).$$

## § 4. Fracciones algebraicas

Se llama *fracción algebraica* una expresión racional fraccional que es el cociente de la división de un polinomio por otro.

La fracción algebraica que representa el cociente de la división del polinomio $A$ por otro polinomio $B$ se escribe, corrientemente,

en la forma $\frac{A}{B}$, con la particularidad de que el polinomio $A$ se denomina *numerador* de la fracción algebraica, y el polinomio $B$, *denominador* de la misma.

Los ejemplos de fracciones algebraicas son:

$$\frac{3a+b}{a^3+1}; \quad \frac{ab-b}{d+a}; \quad \frac{a^2+b^2}{a-b}; \quad \frac{xy+6y}{7x+8y}.$$

El CVA de una fracción algebraica $\frac{A}{B}$, en la que figuran $n$ letras, es un conjunto de todas las colecciones numéricas correspondientes a la colección literal de la fracción $\frac{A}{B}$, a excepción de aquellas, para cada una de los cuales el valor numérico correspondiente del polinomio $B$ es igual a cero.

Por ejemplo, el CVA de la fracción algebraica $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ es el conjunto $\{(a, b) \mid a \in R;\ b \in R;\ a \neq b\}$.

Demostremos algunas **afirmaciones** sobre la igualdad de las fracciones algebraicas.

1. *Si se designa la fracción algebraica* $\frac{A}{B}$ *con una sola letra* $C$, *en el CVA de dicha fracción son equivalentes las igualdades idénticas* $C = \frac{A}{B}$ *y* $A = CB$.

La validez de esta propiedad se desprende de la de la afirmación 14 del § 2.

2. *Las igualdades* $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ *y* $AD = BC$ *son equivalentes en el CVA de la primera de ellas.*

Esta propiedad se enuncia a menudo del modo siguiente: *dos fracciones* $\frac{A}{B}$ *y* $\frac{C}{D}$ *son idénticamente iguales en el CVA, si, y sólo si, en dicho CVA se verifica la igualdad* $AD = BC$.

**Demostración.** Sea la región $M$ el CVA de dos fracciones $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$. Examinemos el caso en que $A=0$ en $M$. Entonces, $\frac{A}{B}=0$, y de la igualdad $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ se deduce que también $\frac{C}{D}=0$ en $M$. Por eso, $C = 0$ en $M$, y esto significa que $AD = BC$ en $M$.

Al contrario, sea $AD = BC$ y $A = 0$ en $M$. Por cuanto $D \neq 0$ y $B \neq 0$ en $M$, entonces $C = 0$ en $M$. Por consiguiente, $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Examinemos ahora el caso en que no existe ninguna colección de la región $M$, para la cual el polinomio $A$ no se reduce a cero, es decir, el caso en que $A \neq 0$ en $M$. Sea $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, entonces de aquí se desprende que $C \neq 0$ en $M$. Designemos con $\alpha$ la fracción $\frac{A}{B}$,

y con $\beta$, $\frac{C}{D}$. Según la propiedad 1 de las fracciones algebraicas, $A = \alpha B$ y $C = \beta D$. De acuerdo con la afirmación 14 del § 2, tenemos

$$A\beta D = C\alpha B. \qquad (1)$$

Por cuanto $\alpha = \beta \neq 0$ en $M$, resulta que, conforme a la afirmación 14 del § 2, de (1) se deriva que $AD = CB$.

Al contrario, sea $AD = BC$, entonces, por cuanto $A \neq 0$, $D \neq 0$ y $B \neq 0$ en $M$, tendremos $C \neq 0$ en $M$. Por lo tanto, $\alpha = \frac{A}{B}$ y $\beta = \frac{C}{D}$ no son iguales a cero en $M$. Multipliquemos la igualdad dada $AD = BC$ por $\alpha\beta$. Obtendremos una igualdad equivalente

$$\alpha\beta AD = \alpha\beta BC. \qquad (2)$$

Pero $\alpha B = A$, $\beta D = C$, y la igualdad (2) adquiere la forma

$$\alpha AC = \beta AC. \qquad (3)$$

Haciendo uso de la afirmación 14 del § 2, llegamos a que $\alpha = \beta$, lo que se trataba de demostrar.

De este modo queda demostrada la propiedad 2 de las fracciones algebraicas.

3. *En el CVA de la fracción algebraica* $\frac{A}{B}$ *se verifican las igualdades idénticas* $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{A}{-B} = -\frac{-A}{B}$.

Cada una de estas igualdades se hace evidente, si hacemos uso de la propiedad 2 que acabamos de demostrar.

4. *Para cualquier polinomio $K$, que no se reduce a cero en el CVA de la fracción algebraica* $\frac{A}{B}$, *se verifica la igualdad idéntica* $\frac{A}{B} = \frac{AK}{BK}$.

Por cuanto en el CVA de la fracción $\frac{A}{B}$ esta igualdad es equivalente, conforme a la propiedad 2, a la igualdad $A\,(BK) = B\,(AK)$, la cual es obvia, entonces será evidente también la validez de la propiedad 4.

5. *En el CVA de la fracción algebraica* $\frac{A}{B}$ *se verifica la igualdad idéntica* $\frac{A}{B} = A \cdot \frac{1}{B}$.

En efecto, de acuerdo con la afirmación 9 del § 2 tenemos

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{B}\left(B \cdot \frac{1}{B}\right)$$

Tomando en consideración la asociatividad de la multiplicación de expresiones algebraicas, tenemos

$$\frac{A}{B}\left(B \cdot \frac{1}{B}\right) = \left(\frac{A}{B} \cdot B\right) \cdot \frac{1}{B}.$$

Aplicando la afirmación 11 del § 2, llegamos a que

$$\frac{A}{B}=A\cdot\frac{1}{B}.$$

6. *En el CVA de la fracción algebraica* $\frac{1}{AB}$ *se verifica la igualdad idéntica* $\frac{1}{AB}=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}$.

En efecto, en el CVA de la fracción $\frac{1}{AB}$ es evidente la validez de la cadena de igualdades idénticas

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{AB}\left(B\cdot\frac{1}{B}\right)\left(A\cdot\frac{1}{A}\right)=\left(\frac{1}{AB}\cdot AB\right)\left(\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}\right)=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{B}.$$

7. *En el CVA de dos fracciones algebraicas* $\frac{A}{B}$ *y* $\frac{B}{1}$ *se verifica la igualdad idéntica* $\frac{A}{B}=\frac{1}{\frac{B}{A}}$.

Efectivamente, al aplicar primeramente la propiedad 5 de las fracciones y, luego, las propiedades de las operaciones sobre expresiones algebraicas y, por fin, las propiedades 6 y 5 de las fracciones, tenemos una cadena de igualdades idénticas

$$\frac{A}{B}=A\cdot\frac{1}{B}=A\cdot\frac{1}{B}\cdot\left(\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\frac{1}{A}}\right)=\left(A\cdot\frac{1}{A}\right)\left(\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{\frac{1}{A}}\right)=\frac{1}{B\cdot\frac{1}{A}}=\frac{1}{\frac{B}{A}}.$$

Recordemos el siguiente convenio: si no se indica explícitamente la región $M$, en la que se estudia cierta igualdad idéntica, entonces ésta se examina en el CVA de dos expresiones que figuran en los miembros primero y segundo de la igualdad. Por ello, en adelante no se indicará explícitamente la región en la cual se verificará una igualdad idéntica, tomando en consideración que ésta es válida en el CVA de dos expresiones que figuran en los miembros primero y segundo de la igualdad.

Haciendo uso de las propiedades de adición y multiplicación de las expresiones algebraicas y de las propiedades de fracciones algebraicas, resulta fácil mostrar que se verifican las siguientes igualdades idénticas:

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}; \quad \frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}.$$

Efectivamente, aprovechando la propiedad de las fracciones algebraicas, obtenemos

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}+\frac{CB}{DB}=AD\cdot\frac{1}{BD}+CB\cdot\frac{1}{BD}.$$

Al aplicar ahora las propiedades de adición y multiplicación de las expresiones algebraicas y, luego, otra vez, las de las fracciones

algebraicas, tenemos:

$$AD\cdot\frac{1}{BD}+CB\cdot\frac{1}{BD}=(AD+CB)\frac{1}{BD}=\frac{AD+CB}{BD},$$

lo que se trataba de demostrar.

De modo análogo se demuestra la segunda igualdad:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\left(A\cdot\frac{1}{B}\right)\left(C\cdot\frac{1}{D}\right)=AC\cdot\frac{1}{B}\cdot\frac{1}{D}=AC\cdot\frac{1}{BD}=\frac{AC}{BD}.$$

De la misma manera se demuestran también las igualdades:

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{AD-BC}{BD}; \quad \frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{AD}{BC}.$$

A menudo se requiere reducir a un *denominador común* las fracciones algebraicas, es decir, escribirlas de un modo tal, que todas estas fracciones tengan un mismo denominador. Para esto existe el procedimiento siguiente: es menester descomponer cada denominador en factores y, a continuación, multiplicar el numerador y el denominador de cada fracción por el producto de aquellos factores de los denominadores de las fracciones restantes que no figuran en el denominador dado, lo que no los hará variar, según la propiedad de las fracciones.

**Ejemplo.** Redúzcanse a un denominador común las siguientes fracciones algebraicas:

$$\frac{a}{a^3-b^3}; \quad \frac{c}{a^2-b^2}; \quad \frac{d}{a^2+ab+b^2}.$$

Descomponiendo los denominadores en factores, escribamos las fracciones en la forma:

$$\frac{a}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}; \quad \frac{c}{(a-b)(a+b)}; \quad \frac{d}{a^2+ab+b^2}.$$

Ahora, al multiplicar el numerador y el denominador de la primera fracción por $(a+b)$, el de la segunda por $(a^2+ab+b^2)$ y el de la tercera, por $(a-b)(a+b)$, obtenemos

$$\frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)}; \quad \frac{c(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)};$$

$$\frac{d(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)}.$$

Dichas fracciones tienen denominadores iguales, es decir, las fracciones originales se han reducido a un denominador común.

En una serie de casos se necesita representar una fracción en forma de una suma de fracciones con denominadores más simples. Esto puede realizarse sólo en el caso cuando el polinomio en el denominador de la fracción se descompone en un producto de polinomios de grado menor. Mostremos con un ejemplo cómo se hace esto.

Supongamos que es necesario descomponer la fracción algebraica $\frac{1}{x^2-1}$ en fracciones simples. Por cuanto el polinomio $x^2-1$ se descompone en el producto de polinomios $(x-1)$ y $(x+1)$, la tarea es realizable. Con este fin se deben encontrar las fracciones algebraicas $\frac{A}{x-1}$ y $\frac{B}{x+1}$ tales, que se verifique la igualdad idéntica $\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$. Examinemos la suma $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$. De acuerdo con las reglas recién enunciadas, tenemos

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-B)}{(x-1)(x+1)}.$$

Por cuanto esta fracción debe ser idénticamente igual a la fracción $\frac{1}{x^2-1}$ (indiquemos que estos razonamientos se realizan para $x$ cualquiera, salvo $x=1$ y $x=-1$), entonces, según la propiedad 2, las dos fracciones citadas son iguales sólo en el caso en que $[(A+B)x-(A-B)](x-1)(x+1)=(x-1)(x+1)$. Como esta igualdad ha de verificarse para cualquiera $x$, a excepción de $x=1$ y $x=-1$, entonces, suponiendo, por ejemplo, $x=0$, y, luego, $x=2$, llegamos a que esto se satisface sólo cuando $A-B=1$ y $3A+B=1$ simultáneamente. Mientras tanto las últimas dos igualdades se verifican simultáneamente sólo en el caso en que $A=\frac{1}{2}$ y $B=-\frac{1}{2}$. Quiere decir, la fracción dada se ha descompuesto en fracciones simples, a saber, es válida la siguiente igualdad idéntica:

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}.$$

Este método de descomposición de una fracción en la suma de fracciones más simples lleva el nombre de *método de coeficientes indeterminados*. Efectivamente, suponiendo desconocidos al principio los números $A$ y $B$, obtenemos en el CVA la igualdad de dos polinomios, uno de los cuales tiene coeficientes conocidos, y el otro, desconocidos, expresados a través de $A$ y $B$. Esto nos presta la oportunidad de escribir igualdades algebraicas respecto de los coeficientes desconocidos (en el caso dado, $A-B=1$, $3A+B=1$). Hallando los valores numéricos de los coeficientes desconocidos que reducen las igualdades algebraicas dadas en ciertas igualdades numéricas, resolvemos, de este modo, el problema planteado sobre la representación de una fracción en forma de la suma de fracciones más simples.

**Desigualdades de las fracciones algebraicas.** Demostremos dos afirmaciones que son de amplio uso al analizar fracciones algebraicas.

8. *En el CVA de la fracción algebraica* $\frac{A}{B}$ *son equivalentes las siguientes desigualdades:* $\frac{A}{B}>0$, *y* $AB>0$.

Demostremos que de la validez de la primera desigualdad se desprende la validez de la segunda.

**Demostración.** Designemos con la letra $C$ la fracción algebraica $\frac{A}{B}$, es decir, $C = \frac{1}{B}$. En el CVA de la fracción algebraica dada la expresión algebraica $C$ es positiva, pues cualquier valor numérico de la expresión algebraica $C$ es un número positivo. De acuerdo con la propiedad 1 de las igualdades entre expresiones algebraicas, tenemos: en el CVA de la fracción dada $A = CB$. Por consiguiente, la expresión algebraica $AB$ es igual a $CB^2 : AB = CB^2$. Por definición, en el CVA de la fracción $\frac{A}{B}$ la expresión algebraica $B$ no se reduce a cero, es decir, la expresión algebraica $B^2$ es positiva en el CVA de la fracción $\frac{A}{B}$. El producto de las expresiones algebraicas positivas $C$ y $B^2$ será también positivo. De modo análogo se demuestra que en el CVA de la fracción algebraica $\frac{A}{B}$ de la validez de la desigualdad $AB > 0$ sigue la validez de la desigualdad $\frac{A}{B} > 0$.

9. *En el CVA de las fracciones algebraicas $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ son equivalentes las desigualdades: $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ y $AD^2B > CB^2D$.*

**Demostración.** Valiéndonos de la afirmación 20, obtendremos las desigualdades equivalentes: $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ y $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} > 0$.

Anteriormente ha sido demostrada la igualdad

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{AD - BC}{BD},$$

la cual permite realizar un paso equivalente más:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D} \Leftrightarrow \frac{AD - BC}{BD} > 0.$$

De acuerdo con la afirmación 8, la última desigualdad es equivalente en el CVA de las fracciones algebraicas $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ a la desigualdad $(AD - BC)\,BD > 0$, que es equivalente a la desigualdad $AD^2B > CB^2D$. La afirmación 9 queda completamente demostrada.

Las afirmaciones 8 y 9 se emplean también para demostrar otras desigualdades.

Por ejemplo, demostremos que las desigualdades $\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b}$ y $a > b$ son equivalentes para cualesquiera números positivos $a$ y $b$ que no son iguales uno al otro.

En efecto, de acuerdo con la afirmación 9, son equivalentes las

siguientes desigualdades:

$$\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b} \text{ y } (a^2-b^2)[(a+b)^2-(a-b)^2] > 0.$$

Por cuanto $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$, la última desigualdad es equivalente a la desigualdad $(a-b)(a+b)4ab > 0$, la cual, es equivalente, en virtud de que son positivos $a$ y $b$, a la desigualdad $a > b$. Por consiguiente, $\frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow a > b$ para cualesquiera $a$ y $b$ positivos no iguales.

## § 5. Polinomios enteros respecto de una letra

Un polinomio, entero respecto de una letra $x$, tiene monomios de diferentes grados, pues en el caso contrario se pueden reducir los términos semejantes. Los monomios de diferentes grados pueden ordenarse con relación al crecimiento o decrecimiento de las potencias de la letra $x$. Por regla general, un polinomio entero respecto de una letra se escribe en el orden de decrecimiento de las potencias.

Un polinomio escrito en la forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots$ $\ldots + a_{n-1}x + a_n$ se denomina *polinomio ordenado*. Si $a_0 \neq 0$, suele decirse que dicho polinomio es de grado $n$.

Al desconocer, si es nulo o no el coeficiente de $a_0$, se dice que el polinomio es de grado no superior a $n$.

De esta definición se desprende, en particular, que los polinomios de grado nulo son números distintos de cero. El número cero también se considera un polinomio, con la particularidad de que es el único polinomio cuyo grado no está determinado. Para la designación abreviada de los polinomios se usan, de ordinario, las siguientes notaciones:

$$P(x), \quad Q(x), \quad T(x), \quad R(x), \quad p(x), \quad q(x), \quad r(x),$$

y, si hace falta subrayar que $P(x)$ es un polinomio de grado $n$, se escribe $P_n(x)$.

Para encontrar la *suma* de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ se deben escribir todos los términos seguidos de estos dos polinomios y luego realizar la reducción de los términos semejantes.

Para encontrar el *producto* de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ es necesario multiplicar cada monomio del polinomio $P_n(x)$ por cada monomio del polinomio $Q_m(x)$, sumar los productos obtenidos y reducir los términos semejantes.

**Teorema 1.** *Dos polinomios, enteros respecto de $x$, son idénticamente iguales, si, y sólo si, son iguales sus grados y los coeficientes que tienen las potencias iguales de $x$.*

En esta obra se omite la demostración de este teorema.

En el parágrafo presente, para denotar la igualdad idéntica entre

dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se empleará la notación $P(x) = Q(x)$, es decir, el signo «=» que liga dos polinomios se entenderá en el sentido de igualdad idéntica de estos polinomios. En particular, la notación $P(x) = 0$ significará que el polinomio $P(x)$ es idénticamente igual a cero, es decir, es el número cero.

El teorema 1 puede ser aplicado para descomponer un polinomio en factores. Hagamos uso del método de coeficientes indeterminados. La esencia de la aplicación de este método consiste en lo siguiente.

Sea dado un polinomio $P_n(x)$ de grado $n$ y se necesita representarlo en forma de un producto de polinomios de grados $k$ y $(n - k)$, donde $k < n$. Entonces se escriben dos polinomios $P_k(x)$ y $P_{n-k}(x)$, el primero de grado $k$ y el segundo, de grado $(n - k)$, con los coeficientes designados con ciertas letras, digamos, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ para el primer polinomio, y $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$, en el segundo. Al multiplicar los polinomios $P_k(x)$ y $P_{n-k}(x)$, obtenemos el polinomio $T_n(x)$ de grado $n$ cuyos coeficientes dependen de $\alpha_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ y $\beta_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n - k)$. Partiendo de la condición de que los polinomios $P_n(x)$ y $T_n(x)$ son idénticamente iguales, obtenemos $n + 1$ igualdades, en las cuales participan $n + 2$ coeficientes $\alpha_i$ y $\beta_j$ que han de ser determinados. Suponiendo, por ejemplo, que $\alpha_0 = 1$, llegamos a $n + 1$ igualdades, de las cuales se deben hallar $n + 1$ coeficientes $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ y $\beta_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n - k)$. Al determinarlos, hallaremos también los polinomios $P_k(x)$ y $P_{n-k}(x)$

**Ejemplo.** Descompóngase el polinomio $x^3 + 3x + 4$ en factores, entre los cuales uno sea un polinomio de primer grado y el segundo, un polinomio de segundo grado. Buscaremos los polinomios $(x + \alpha_1)$ y $(\beta_0 x^2 + \beta_1 x + \beta_2)$ tales que se verifique la igualdad idéntica $(x + \alpha_1)(\beta_0 x^2 + \beta_1 x + \beta_2) = x^3 + 3x + 4$. Al aplicar el teorema 1, obtenemos 4 igualdades: $\beta_0 = 1$, $\beta_0\alpha_1 + \beta_1 = 0$, $\beta_1\alpha_1 + \beta_2 = 3$, $\alpha_1\beta_2 = 4$. A estas igualdades les satisfacen $\beta_0 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 4$. Quiere decir, el polinomio $x^3 + 3x + 4$ se descompone en los factores $(x + 1)$ y $(x^2 - x + 4)$, es decir,

$$x^3 + 3x + 4 = (x + 1)(x^2 - x + 4).$$

Observemos que no todo polinomio puede descomponerse en factores. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + x - 1$ no puede ser descompuesto en un producto de dos polinomios de primer grado.

**Teorema 2.** *Si el producto de dos polinomios es idénticamente igual a cero, por lo menos uno de dichos polinomios será idénticamente igual a cero.*

Se omite la demostración de esta afirmación.

*Sustraer* de un polinomio $P(x)$ otro polinomio $T(x)$ significa hallar un polinomio $Q(x)$ tal que $P(x) = T(x) + Q(x)$.

No es difícil comprobar que para cualesquiera dos polinomios $P(x)$ y $T(x)$ semejante polinomio $Q(x)$ existe y es único. Se llama *diferencia de los polinomios* $P(x)$ y $T(x)$ y se designa $Q(x) = P(x) - T(x)$.

*Dividir exactamente* el polinomio $P(x)$ por el polinomio $T(x)$, distinto de cero, significa hallar un polinomio $Q(x)$ tal que se verifique $P(x) = T(x)\,Q(x)$.

Si tal polinomio $Q(x)$ existe, se dice que el polinomio $T(x)$ es el divisor del polinomio $P(x)$, y el polinomio $Q(x)$ se llama cociente de la división del polinomio $P(x)$ por el $T(x)$. El polinomio $P(x)$ no siempre se divide exactamente por el polinomio $T(x)$. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 1$ no es divisible por el polinomio $x + 1$ exactamente. Quiere decir, en el conjunto de polinomios la división exacta no siempre es realizable. Sin embargo, como se demostrará a continuación, en el conjunto de polinomios es siempre realizable la división entera (inexacta).

**División entera (inexacta).** *Dividir enteramente* (con resto) un polinomio $P(x)$ por otro polinomio $T(x)$, distinto de cero, significa hallar dos polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que se verifique

$$P(x) = T(x)\,q(x) + r(x), \tag{1}$$

con la particularidad de que o bien el grado del polinomio $r(x)$ es estrictamente menor que el grado del polinomio $T(x)$, o bien $r(x)$ es cero.

Cuando se verifica la igualdad (1), se dice que el polinomio $P(x)$ se divide por el polinomio $T(x)$ con resto $r(x)$ y cociente $q(x)$; si $r(x) = 0$, es decir, si el resto es el número cero, se dice que el polinomio $P(x)$ se divide por el polinomio $T(x)$ con resto nulo, o el polinomio $P(x)$ se divide exactamente por el polinomio $T(x)$.

**Ejemplo.** Sea $(P\,x) = x^7 - x^6 + 2x^5 + x^2$, $T(x) = x^2 - x + 2$. En este caso se ve con facilidad que $P(x) = T(x)(x^5 + 1) + x - 2$, es decir, el polinomio $P(x)$ se divide por el $T(x)$ con resto $r(x) = x - 2$ y cociente $x^5 + 1$. Indiquemos que de la igualdad $P(x) = T(x)\,x^5 + x^2$ no se deduce que el polinomio $P(x)$ se divide por $T(x)$ con resto $x^2$, pues está perturbada la condición de que la potencia del resto $r(x)$ ha de ser estrictamente inferior al grado del polinomio $T(x)$.

**Teorema 3.** *Para cualesquiera dos polinomios $P(x)$ y $T(x)$, donde $T(x) \neq 0$, existe un par de polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales, que $P(x) = T(x)\,q(x) + r(x)$, con la particularidad de que o bien el grado del polinomio $r(x)$ es estrictamente inferior al grado del polinomio $T(x)$, o bien $r(x)$ es el número cero.*

**Demostración.** Supongamos que $P(x) = 0$ y $T(x)$ es un polinomio cualquiera distinto de cero; entonces los polinomios $q(x) = 0$ y $r(x) = 0$ satisfacen las condiciones del teorema.

Sea $P(x) \neq 0$ y supongamos que el polinomio $T(x)$ es de grado superior al del polinomio $P(x)$, entonces los polinomios $q(x) = 0$ y $r(x) = P(x)$ satisfacen las condiciones del teorema.

Por fin, sea $P(x) \neq 0$ y supongamos que el polinomio $T(x)$ es de grado inferior o igual al del polinomio $P(x)$. Si $T(x) = c$, donde $c$ es una constante distinta de cero, entonces los polinomios $q(x) = P(x)/c$ y $r(x) = 0$ satisfacen las condiciones del teorema.

Queda analizar el caso en que el polinomio $P(x)$ es de grado $n$, siendo $n \geqslant 1$, y el polinomio $T(x)$ es de grado $m$, siendo $0 < m \leqslant n$. Sea $P(x) = P_n(x)$, $T(x) = T_m(x)$, donde $0 < m \leqslant n$, $n \geqslant 1$, es decir,

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} \quad \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$T_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} \quad \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

donde $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Construyamos una sucesión de polinomios $Q_{n_k}(x)$ del modo siguiente. Hagamos

$$Q_{n_1}(x) = P_n(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} T_m(x).$$

Entonces, o bien $Q_{n_k}(x) = 0$, o bien $Q_{n_k}(x)$ puede escribirse en la forma

$$Q_{n_1}(x) = a_0^{(1)}x^{n_1} + a_1^{(1)}x^{n_1-1} + \ldots + a_{n_1-1}^{(1)}x + a_{n_1}^{(1)},$$

con la particularidad de que $a_0^{(1)} \neq 0$ y el grado del polinomio $Q_{n_k}(x)$ es menor que $n$, es decir, $n_1 < n$; si resulta que $n_1 < m$, o $Q_{n_k}(x) = 0$, entonces los polinomios $q(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$ y $r(x) = Q_{n_k}(x)$ satisfacen las condiciones del teorema; en cambio, si $n_1 \geqslant m$, realizamos el paso siguiente: hagamos

$$Q_{n_2}(x) = Q_{n_1}(x) - \frac{a_0^{(1)}}{b_0} x^{n_1-m} T_m(x).$$

Está claro que o bien $Q_{n_2}(x) = 0$, o bien $n_2 < n_1 < n$, y $Q_{n_2}(x)$ puede escribirse en la forma

$$Q_{n_2}(x) = a_0^{(2)}x^{n_2} + a_1^{(2)}x^{n_2-1} + \ldots + a_{n_2-1}^{(2)}x + a_{n_2}^{(2)},$$

con la particularidad de que $a_0^{(2)} \neq 0$. Si resulta que $n_2 < m$, o $Q_{n_2}(x) = 0$, entonces los polinomios $q(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} + \frac{a_0^{(1)}}{b_0} x^{n_1-m}$ y $r(x) = Q_{n_2}(x)$ satisfacen las condiciones del teorema; si, en cambio, $n_2 \geqslant m$, realizamos el paso siguiente y continuamos este proceso. Por cuanto en cada paso la potencia va disminuyendo: $n > n_1 > n_2 \ldots$, entonces en cierto k-ésimo paso el número natural $n_k$ se hará inferior al número natural $m$, o $Q_{n_k}(x) = 0$, y el proceso se dará por terminado. Obtendremos como resultado:

$$P_n(x) = \left( \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} + \frac{a_0^{(1)}}{b_0} x^{n_1-m} + \ldots + \frac{a_0^{(k-1)}}{b_0} x^{n_{k-1}-m} \right) \times$$
$$\times T_m(x) + Q_{n_k}(x).$$

Entonces, los polinomios $r(x) = Q_{n_k}(x)$ y $q(x) = \left( \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} + \frac{a_0^{(1)}}{b_0} \times \right.$ $\left. \times x^{n_1-m} + \ldots + \frac{a_0^{(k-1)}}{b_0} x^{n_{k-1}-m} \right)$ satisfacen las condiciones del teorema.

Así pues, la afirmación del teorema acerca de la existencia de los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ queda demostrada.

**Teorema 4.** *Un par de polinomios $q(x)$, $r(x)$ que satisface las condiciones del teorema 3 es único.*

**Demostración.** Supongamos lo contrario, es decir, que existen dos pares de polinomios $q(x)$, $r(x)$ y $q_1(x)$, $r_1(x)$ tales, que $P(x) = T(x)q(x) + r(x)$ y $P(x) = T(x)q_1(x) + r_1(x)$. Haciendo uso de la definición de igualdad de los polinomios, tenemos

$$T(x)[q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x). \qquad (2)$$

Son posibles dos casos: ó $r_1(x) - r(x) = 0$, ó $r_1(x) - r(x) \neq 0$. En el primer caso, ya que $T(x) \neq 0$, entonces $q(x) - q_1(x) = 0$, y la unicidad tiene lugar.

En el segundo caso, por cuanto la potencia de $r_1(x) - r(x)$ no es mayor que la de $r_1(x)$ y de $r(x)$, entonces la potencia de $r_1(x) - r(x)$ es inferior al grado del polinomio $T(x)$. Al mismo tiempo el grado del polinomio $T(x)[q(x) - q_1(x)]$ o bien es superior o bien igual al del polinomio $T(x)$. Quiere decir, en la igualdad (2) los polinomios que figuran en los miembros primero y segundo tienen grados diferentes lo que contradice el teorema 1. La contradicción obtenida significa que $r_1(x) - r(x) = 0$, y la unicidad en este caso ya está demostrada. Al unir los teoremas 3 y 4, obtenemos el siguiente teorema válido.

**Teorema 5.** *Para cualesquiera dos polinomios $P(x)$ y $T(x)$, donde $T(x) \neq 0$, existe un par de polinomios (y este par es único) $q(x)$ y $r(x)$ tales, que $P(x) = T(x)q(x) + r(x)$, con la particularidad de que o bien el grado del polinomio $r(x)$ es estrictamente inferior al grado del polinomio $T(x)$, o bien $r(x)$ es el número cero.*

Para determinar los coeficientes de los polinomios $q(x)$ y $r(x)$ existen varios métodos. El de mayor uso es el método de coeficientes indeterminados, ya estudiado anteriormente.

Sean dados los polinomios $P_n(x)$ y $T_m(x)$, donde $n > m$. Hagamos

$$q(x) = c_0x^{n-m} + c_1x^{n-m-1} + \ldots + c_{n-m},$$

$$r(x) = d_0x^{m-1} + d_1x^{m-2} + \ldots + d_{m-1},$$

donde los coeficientes $c_i$ y $d_j$ no están por ahora determinados (observemos que en total hay $n + 1$ coeficientes y $c_0 \neq 0$). Exijamos que se verifique la igualdad

$$P_n(x) = T_m(x)q(x) + r(x).$$

Al abrir los paréntesis y al igualar los coeficientes de las mismas potencias de $x$ en los miembros primero y segundo, obtendremos $n + 1$ igualdades, en las cuales intervienen $n + 1$ coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-m}; d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$; al determinarlos, hallaremos, de este modo, los polinomios $q(x)$ y $r(x)$.

**Ejemplo.** Sea $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2$, $T(x) = 2x^2 - 3x$. Suponiendo $q(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2$ $(c_0 \neq 0)$, $r(x) = d_0x + d_1$, escribamos la igualdad

$$2x^4 - 5x^3 + 2 =$$
$$= (2x^2 - 3x)(c_0x^2 + c_1x + c_2) + (d_0x + d_1),$$

que puede escribirse también en la forma

$$2x^4 - 5x^3 + 2 = 2c_0x^4 + (2c_1 - 3c_0)x^3 +$$
$$+ (2c_2 - 3c_1)x^2 + (d_0 - 3c_2)x + d_1.$$

De acuerdo con el teorema 1, son válidas las igualdades

$$\begin{cases} 2c_0 = 2, \\ 2c_1 - 3c_0 = -5, \\ 2c_2 - 3c_1 = 0, \\ d_0 - 3c_2 = 0, \\ d_2 = 2. \end{cases}$$

De estas igualdades encontramos $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = -\frac{3}{2}$, $d_0 = -\frac{9}{2}$, $d_1 = 2$, y en este caso resulta que $q(x) = x^3 - x - \frac{3}{2}$, $r(x) = -\frac{9}{2}x + 2$.

**Esquema de Horner.** Analicemos la división de un polinomio por el binomio $(x - \alpha)$

Sea dado el polinomio

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \quad \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

donde $a_0 \neq 0$, $n \geqslant 1$, y sea dado el binomio $(x - \alpha)$. De acuerdo con el teorema 5, existen un polinomio $q(x)$ y un número $r$ tales, que $P_n(x) = (x - \alpha)q(x) + r$. El grado del polinomio $q(x)$ es igual a $(n - 1)$. Por eso, $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} \quad \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$, donde $b_0 \neq 0$. Determinemos los números $b_0$, $b_1$, $b_2$, ..., $b_{n-1}$ y $r$, empleando el método de coeficientes indeterminados. Sustituyamos $q(x)$ en la igualdad $P(x) = (x - \alpha)q(x) + r$, y obtendremos

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= b_0x^n + (b_1 - \alpha b_0)x^{n-1} + (b_2 - \alpha b_1)x^{n-2} + \dots$$
$$\dots + (b_{n-1} - \alpha b_{n-2})x + (r - \alpha b_{n-1}).$$

Según la regla de igualdad de los polinomios, obtenemos de aquí

que

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 - \alpha b_0, \\ a_2 = b_2 - \alpha b_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n-1} = b_{n-1} - \alpha b_{n-2}, \\ a_n = r - \alpha b_{n-1}, \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} b_0 = a_0, \\ b_1 = a_0 + \alpha b_0, \\ b_2 = a_2 + \alpha b_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}, \\ r = a_n + \alpha b_{n-1} \end{cases} \qquad (3)$$

Así pues, los coeficientes del cociente $q(x)$ y el resto $r$ se expresan en términos de los coeficientes del polinomio $P(x)$ y del número $\alpha$ con ayuda de las operaciones de adición y multiplicación según las fórmulas (3), de donde se deduce:

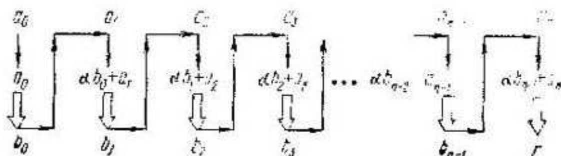
a) si $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ y $\alpha$ son números racionales, entonces $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ y $r$ son también números racionales;

b) si $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ y $\alpha$ son números enteros, entonces $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ y $r$ son también números enteros.

De las fórmulas (3) proviene la siguiente regla para calcular los coeficientes $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ y el resto $r$.

Escribir en una línea todos los coeficientes seguidos del polinomio $P_n(x)$, partiendo de $a_0$. En la segunda línea escribir, debajo de $a_0$, el coeficiente $b_0$ que es igual al coeficiente $a_0$. Multiplicar $\alpha$ por $b_0$ y, adicionando el producto $\alpha b_0$ a $a_1$, obtener el coeficiente $b_1$, escribiéndolo en la segunda línea debajo de $a_1$. Multiplicar $\alpha$ por $b_1$ y, adicionando el producto $\alpha b_1$ a $a_2$, obtener el coeficiente $b_2$, escribiéndolo en la segunda línea debajo de $a_2$. Obtener, continuando este proceso, el coeficiente $b_{n-1}$ y escribirlo en la segunda línea debajo de $a_{n-1}$. Multiplicar, por fin, $\alpha$ por $b_{n-1}$ y, sumando el producto $\alpha b_{n-1}$ con $a_n$, obtener el resto $r$, escribiéndolo en la segunda línea debajo de $a_n$.

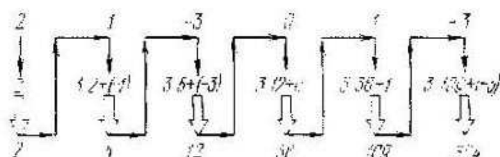
Esta regla se escribe en forma de la siguiente tabla que se denomina *esquema de Horner*:



El esquema de Horner permite dividir con facilidad el polinomio $P(x)$ por el binomio $x - \alpha$, es decir, hallar los coeficientes del cociente $q(x)$ y el resto $r$.

**Ejemplo.** Hallemos, aplicando el esquema de Horner, el cociente $q(x)$ y el resto $r$, al dividir el polinomio $P(x) = 2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3$ por el polinomio $T(x) = x - 3$.

El esquema de Horner tiene la siguiente forma




De este modo, $2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3 = (x - 3)(2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 36x + 109) + 324$.

**Teorema 6** (de Bezout). *El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por un binomio $(x - \alpha)$ es igual al valor del polinomio $P(x)$ para $x = \alpha$, es decir, $r = P(\alpha)$.*

**Demostración.** Al sustituir en la igualdad $P(x) = (x - \alpha) \times q(x) + r$ el valor de $\alpha$, en lugar de $x$, obtendremos $P(\alpha) = (\alpha - \alpha)\, q(\alpha) + r$, de donde se desprende precisamente que $r = P(\alpha)$.

**Teorema 7.** *El polinomio $P(x)$ se divide por el binomio $(x - \alpha)$ exactamente si, y sólo si, el valor del polinomio para $x = \alpha$ es igual a cero, es decir, si $P(\alpha) = 0$.*

**Demostración. Necesidad.** Supongamos que el polinomio $P(x)$ se divide por el binomio $(x - \alpha)$ exactamente. Esto significa que el resto $r$ es igual a cero. De acuerdo con el teorema de Bezout, el resto $r = P(\alpha)$. Por consiguiente, $P(\alpha) = 0$.

**Suficiencia.** Sea $P(\alpha) = 0$. Por otra parte, según el teorema de Bezout, $r = P(\alpha)$. Quiere decir, $r = 0$, es decir, $P(x)$ se divide exactamente por $x - \alpha$.

Demos a conocer algunos corolarios de este teorema.

1. *El polinomio $P_n(x) = x^n - \alpha^n$ se divide exactamente por el binomio $(x - \alpha)$ con $n$ natural cualquiera.*

En efecto, $P_n(\alpha) = \alpha^n - \alpha^n = 0$.

2. *El polinomio $P_n(x) = x^n - \alpha^n$ se divide exactamente por el binomio $(x + \alpha)$ con $n$ par cualquiera (es decir, con $n = 2m$).*

En efecto, $P_{2m}(-\alpha) = (-\alpha)^{2m} - \alpha^{2m} = 0$.

3. *El polinomio $P_n(x) = x^n + \alpha^n$ se divide exactamente por el binomio $(x + \alpha)$ con $n$ impar cualquiera (es decir, con $n = 2m + 1$).*

En efecto, $P_{2m+1}(-\alpha) = (-\alpha)^{2m+1} + \alpha^{2m+1} = 0$. Veamos ahora cómo se aplican estos corolarios.

Se necesita demostrar que para cualquier $n$ par natural el número $(20^n + 16^n - 3^n - 1)$ se divide por 19. Por cuanto $n = 2m$, donde $m \in N$, entonces aprovechemos las fórmulas de multiplicación redu-

cida:

$$20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^{2m} - 1) + (16^{2m} - 3^{2m}) =$$

$$= (20^m - 1)(20^m + 1) + (16^m + 3^m)(16^m - 3^m). \qquad (4)$$

En el primer sumando el primer factor se divide exactamente, para cualquier $m \in N$, por el número $(20 - 1)$, es decir, por 19. En el segundo sumando el primer factor se divide exactamente, para $m = 2k + 1$, $k \in N$, por el número $(16 + 3)$, es decir, por 19. Cuando $m = 2k$, el segundo factor puede ser representado en forma de un producto de factores $(16^k + 3^k)(16^k - 3^k)$. Si $k$ es impar, la descomposición del segundo sumando en factores se da por terminado. En cambio, si $k$ es par, la descomposición continúa. Realizados un número finito de pasos, que no exceda de $(n - 1)$, la descomposición se acabará y uno de los factores de esta descomposición tendrá por expresión $16^s + 3^s$, donde $s$ es un número impar. Entonces, dicho factor es divisible por 19. De este modo, los sumandos en la igualdad (4), tanto el primero como el segundo, se dividen por 19, cualquiera que sea $m \in N$, y, por lo tanto, también se divide por 19 el número $(20^n + 16^n - 3^n - 1)$, siendo $n$ un número natural par cualquiera.

**Raíces de un polinomio.** Un número $\alpha$ se denomina *raíz* del polinomio $P(x)$, siempre que $P(\alpha) = 0$. Asignaremos al teorema 7 otra enunciación, haciendo uso de la definición de raíz de un polinomio.

**Teorema 8.** *Un número $\alpha$ es la raíz del polinomio $P(x)$, si, y sólo si, el polinomio $P(x)$ se divide exactamente por el binomio $x - \alpha$.*

Demostremos el teorema sobre la búsqueda de las raíces enteras de un polinomio.

**Teorema 9.** *Si todos los coeficientes de un polinomio de grado $n$, donde $n \geqslant 1$, son números enteros y la raíz $\alpha$ de dicho polinomio es también un número entero, entonces el número $\alpha$ es el divisor del término independiente del polinomio.*

**Demostración.** Sea dado un polinomio de grado $n$, $(n \geqslant 1)$

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

y supongamos que $\alpha$ es la raíz de este polinomio. Realicemos la división entera del polinomio $P_n(x)$ por el binomio $(x - \alpha)$, entonces el cociente será el polinomio $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$, y el resto, el número $r$. Según se ha mostrado más arriba, si todos los coeficientes del polinomio $P_n(x)$ y $\alpha$ son números enteros, entonces serán también enteros los números $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ y $r$. Conforme al esquema de Horner, $r = a_n + \alpha b_{n-1}$, y, según el teorema 8, si $\alpha$ es raíz del polinomio, entonces $r = 0$. Por eso, tenemos la igualdad $a_n + \alpha b_{n-1} = 0$, de donde $a_n = \alpha(-b_{n-1})$. Por cuanto $a_n$, $\alpha$,

$(-b_{n-1})$ son todos números enteros, de aquí proviene que $\alpha$ es el divisor del número $a_n$, quedando demostrado el teorema.

**Corolario.** *Pueden ser raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros sólo los divisores del término independiente del polinomio.*

Este corolario permite determinar todas las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros, aplicando para ello el esquema de Horner.

**Ejemplo.** Aclárese si tiene raíces enteras el polinomio

$$P_4(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5. \tag{5}$$

Los divisores del término independiente son: 1, —1, 5, —5. Determinemos los valores del polinomio en estos puntos:

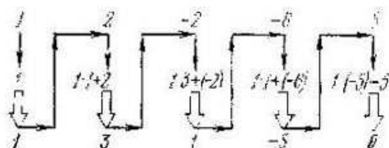
$$P_4(1) = 1 + 2 - 2 - 6 + 5 = 0,$$

$$P_4(-1) = 1 - 2 - 2 + 6 + 5 = 8 \neq 0,$$

$$P_4(5) = 625 + 250 - 50 - 30 + 5 = 800 \neq 0,$$

$$P_4(-5) = 625 - 250 - 50 + 30 + 5 = 360 \neq 0.$$

Así pues, el polinomio (5) tiene una raíz entera $x_1 = 1$, mientras que los números 5, —5 y —1 no son sus raíces. Aplicando el esquema de Horner, descompongamos el polinomio (5) en factores. El esquema de Horner tendrá la siguiente forma:

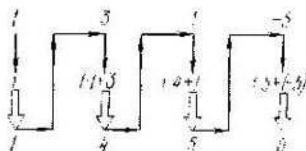


Por consiguiente, $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x^3 + 3x^2 + x - 5)$.

Buscaremos ahora las raíces del polinomio $P_3(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$. Los divisores de su término independiente son: 1, —1, 5, —5. No hay necesidad de buscar el valor del polinomio $P_3(x)$ en los puntos —1, 5, —5, puesto que estos números no son a ciencia cierta las raíces del polinomio $P_4(x)$ y, por lo tanto, del polinomio $P_3(x)$ debido a que el polinomio $P_4(x)$ no se anula en estos puntos. Comprobemos, por eso, solamente el número 1.

$$P_3(1) = 1 + 3 + 1 - 5 = 0.$$

Aplicando de nuevo el esquema de Horner:



obtendremos $P_3(x) = (x-1)(x^2+4x+5)$, por lo cual el polinomio $P_4(x)$ puede ser escrito en la forma: $P_4(x) = (x-1)^2 \times \times (x^2+4x+5)$.

Como el trinomio de segundo grado $x^2+4x+5$ no tiene raíces enteras, entonces, por consiguiente, el polinomio $P_4(x)$ tiene dos raíces enteras: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. En estos casos resulta conveniente introducir la noción de multiplicidad de la raíz. Si un polinomio $P_n(x)$ se divide exactamente por $(x-\alpha)^k$, donde $k$ es un número natural fijo, pero no se divide exactamente por $(x-\alpha)^{k+1}$, entonces $\alpha$ se denomina raíz de multiplicidad $k$ del polinomio $P_n(x)$. Las raíces de multiplicidad unidad se llaman raíces simples del polinomio. De este modo, el polinomio $P_4(x)$ en el ejemplo (5), aducido más arriba, tiene una raíz $x=1$ de multiplicidad dos.

**Observación.** Si queda determinada una raíz $x_1 = \alpha$ del polinomio $P(x)$, dicho polinomio puede ser escrito en la forma $P(x) = (x-\alpha)\,q(x)$, donde los coeficientes del polinomio $q(x)$ se calculan con facilidad por el esquema de Horner. Para hallar otras raíces del polinomio $P(x)$, hay que encontrar las raíces del polinomio $q(x)$. Es importante subrayar que el polinomio $q(x)$ puede tener como raíz el mismo número $\alpha$, el cual se determina también por el esquema de Horner.

Si no se buscan las raíces del polinomio $q(x)$ y se buscan, en lugar de ellas, las raíces del polinomio $P(x)$, entonces la raíz, ya determinada, no se revelará por segunda vez mediante el mismo método. Por esta razón, después de determinar una raíz, se deben buscar las raíces del cociente, es decir, las raíces del polinomio $q(x)$.

**Teorema 10.** *Si un polinomio*

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

*cuyos coeficientes son enteros y el mayor de ellos equivale a la unidad, tiene raíz racional, esta raíz será un número entero.*

**Demostración.** La demostración de este teorema se realizará por reducción al absurdo. Supongamos que el polinomio $P_n(x)$ tiene una raíz $\alpha = p/q$, donde $p$ y $q$ son números enteros recíprocamente primos. Por cuanto el número $p/q$ es una raíz del polinomio $P_n'(x)$, entonces se verifica la siguiente igualdad numérica

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n = 0,$$

la cual puede escribirse en la forma equivalente

$$\frac{p^n}{q^n} = -\left(a_1\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{p}{q} + a_n\right).$$

Multiplicando esta igualdad por $q^{n-1}$, obtendremos la igualdad equivalente

$$\frac{p^n}{q} = -a_1p^{n-1} - a_2p^{n-2}q - \ldots - a_{n-1}pq^{n-2} - a_nq^{n-1}.$$

Puesto que los números $p$ y $q$ son recíprocamente primos, el número $\frac{p^n}{q}$ no es entero, mientras que en el segundo miembro de la última igualdad figura un número entero. Tal igualdad no es posible, por lo cual la suposición no es cierta y el teorema queda lícito.

**Corolario.** *Si todos los coeficientes de un polinomio son números enteros y el mayor coeficiente es igual a la unidad, entonces todas las raíces racionales de dicho polinomio son números enteros.*

Examinemos el polinomio $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots$ $\ldots + a_{n-1}x + a_n$ de coeficientes enteros, y el polinomio

$$Q_n(x) = a_0^{n-1}P_n(x) = (a_0x)^n + a_1(a_0x)^{n-1} + \ldots + a_na_0^{n-1}.$$

Está claro que los polinomios $P_n(x)$ y $Q_n(x)$ tienen raíces iguales. Denotemos $y = a_0x$, entonces

$$Q_n(x) = T_n(y) = y^n + a_1y^{n-1} + a_2a_0y^{n-2} + \\ + a_3a_0^2y^{n-3} + \ldots + a_na_0^{n-1}.$$

En virtud del teorema 10, el polinomio $T_n(y)$ tiene solamente raíces enteras que pueden ser determinadas. Supongamos que dichas raíces sean los números $y_1, y_2, \ldots, y_m$; entonces los números $x_k = y_k/a_0$, donde $k \in \{1, 2; \ldots; m\}$, y sólo ellos, serán raíces racionales del polinomio $P_n(x)$. Así pues, para todo polinomio con coeficientes enteros pueden determinarse todas sus raíces racionales.

Si los coeficientes del polinomio son números racionales, entonces, después de reducirlos a un denominador común, se pueden buscar sólo las raíces del numerador, que es un polinomio con coeficientes enteros.

**Ejemplo.** Hállense las raíces del polinomio $P_3(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$. Examinemos el polinomio $Q_3(x) = 8P_3(x) = (2x)^3 + (2x)^2 - 2x - 1$, ó $T_3(t) = t^3 + t^2 - t - 1$, donde $t = 2x$. Los divisores del término independiente del polinomio $T_3(t)$ son $+1, -1$. Determinemos los valores del polinomio $T_3(t)$ en estos puntos:

$$T_3(1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0,$$
$$T_3(-1) = -1 + 1 + 1 - 1 = 0.$$

Al aplicar el esquema de Horner, obtendremos $T_3(t) = (t - 1) \times \times (t^2 + 2t + 1)$. El polinomio $(t^2 + 2t + 1)$ es el cuadrado perfecto del binomio $(t + 1)$. Por consiguiente, el polinomio $T_3(t)$ tiene tres raíces: $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = -1$, mientras que el polinomio $P_3(x)$, las tres raíces respectivas: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = -\frac{1}{2}$, o bien dos raíces diferentes: una simple $x_1 = \frac{1}{2}$ y otra, de segundo orden de multiplicidad $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Detendrémonos, en conclusión, en las raíces del binomio $P_n(x) = x^n - a$. Según se deduce del § 5 del capítulo anterior, para $n$ par el binomio $P_n(x)$ tiene: dos raíces $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$, siempre que $a > 0$, y una raíz 0, cuando $a = 0$; si $a < 0$, el polinomio no tiene raíces. Si $n$ es un número impar, el polinomio $P_n(x)$ tiene: una raíz $\sqrt[n]{a}$, si $a \geqslant 0$, y también una raíz $(-\sqrt[n]{|a|})$, si $a < 0$. Por ejemplo, el binomio $x^3 + 11$ tiene una sola raíz $(-\sqrt[3]{11})$.

## § 6. Método de inducción matemática

Existe una inmensidad de afirmaciones que dependen de un número natural $n$. ¿Cómo se deben entender tales afirmaciones?

Por cuanto hay una infinidad de números naturales, cada afirmación contiene, de hecho, un número infinito de afirmaciones. Por ejemplo, la afirmación: la suma de los primeros $n$ números naturales es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$, contiene en sí las afirmaciones siguientes:

para $n = 1$: el primer número natural, es decir, la unidad, es igual a $\frac{1(1+1)}{2}$;

para $n = 2$: la suma de los primeros dos números naturales, es decir, la suma de los números uno y dos es igual a $\frac{2(2+1)}{2}$;

para $n = 3$: la suma de los primeros tres números naturales, es decir, la suma de los números, uno, dos y tres, es igual a $\frac{3(3+1)}{2}$;

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

para $n = 10\,000$: la suma de los primeros diez mil números naturales es igual a $\frac{10\,000(10\,000+1)}{2}$, etc., es decir, la afirmación que se considera realmente contiene una infinidad de afirmaciones.

Análogamente, cualquier otra afirmación, dependiente de un número natural $n$, es, de hecho, la forma simplificada de escritura de un número infinito de afirmaciones.

Surge la pregunta: «¿cómo podemos convencernos de la validez de una afirmación dependiente de un número natural?»

Con el fin de demostrar las afirmaciones dependientes de un número natural $n$ se emplea, a menudo, el método general de demostración, *el método de inducción matemática completa*. Este método está basado en los axiomas de los números naturales. Mas, por cuanto dichos axiomas no se han mencionado anteriormente, el método de inducción matemática completa se acepta aquí sin demostración.

Para demostrar tal o cual afirmación dependiente de un número natural $n$, se hace lo siguiente:

1. Se comprueba la validez de esta afirmación para $n = 1$.
2. Se supone la validez de esta afirmación para $n = k$.
3. Se demuestra la validez de esta afirmación para $n = k + 1$, tomando en consideración su validez supuesta para $n = k$, después de lo cual se saca la conclusión de que la afirmación es válida para cualquier número natural $n$.

Haciendo uso de este método, demostremos que para todo número natural $n$ se verifica la igualdad

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \quad (1)$$

Comprobamos la validez de la igualdad (1) para $n = 1$. Para $n = 1$ la igualdad se escribirá en la forma: $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, y, es obvio que la igualdad se verifica. Supongamos que la igualdad (1) se verifica para $n = k$, es decir que es válida la igualdad

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}. \quad (2)$$

Con ayuda de la igualdad (2) demostremos que la igualdad (1) se verifica para $n = k + 1$, es decir, demostremos la validez de la igualdad

$$1+2+3+\ldots+(k+1)=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}. \quad (3)$$

En efecto, estudiemos la suma $1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1)$. Al emplear primeramente la propiedad de asociatividad de la adición y, luego, la igualdad (2), obtenemos realizando las transformaciones más simples:

$$1+2+3+\ldots+(k+1)=(1+2+3+\ldots+k)+(k+1)=$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

es decir, confirmamos la validez de la igualdad (3). A base del método de inducción matemática completa llegamos a la conclusión de que la igualdad (1) es válida para cualquier número natural $n$.

Veamos un **ejemplo** más. Demostremos que para cualquier número natural $n$ se verifica la desigualdad

$$n \leqslant 2^{n-1}. \quad (4)$$

**Demostración.** Cuando $n = 1$, la desigualdad (4) se convierte en una lícita desigualdad numérica $1 \leqslant 2^{1-1}$. Supongamos que la desigualdad (4) se verifica para $n = k$, es decir, que es válida la desigualdad

$$k \leqslant 2^{k-1}. \quad (5)$$

Recurriendo a la desigualdad (5), demostremos la validez de la desigualdad (4) para $n = k + 1$, es decir, demostremos que se verifica la desigualdad

$$(k + 1) \leqslant 2^{(k+1)-1}. \qquad (6)$$

Efectivamente, es obvio que $k + 1 \leqslant 2k$. De aquí, aprovechando la desigualdad (5) y la propiedad de transitividad de las desigualdades, resulta que $k + 1 \leqslant 2 \cdot 2^{(k-1)}$. El segundo miembro de la última desigualdad puede ser escrito en la forma $2^{(k+1)-1}$, de donde precisamente se desprende la validez de la igualdad (6). A base del método de inducción matemática completa llegamos a la conclusión de que la desigualdad (4) es válida para todo número natural $n$.

**Método generalizado de inducción matemática completa.** El método de inducción matemática completa se emplea frecuentemente en la demostración de las afirmaciones que son válidas no para todos los números naturales $n$, sino sólo para $n$ superiores o iguales a cierto número natural $p$. Entonces, la esencia del método de inducción matemática completa es casi la misma, pero se cambia el punto 1 por el punto 1a): «Se comprueba la validez de esta afirmación para $n = p$». En este caso, con el fin de demostrar la validez de una afirmación para cualquier $n$ natural $(n \geqslant p)$ se hace lo siguiente:

1. Se comprueba la validez de la afirmación para $n = p$.

2. Se presupone la validez de esta afirmación para $n = k$ (donde $k \geqslant p$).

3. Se demuestra la validez de esta afirmación para $n = k + 1$, tomando en consideración la validez de la misma para $n = k$. Después se saca la conclusión de que la afirmación es válida para todo $n$ natural $(n \geqslant p)$.

Demos un ejemplo de demostración de una desigualdad con ayuda del método generalizado de inducción matemática: demostremos que si $\alpha$ es un número fijo tal, que $\alpha > -1$ y $\alpha \neq 0$, entonces para cualquier $n$ natural $(n \geqslant 2)$ se verifica la *desigualdad de Bernoulli*

$$(1 + \alpha)^n > 1 + \alpha n. \qquad (7)$$

En efecto, cuando $n = 2$, la desigualdad (7) tiene por expresión

$$(1 + \alpha)^2 > 1 + 2\alpha. \qquad (8)$$

La desigualdad (8) es equivalente a la desigualdad

$$\alpha^2 > 0. \qquad (9)$$

La desigualdad (9) es obvia para $\alpha \neq 0$. Por consiguiente, la desigualdad (8) se verifica para los números $\alpha$ en consideración. Supongamos que para los $\alpha$ en consideración con $n = k$ $(k \geqslant 2)$ la desigualdad (7) es válida, es decir,

$$(1 + \alpha)^k > 1 + \alpha k. \qquad (10)$$

Demostremos, haciendo uso de la desigualdad (10), que la desigualdad (7) se verifica para $n = k + 1$, es decir, demostremos la desi-

gualdad

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1+\alpha(k+1). \tag{11}$$

Para la demostración multipliquemos ambos miembros de la desigualdad (10) por un número positivo $(1+\alpha)$ (por cuanto $\alpha > -1$, entonces, $1+\alpha > 0$). Obtendremos la igualdad

$$(1+\alpha)^{k+1} > (1+\alpha k)(1+\alpha), \tag{12}$$

que es equivalente a la desigualdad (10), es decir, obtendremos que la desigualdad (12) se verifica.

Demostremos ahora la validez de la desigualdad

$$(1+\alpha k)(1+\alpha) > 1+\alpha(k+1). \tag{13}$$

Trasladando todos los términos de la desigualdad (13) a una parte, abriendo los paréntesis y reduciendo los términos semejantes, obtenemos una desigualdad equivalente $\alpha^2 k > 0$, la cual se verifica, puesto que $\alpha \neq 0$ y $k \geqslant 2$. Por consiguiente, la desigualdad (13) es válida, pero entonces, aprovechando la validez de las desigualdades (12), (13) y la propiedad de transitividad de las igualdades concluimos que es válida también la igualdad (11). De este modo, la desigualdad de Bernoulli queda demostrada para cualquier $n$ natural, $n \geqslant 2$.

Tiene sentido que sea retenida en la memoria esta igualdad, puesto que con su ayuda se puede demostrar la validez de muchas otras desigualdades, por ejemplo, la validez, para cualquier $n$ natural, de la desigualdad

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{14}$$

En efecto, realizando ciertas transformaciones elementales, obtenemos una cadena de desigualdades equivalentes:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+2)^{n+1}\,n^n}{(n+1)^{n+1}\,(n+1)^n} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1}\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^n > 1 \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1}\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n > 1. \tag{15}$$

Con el fin de demostrar la desigualdad (15), para $n \geqslant 2$, apliquemos la desigualdad de Bernoulli (7) a la expresión $\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^n$, considerando $\alpha = -\frac{1}{(n+1)^2}$. Obtendremos

$$\left[1+\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]^n > 1-\frac{n}{(n+1)^2}.$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por un número positivo $\frac{n+2}{n+1}$, obtendremos

$$\frac{n+2}{n+1}\left[1+\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]^n > \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right).$$

Por cuanto

$$\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1,$$

entonces, empleando la propiedad de transitividad de las igualdades, tenemos:

$$\frac{n+2}{n+1}\left[1+\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right]^n>\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)>1.$$

De este modo la desigualdad (5) queda demostrada.

Como la desigualdad (15) es equivalente a la (14), ésta última también se verifica para $n$  2. Por cuanto es obvia para $n = 1$, la validez de la desigualdad (14) queda demostrada para cualquier $n$ natural.

**Resolución de los problemas de divisibilidad.** El método de inducción matemática se emplea también para resolver problemas de divisibilidad.

Demostremos, por ejemplo, que para cualquier $n$ natural el número $N(n) = n^3 + 5n$ es divisible por 6.

**Demostración.** Cuando $n = 1$, el número $N(1) = 6$, y, por eso, $N(1)$ se divide por 6, es decir, la afirmación es válida, si $n = 1$. Supongamos que la afirmación es legítima para $n = k$, es decir, que $N(k) = (k^3 + 5k)$ se divide por 6. Aprovechando el hecho de que el número $N(k)$ se divide por 6, demostraremos la validez de la afirmación para $n = k + 1$, es decir, demostraremos que el número $N(k + 1) = [(k + 1)^3 + 5(k + 1)]$ se divide por 6.

Efectivamente, haciendo uso de la propiedad de asociatividad y de conmutatividad de las operaciones sobre los números y las expresiones algebraicas, tenemos:

$$\begin{aligned} N(k+1) &= [(k+1)^3 + 5(k+1)] = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + \\ &+ 5k + 5 = (k^3 + 5k) + 6 + 3k^2 + 3k = \\ &= N(k) + 6 + 3k(k+1). \end{aligned}$$

Por cuanto $k$ y $k + 1$ son dos números naturales seguidos, uno de ellos es par, por lo cual el número $3k(k + 1)$ se divide por 6. Teniendo en cuenta que el número $N(k)$ se divide por 6 y el número 6 se divide por 6, obtenemos que será divisible por 6 también el número $N(k + 1)$. A base del método de inducción matemática completa se saca la conclusión de que el número $N(n) = n^3 + 5n$ se divide por 6 para cualquier número natural $n$.

Analicemos la resolución de un problema de divisibilidad más complejo, cuando el método de inducción matemática completa ha de emplearse varias veces.

Se pide demostrar que para cualquier $n$ natural el número $(3^{2^n} - 1)$ no es divisible exactamente por el número $2^{n+3}$.

Cuando $n = 1$, la afirmación es evidente, puesto que 8 no se divide por 16. Supongamos ahora que la afirmación resulta válida

para $n = k$, es decir, que el número $(3^{2^k} - 1)$ no se divide exactamente por el número $2^{k+3}$. Demostremos entonces que el número $(3^{2^{k+1}} - 1)$ no se divide exactamente por el número $2^{k+4}$, es decir, la afirmación es válida para $n = k + 1$. Representemos la expresión $(3^{2^{k+1}} - 1)$ en forma de un producto:

$$3^{2^{k+1}} - 1 = (3^{2^k} - 1)(3^{2^k} + 1).$$

Por hipótesis, el primer factor del producto no se divide exactamente por el número $2^{k+3}$, es decir, en la representación del número compuesto $(3^{2^k} - 1)$ en forma de un producto de números primos el número dos se repite no más de $(k + 2)$ veces. De este modo, para demostrar que el número $(3^{2^{k+1}} - 1)$ no se divide exactamente por el número $2^{k+4}$, se debe demostrar que el número $(3^{2^k} + 1)$ no es divisible por 4.

Con el fin de demostrar dicha afirmación demostremos una afirmación auxiliar: para cualquier $n$ natural el número $(3^{2n} + 1)$ no se divide por 4. Cuando $n = 1$, esta afirmación es evidente, puesto que 10 no se divide por 4 sin resto. Suponiendo que $(3^{2k} + 1)$ no es divisible por 4, demostremos que tampoco $(3^{2(k+1)} + 1)$ se divide por 4. Representemos la última expresión en forma de una suma $3^{2(k+1)} + 1 = (3^{2k} + 1) + 8 \cdot 3^{2k}$. El segundo sumando de la suma se divide por 4 exactamente, mientras que el primer sumando no se divide. Por consiguiente, toda la suma no es divisible por 4 sin resto. La afirmación auxiliar queda así demostrada.

Ahora está claro que $(3^{2^k} + 1)$ no se divide por 4, puesto que el número $2^k$ es un número par. Obtenemos en definitiva, en virtud del método de deducción matemática completa, que el número $(3^{2^n} - 1)$ no se divide exactamente por el número $2^{n+3}$, cualquiera que sea $n$ natural.

En conclusión demostremos por el método de inducción matemática dos afirmaciones aducidas anteriormente (§§ 2, 3, cap. II). En el § 3 se expuso la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n. \quad (16)$$

Aquí, $C_n^m$ son los coeficientes binomiales que se calculan según la fórmula $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$.

Demostremos la igualdad (16).

Cuando $n = 1$, la fórmula (16) se escribirá en la forma $(a + b)^1 = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1$. Tomando en consideración la regla para el cálculo de los coeficientes binomiales, escribamos esta fórmula en la forma $(a + b)^1 = a^1 + b^1$, es decir, nos convencemos de que la fórmula (16) es válida para $n = 1$. Supongamos que ella es válida para $n = k$,

es decir, que se verifica la fórmula

$$(a+b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^{l-1} a^{k-(l-1)} b^{l-1} +$$
$$+ C_k^l a^{k-l} b^l + C_k^{l+1} a^{k-(l+1)} b^{l+1} + \ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k. \qquad (17)$$

Demostremos, haciendo uso de la validez de la fórmula (17), que la fórmula (16) es cierta para $n = k + 1$, es decir, demostremos que se verifica la fórmula

$$(a+b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^{(k+1)-1} b + \ldots + C_{k+1}^l a^{(k+1)-l} b^l +$$
$$+ C_{k+1}^{l+1} a^{(k+1)-(l+1)} b^{l+1} + \ldots + C_{k+1}^{(k+1)-1} a b^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}. \qquad (18)$$

En efecto, utilizando sucesivamente, al principio, las propiedades de la potencia con exponente natural, luego, la fórmula (17) y, por fin, la regla para multiplicar polinomios, obtendremos

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k = (a+b)(C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + \ldots$$
$$\ldots + C_k^{l-1} a^{k-(l-1)} b^{l-1} + C_k^l a^{k-l} b^l + C_k^{l+1} a^{k-(l+1)} b^{l+1} + \ldots$$
$$\ldots + C_k^{k-1} a b^{k-1} + C_k^k b^k) = C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + \ldots$$
$$\ldots + C_k^{l-1} a^{k-l+2} b^{l-1} + C_k^l a^{k-l+1} b^l + C_k^{l+1} a^{k-l} b^{l+1} + \ldots$$
$$\ldots + C_k^{k-1} a^2 b^{k-1} + C_k^k a b^k + C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + C_k^2 a^{k-2} b^3 + \ldots$$
$$\ldots + C_k^{l-1} a^{k-l+1} b^l + C_k^l a^{k-l} b^{l+1} + C_k^{l+1} a^{k-l-1} b^{l+2} + \ldots$$
$$\ldots + C_k^{k-1} a b^k + C_k^k b^{k+1}. \qquad (19)$$

Reduciendo los términos semejantes en esta suma, llegamos a que

$$(a+b)^{k+1} = C_k^0 a^{k+1} + (C_k^1 + C_k^0) a^k b + (C_k^2 + C_k^1) a^{k-1} b^2 + \ldots$$
$$\ldots + (C_k^l + C_k^{l-1}) a^{k-l+1} b^l + (C_k^{l+1} + C_k^l) a^{k-l} b^{l+1} + \ldots$$
$$\ldots + (C_k^{k-1} + C_k^{k-2}) a^2 b^{k-1} + (C_k^k + C_k^{k-1}) a b^k + C_k^k b^{k+1}. \qquad (20)$$

Por cuanto el coeficiente $C_n^k$ es el número de combinaciones de $n$ elementos tomados a $k$ (véase § 7, cap. I), entonces

$$C_n^{m+1} + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}.$$

Haciendo uso de esta igualdad y también de las igualdades evidentes $C_k^0 = 1 = C_{k+1}^0$ y $C_k^k = 1 = C_{k+1}^{k+1}$, obtenemos la validez de la fórmula (18) que se predetermina por la de la fórmula (20). A base del método de inducción matemática completa se saca la conclusión de que la fórmula del binomio de Newton (16) es lícita para cualquier número natural $n$.

En el § 2 se ha aducido la igualdad de las expresiones algebraicas

$$(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+\ldots+AB^{n-2}+B^{n-1})=A^n-B^n. \qquad (21)$$

Con el fin de demostrar esta igualdad para $n \geqslant 2$, recurriremos al método generalizado de inducción matemática completa.

Para $n=2$ tenemos la siguiente cadena de igualdades: $(A-B)\times \times (A+B)=A^2+AB-BA-B^2=A^2-B^2$, es decir, la igualdad (21) es justa.

Supongamos que para $n=k$ $(k \geqslant 2)$ la igualdad (21) se verifica, es decir, es lícita la igualdad

$$(A-B)(A^{k-1}+A^{k-2}B+A^{k-3}B^2+\ldots$$
$$\ldots+AB^{k-2}+B^{k-1})=A^k-B^k. \qquad (22)$$

Aprovechando la igualdad (22), demostremos la validez de la igualdad (21) para $n=k+1$, es decir, demostremos la igualdad

$$(A-B)(A^k+A^{k-1}B+A^{k-2}B^2+\ldots$$
$$\ldots+AB^{k-1}+B^k)=A^{k+1}-B^{k+1}. \qquad (23)$$

Efectivamente, haciendo uso de las propiedades de las operaciones con las expresiones algebraicas y de la igualdad (22), obtenemos una cadena de igualdades idénticas

$$(A-B)(A^k+A^{k-1}B+A^{k-2}B^2+\ldots+AB^{k-1}+B^k)=$$
$$=(A-B)(A^k+A^{k-1}B+A^{k-2}B^2+\ldots+AB^{k-1})+(A-B)B^k=$$
$$=(A-B)(A^{k-1}+A^{k-2}B+A^{k-3}B^2+\ldots+B^{k-1})A+(A-B)B^k=$$
$$=(A^k-B^k)A+(A-B)B^k=A^{k+1}-B^kA+AB^k-B^{k+1}=A^{k+1}-B^{k+1}.$$

De este modo queda demostrada la igualdad (23) y, por lo tanto también la igualdad (21) para cualquier $n \geqslant 2$ natural.

### *Ejercicios*

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para $a=-0{,}1$ (1 ... 5):

1. $\dfrac{a^2-2a+1}{a-3}\cdot\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right]$.

2. $\left(\dfrac{2}{2a-1}+\dfrac{6}{1-4a^2}-\dfrac{4}{2a+1}\right):\left(1-\dfrac{4a^2+1}{4a^2-1}\right)$.

3. $\left(\dfrac{a-2}{a^3+1}+\dfrac{1}{a^3-a^2+a}\right)\cdot\dfrac{a^3-a}{a^2+1}+\dfrac{2}{a^3+a^2+a+1}$.

4. $\left\{\left[\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2-\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2\right]:\dfrac{8a^3+8a}{a^3+a^2-a-1}+\dfrac{1}{a+1}\right\}\cdot(1-a^2)$.

5. $\left(\dfrac{a^2-2a+4}{4a^2-1}\cdot\dfrac{2a^2-a}{a^3+8}-\dfrac{a+2}{2a^2+a}\right):\dfrac{4}{a^2+2a}-\dfrac{a+4}{3-6a}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para $a = 1$ y $b = -2$ (6 . . . 10):

6. $\dfrac{a^2(a+b^2)(a^3-b^3)(a^2-b)}{(a^2+b^2)(2a-3b^2)}$. 7. $\dfrac{a^3+b(b^2+3a)-1}{a(a-b+1)+b(b+1)}$.

8. $\dfrac{a^4+64}{b(a+2)^2-4(a-b)-a^2-8}$.

9. $\dfrac{3}{2}\left\{4b-b\left[a-b:\left(\dfrac{b-2a}{b+4a}-a\right)\right]\right\}+10$.

10. $\dfrac{b}{2}\left\{ab^2-2\left[\dfrac{4,75(2a^3+4b)-b^2}{a^2b^4+0,3(b^4-6a)}-3a(4-b)\right]\right\}-10b$

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para $m = 10$, $n = 4$ y $p = 5$ (11 . . . 15):

11. $\left\{[3(n+5)]^m-p(m-1)^8\cdot\left(\dfrac{p+10}{5}\right)^{m+2}+4(3n-3)^{m-2}\cdot 3^{2p-1}\right\}:41\times$
$\times\left(\dfrac{n+5}{3}\right)^{24}$.

12. $\left(m^{12}+p^{m+1}\cdot 2^{m-1}-p^{3n+1}\cdot 2^{\frac{m+n+10}{3}}\right):[(20-4n)\cdot 5^{n+1}(2n+2)^{m-n}]$.

13. $\dfrac{[2(p-4)]^{2m-1}\cdot(3p+12)^{\frac{10-n}{2}}+15\cdot n^{3(p-2)}\cdot(m-1)^{n+p-5}}{6^{m+5}\cdot[2(n-5)]^{p+5}+(32-4p)^{20-m}}$.

14. $\dfrac{5\cdot 4^{3p}\cdot(2m-11)^{n+6}-4(p-4)\cdot 3^{2m}\cdot(2n)^9}{5\cdot 2^{2p-1}\cdot 6^{2m-1}-7(m-8)^{2m+9}\cdot 27^{10-n}}$.

15. $\dfrac{(m+26)\cdot(3m-12)^{20-4n}-8\cdot 2^n\cdot(p+n)^4-3^{n+1}\cdot(m-4)^p}{(2n+4m-22)^{p-2}}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para $a=-\sqrt{3}$, $b = 1$, $c = 3$, $x = -\dfrac{3}{2}$ (16 . . . 20):

16. $\dfrac{x^2}{ab}+\dfrac{(x-a)^2}{a(a-b)}-\dfrac{(x-b)^2}{b(a-b)}+\dfrac{b-c}{bc}+\dfrac{c-a}{ac}+\dfrac{a-b}{ab}$.

17. $\dfrac{1}{2(x-a)}-\dfrac{1}{2(x+a)}+\dfrac{4}{a^2-x^2}+\left(\dfrac{x^2}{a^2b^2}:\dfrac{c^3x}{ab^3}\right)\cdot\dfrac{a^4}{xb}\cdot\dfrac{c^3}{a^3}$.

18. $\dfrac{a^2-4}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^3-x}{a^3+2a^2}+\dfrac{3ab^2}{5b^3c}\cdot\dfrac{15b^2c^2}{9a^2b}-\dfrac{3b}{(b+1)^2}+\dfrac{2}{b+1}$.

19. $\left[\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}\right]:\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{3x^2+x}$.

20. $\left\{\left[\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2+3\right]:\left[\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2+c\right]\right\}:\dfrac{a^2+1}{a^3-1}-\dfrac{2a}{a-1}+\dfrac{x-3}{x+c}$.

Hállese el CVA de las siguientes expresiones algebraicas (21 . . . 25):

21. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

22. $\left(\dfrac{2}{2a-b}+\dfrac{6b}{b^2-4a^2}-\dfrac{4}{(2a+b)}\right):\dfrac{a^2}{4a^2-b^2}$.

23. $\dfrac{a^2-2a+1}{a-3}:\left[\dfrac{(a+2)^2-a^2}{a^2-1}-\dfrac{1}{a^2-a}\right]$.

24. $\left[\left(\dfrac{a}{m(b-c)}+\dfrac{b}{n(a-c)}\right):\dfrac{9a^2-b^2}{ab(m-c)}\right]:\dfrac{m-4}{(m-2)(a+1)}$.

**25.** $\left[\frac{a+t}{(a-t)^2}-\frac{2a}{a^2-t^2}+\frac{a-t}{(t+a)^2}\right]:\frac{ab^3t^2}{a^4-t^4}-\frac{bt^2}{t^2-a^2}$.

Hállese el CVA de las siguientes expresiones algebraicas (26 . . . 30)

**26.** $\frac{4a^2+12a+9}{2a^2-a-6}:\frac{a^2+6a+3}{a^2+a-6}$ y $\frac{2a+3}{a+3}$.

**27.** $\frac{2a}{a^2-b^2}:\frac{1}{ab(b+2)}$ y $\frac{a^2-2a}{a^2(a+1)^2-1}$.

**28.** $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)$ y $\frac{1}{a^2-c^2}+\frac{b}{b-2bc}$.

**29.** $\frac{c-b}{bc}:\frac{b^2-c^2}{a^2-1}$ y $\frac{b+1}{(m-a)(b+1)}+\frac{1}{bcm}$.

**30.** $\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2+4\right]:\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+4\right]:\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$ y $\frac{x+a}{2x+a}:\frac{ax+a^2}{4x^2-a^2}$.

Hállese el CVA de las siguientes expresiones algebraicas y simplifíquese estas expresiones en su CVA (31 . . . 40):

**31.** $(3a^2x+a^2x-18a^2x):\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{2}+x-\frac{2x}{3}\right)$.

**32.** $(2x^2yx^5y^7\cdot 6x^2y^2):(-3x^4y\cdot 4x^5y^9xy)$.

**33.** $[3a^4b^7x^3\cdot 5a^3bx\cdot(-6a^3x^2)]:(15ax\cdot 2yxa\cdot 7ayx)$.

**34.** $\frac{2x^2y}{3yz}\cdot\frac{5z^2x}{7xy^3}:\frac{21x^2y^3z^2}{40xy^2z}$.

**35.** $\left(\frac{8a^2b}{12b^2c}:\frac{abc}{a^3b^2c}\right):\frac{15a^2b^2c}{3abc}$.

**36.** $\left[\left(\frac{y^2b^2}{a^2x}:\frac{ya}{b}\right):\frac{ab^4}{x^3y}\right]:\frac{b^2}{a^2}$.

**37.** $\left(\frac{a^2-5a+6}{a^2+5a+4}:\frac{a^2-4a+3}{2a^2+3a+1}\right)\cdot\frac{a^2+3a-4}{2a^2-3a-2}$.

**38.** $\frac{b^2-100}{a^2-b^2}:\frac{b+10}{a-b}+\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2}\cdot\frac{b^2+ab}{b^2-ab}$.

**39.** $\left[\frac{c^3-8}{c+a}:\left(\frac{c-2}{4c}\cdot\frac{8c^3}{c^2+ac}\right)\right]:\frac{c^2+2c+4}{2b(a-c)}$.

**40.** $\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-4ab-21b^2}\cdot\frac{a^2+2ab-3b^2}{a^3-b^3}\right):\frac{1}{a-7b}+$
$+\frac{a^2-l^2}{5a^3c^3}:\left(\frac{a+l}{10a^4}\cdot\frac{2a-2l}{ac^4}\right)$.

Simplifíquese las siguientes expresiones algebraicas (41 . . . 65):

**41.** $3(x-2)-2(x-1)$.

**42.** $18-5(x+2)-3(x+1)$.

**43.** $6(x-2)-13(x-3)-2x+4$.

**44.** $3(x-4)-4(x-3)-5(x-2)-9(8-x)+20$.

**45.** $2x-5[7-(x-6)+3x]-21$.

**46.** $1-x+2\{3-2[x+2(x-2)]-x\}$.

**47.** $2+3[x-4(1-x)]-x-\{(x-1)-3[x+2(x-1)]-2x\}$.

**48.** $\frac{x}{3}+1\frac{1}{2}-\frac{2x}{9}+\frac{x}{6}-4x$.

**49.** $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}(x-1)$.

50. $3+\frac{x}{4}-\frac{1}{3}\left(4-\frac{x}{3}\right)-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-11\right).$

51. $\frac{0,75-x}{3}-\frac{2x+4}{1,5}-x-4\frac{1}{3}.$

52. $0,5x-3+\frac{0,25-3x}{4\frac{1}{4}}-1\frac{1}{2}x.$

53. $\frac{3x+5}{3}+4\frac{1}{6}-0,1\left(\frac{7x}{2}+8\right).$

54. $\frac{7x+2}{2}-1,5-\frac{4x-1}{3}-\frac{0,75x}{6}.$

55. $5\frac{1}{2}+0,5x-\frac{3x}{4}+2(x+0,(3)-1).$

56. $\frac{8}{3}\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{8}-\frac{x}{12}\right)-0,5\left[\frac{1}{2}\left(\frac{5x}{6}-\frac{x}{12}+\frac{x}{9}\right)+2\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{12}\right)\right].$

57. $a-\{2a-[3b-2(4c-2a)]-3(b-c)\}.$

58. $2x-4[5x-(11y-3x)]-3[5y-2(3x-6y)]$

59. $3y-\{16y-2[3x-2(x-12y)-5x]+x\}.$

60. $-2[a-2(b-a)]-3[b-4(2a-3b)]+2a.$

61. $6\{2a-3[b-2(c+a)]-3b\}-4\{b-2[a-4(c-a)-2c]+3a\}.$

62. $0,5a-\frac{1}{2}\left(\frac{2b}{3}-0,5a\right)-\left\{a-\left[1\frac{1}{2}a-\left(\frac{b}{3}-0,25a\right)\right]-\left(\frac{2a}{3}-\frac{b}{4}\right)\right\}.$

63. $\frac{1}{4}[c-4(b-c)-2b]-1\frac{1}{2}\left\{0,5\left(b-\frac{c}{3}\right)-\frac{2}{3}\left[2c-0,75\left(b-\frac{4c}{5}\right)\right]\right\}.$

64. $\frac{1}{8}\left(\frac{2a}{5}-\frac{4b}{15}\right)-2\left[0,4\left(\frac{5a}{4}-\frac{a}{6}-\frac{b}{10}\right)-0,2\left(b-\frac{a}{3}\right)-\frac{b-2a}{4}\right].$

65. $0,2(3)+a-0,5\left[2\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{9}\right)-1\frac{1}{2}\left(\frac{a}{5}+0,(6)-\frac{b}{4}\right)\right]-\frac{a+b-1}{15}.$

Descompóngase los polinomios que siguen en el producto de por lo menos dos polinomios (66 . . . 85):

66. $5mx+3ny-5my-3nx$. 67. $5x+xy+5y+y^2$.

68. $ax-bx+by+cy-cx-ay$. 69. $3a^5-6a^4b+3a^3b^2$.

70. $36x^2y^2-100$. 71. $25-49a^2b^6c^4$. 72. $4p^2q^4-81z^2$

73. $(2a-3b)^2-(3a-2b)^2$. 74. $(m+2n)^2-4(3m-n)^2$.

75. $9(a-3b)^2-16(b-2a)^2$. 76. $a^4-c^2+9y^2-6a^2y$.

77. $c^6-6c^3-c^2-2cx-x^2+9$. 78. $a^3b^3-27m^3$.

79. $1+1000y^6$. 80. $m^3b^6c^9-8k^6$. 81. $125a^3-343b^3$.

82. $8a^3+(b-2a)^3$. 83. $64(m-n)^3+1$.

84. $(2a-b)^3-(3b-a)^3$. 85. $8(x-y)^3+27(y-2x)^3$.

Descompóngase los polinomios que siguen en el producto de cuatro polinomios por lo menos (86 . . . 100):

86. $25b^2\cdot 81y^2z^2-121a^2\cdot 81y^2z^2-25b^2\cdot 169a^2+121a^2\cdot 169a^2$

87. $144a^2b^8\cdot 25a^{10}-49c^4\cdot 25a^{10}-144a^2b^8+49c^4$.

88. $125x^3\cdot(a+b)^2-125x^3\cdot(3a-2b)^2-(8(a+b)^2+8(3a-2b)^2$.

89. $25(a-3b)^2-\frac{1}{4}(3a+7b)^2-125z^3y^6(a-3b)^2+\frac{125}{4}z^3y^6(3a+7b)^2$.

90. $16x^2\cdot 64a^6b^6-225(3m-n)^2\cdot 64a^6b^6+16x^2-225(3m-n)^2$.

91. $9(x+y)^2\cdot 27a^6b^3-16(x+2y)^2\cdot 64a^6b^3+9(x+y)^2\cdot 125m^3-16(x+2y)^2 125m^3$.

92. $2a^2y^5 + aby^5 - aby^3 - 2a^2y^3$.

93. $13x^2y^2 \cdot 3a - 39y^4 \cdot 3a - 13x^2y^2 \cdot 9a^2 + 39y^4 \cdot 9a^2$.

94. $36a^3 \cdot 49x^2 - 9ab^2 \cdot 49x^2 + 36a^3 \cdot 7xy - 9ab^2 \cdot 7xy + 36a^3 \cdot 14x -$
$- 9ab^2 \cdot 14x$.

95. $15b \cdot 4a^2 + 45mb^2 \cdot 4a^2 + 15b \cdot 16ab + 15mb^2 \cdot 16ab$.

96. $(1 - x^2)(y^2 - m^2) + (6x - 9)(y^2 - m^2) - (1 - x^2)(2mn + n^2) -$
$- (6x - 9)(2mn + n^2)$.

97. $(25x^2 + b^2)(a^2 + 6ab) + 9(25x^2 + b^2)(b^2 - c^2) - 9(y^2 + 10xb) \times$
$\times (b^2 - a^2) - (y^2 + 10xb)(a^2 + 6ab)$.

98. $(x + y)^4 (a^3 + b^3) - a^3b^3 + (x + y)^4 (a + b) - (a + b)$.

99. $(y^3 - y^2 + y)(121 - 25x^2 - 10x) - (121 - 25x^2 - 10x) - (y^3 - y^2 + y) + 1$.

100. $16(a^3 - b^3 - b)(9x^3y - 4xy^3) + 16a(9x^3y - 4xy^3)$.

Redúzcanse a un denominador común las siguientes tres fracciones algebraicas (101 . . . 110).

101. $\frac{1}{xy + x^2}, \quad \frac{1}{x^2 - y^2}, \quad \frac{1}{2x^2 - 2xy}$.

102. $\frac{1}{(a + b)^3}, \quad \frac{1}{a^3 - a^2b}, \quad \frac{1}{a^2 - b^2}$.

103. $\frac{1}{a^2 - 4}, \quad \frac{1}{a^2 + 3a + 2}, \quad \frac{1}{a^2 + 2a}$.

104. $\frac{1}{a^2 + a - 2}, \quad \frac{1}{a^2 - 4a + 3}, \quad \frac{1}{a^2 - 1}$.

105. $\frac{1}{20a - 4}, \quad \frac{1}{50a^2 + 2}, \quad \frac{1}{75a^2c - 3c}$.

106. $\frac{1}{9bx + 4by}, \quad \frac{1}{18cx + 12cy}, \quad \frac{1}{81x^2 - 16y^2}$.

107. $\frac{1}{a^2 + ab}, \quad \frac{1}{b^2 + ab}, \quad \frac{1}{a^3b - b^3a}$.

108. $\frac{1}{x^2 - x - 20}, \quad \frac{1}{x^2 - 9x + 20}, \quad \frac{1}{8x - 32}$.

109. $\frac{1}{(2a^2 - 3ab)^2}, \quad \frac{1}{(4a - 6b)^3}, \quad \frac{1}{4a^2 - 9b^2}$.

110. $\frac{1}{x^3 - y^3}, \quad \frac{1}{2x^2 + 2xy + 2y^2}, \quad \frac{1}{ax^2 - ay^2}$.

Hállese el CVA de las expresiones algebraicas y simplifíquese éstas en su CVA (111 . . . 130):

111. $\frac{a^3 - a^2b - ab^2 - 2b^3}{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 2b^3}$.

112. $\frac{4b^4 + 11b^2 + 25}{4b^4 - 9b^2 + 30b - 25}$.

113. $\frac{3a^2 + 6a}{a^2 + 4a + 4} \cdot \frac{a^3 - 2a}{a^4 - 4a^2 + 4}$.

114. $\frac{b^2 - 5b}{b^2 - 4b - 5} : \frac{5a^3b + 10a^2b^2}{3a^2b^2 + 6ab^3}$.

115. $\left( \frac{x^2 + y^2 + xy}{x^3 - y^3} : \frac{a^3b - 2a^2b + 4ab}{a^3 + 8} \right) : \frac{x^2 - 2x + 1}{3x^2 + 7x - 10}$.

116. $\frac{b^2 - 17b + 72}{b^2 - 25} \cdot \frac{b^2 - 1}{b^2 - 8b - 9} : \frac{b^2 - 9b + 8}{b^2 + 4b - 5}$.

117. $\frac{c^2-c-20}{c^2+5c+4}\cdot\frac{c^2-c}{c^2+c-2}:\left(\frac{c^2}{c^2+3c+2}\cdot\frac{c^2-3c-15}{c+3}\right).$

118. $\frac{6xy-14y}{x-2}\cdot\frac{x^2-4}{x+4x^2-14}\cdot\frac{4x-7}{4x^2}:\frac{3x^2-x-14}{2x^2+4x}.$

119. $\left(\frac{a^2-4a-45}{a^2-14a-15}:\frac{a^2-12a-45}{a^2-6a-27}\right):\left(\frac{b^2-4}{b^2-121}\cdot\frac{b+11}{b+2}\right).$

120. $\left(\frac{12a^3+24a^2}{14a^2-7a}:\frac{a^2+2a}{2a-1}\right):\left(\frac{16a^2-49}{4a^2+a-14}:\frac{2a^2-a-1}{2a^2+5a+2}\right).$

121. $\frac{a}{a+2}-\frac{a^2+3a}{4-a^2}-\frac{a+1}{3a-6}.$

122. $\frac{6a^3+48a^2}{a^3+64}+\frac{a^2-4}{a+4}-\frac{3a^2}{a^2-4a+16}.$

123. $\frac{1}{x^2+3x+2}-\frac{3}{(x+1)(x^2+5x+6)}.$

124. $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$

125. $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}-\frac{2}{a-b}-\frac{2}{b-c}-\frac{2}{c-a}.$

126. $\frac{1}{a^2+a}+\frac{1}{a^2+3a+2}+\frac{1}{a^2+5a+6}+\frac{1}{a^2+7a+12}.$

127. $\frac{a^6-b^6}{a^2-b^2}-\frac{a^6+b^6}{a^2+b^2}-\frac{a^4-b^4}{(a^2+b^2)(a-b)}.$

128. $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)[(x-y)^2+xy]+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)[(x+y)^2-xy]$

129. $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right).$

130. $\left(\frac{1}{x+y}-\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right)\cdot\frac{x^6-y^6}{x^2y^2}+\frac{x^3-y^3}{xy}.$

Hállese el CVA de las siguientes dos expresiones algebraicas $A$ y $B$, y demuéstrese que en este campo se verifica la igualdad idéntica $A=B$ (131 ... 160):

131. $A=\frac{a^2-2}{6ab}\cdot\frac{18b^3}{5a^4-10a^2},\ B=\frac{3b^2}{5a^3}.$

132. $A=\frac{a^3-b^3}{a^2-2ab+b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+ab},\ B=\frac{a^2+ab+b^2}{a}.$

133. $A=\frac{a^2-16}{a^2-8a+16}:\frac{2a+8}{3a-9},\ B=\frac{3(a-3)}{2(a-4)}.$

134. $A=\frac{a^3+9a^2+20a}{a^2+5a+4}:\frac{a^2+7a+10}{a^2+3a+2},\ B=a.$

135. $A=\frac{2a-3}{2a^2+13a-24}\cdot\frac{4a^2-3a-7}{4a-7}\cdot\frac{a^2+5a-24}{a^2-2a-3},\ B=1.$

136. $A=\frac{2a^2+3ab-2b^2}{a^2+2ab+4b^2}\cdot\frac{a^3-8b^3}{a^2+3ab+2b^2}:\frac{2a^2-5ab+2b^2}{a^2+2ab+b^2},\ B=a+b.$

137. $A=\frac{a^2-9}{5a^3b^3}:\left(\frac{a+3}{10a^4}\cdot\frac{2a-6}{ab^4}\right),\ B=a^2b.$

138. $A=\left(\frac{m^3+4m^2n+4mn^2}{3m^2n-5mn^2-2n^3}:\frac{(m+2n)^3}{27m^3+n^3}\right)\cdot\frac{m^2-4n^2}{9m^2-3mn+n^2},\ B=\frac{m}{n}.$

139. $A=\frac{c^2-4m^2}{c^2-2cm}-\frac{c^2+2cm-8m^2}{c^2-4m^2},\ B=\frac{4m^2}{c(c+2m)}.$

**140.** $A=\frac{1+a^2+a}{1-a^3}+\frac{a-a^3}{(1-a)^3}$, $B=\frac{1}{(1-a)^2}$.

**141.** $A=\frac{a^2}{xy}+\frac{(a+x)^2}{x^2-xy}-\frac{(a+y)^2}{yx-y^2}$, $B=1$.

**142.** $A=\frac{3a-5}{3a^2-2a-5}-\frac{3a+5}{3a^2+7a+2}-\frac{1}{6a^2-a-1}$, $B=2$.

**143.** $A=\frac{5(2b-3)}{11(6b^2+b-1)}+\frac{7b}{6b^2+7b-3}-\frac{12(3b+1)}{11(4b^2+8b+3)}$, $B=\frac{1}{2b+1}$.

**144.** $A=\frac{a-1}{a-2}+\frac{a+1}{a+2}-\frac{4}{4-a^2}+\frac{2}{2-a}$, $B=0$.

**145.** $A=\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{3}{1-x}-\frac{1}{3-x}$, $B=\frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}$.

**146.** $A=\frac{a}{(a-x)^2}+\frac{3a}{x^2+ax-2a^2}+\frac{1}{2a+x}$, $B=\frac{x}{(a-x)^2}$.

**147.** $A=\frac{1+x}{(x-y)(x-z)}+\frac{1+y}{(y-z)(y-x)}+\frac{1+z}{(z-x)(z-y)}$, $B=0$

**148.** $A=\frac{m^2nr}{(m-n)(m-r)}+\frac{n^2mr}{(n-r)(n-m)}+\frac{r^2mn}{(r-m)(r-n)}$, $B=0$.

**149.** $A=\frac{(ac+bm)^3-(am+bc)^3}{(a-b)(c-m)}-\frac{(ac+bm)^3+(am+bc)^3}{(a+b)(c+m)}$,

$B=2(ac+bm)(am+bc)$.

**150.** $A=\frac{31}{2c-3}-\frac{2c+15}{4c^2+9}-\frac{2}{2c+3}+\frac{18(2c+15)}{81-16c^4}$, $B=0$.

**151.** $A=\frac{x^3+3x^2+5x+15}{x^3+2x^2+5x+10}-\frac{x^4+x^3+3x+x-2}{x^4+2x^3+3x^2+4x-4}$, $B=2$.

**152.** $A=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}:\frac{x^4-y^4}{2xy(x-y)}$, $B=\frac{1}{x+y}$.

**153.** $A=\frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2}+\frac{y^2-(z-x)^2}{(x+y)^2-z^2}-\frac{(x-y)^2-z^2}{(y+z)^2-x^2}$, $B=1$.

**154.** $A=\frac{(x-y)^4-xy(x-y)^2-2x^2y^2}{(x-y)(x^3-y^3)+2x^2y^2}$, $B=\frac{x^2-4xy+y^2}{x^2+y^2}$.

**155.** $A=\frac{z^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\left(x-\frac{za^2}{a^2+b^2}\right)^2$, $B=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{z-x}{b}\right)^2$.

**156.** $A=\left(\frac{a+5}{5a-1}+\frac{a+5}{a+1}\right):\frac{a^2+5a}{1-5a}+\frac{a^2+5}{a+1}$, $B=a-1$.

**157.** $A=\left(\frac{b-3}{7b-4}-\frac{b-3}{b-4}\right)\cdot\frac{7b-4}{9b-3b^2}+\frac{b^2-14}{4-b}$, $B=-(b+4)$.

**158.** $A=\left(\frac{1+6ac}{8c^3-a^3}-\frac{1}{2c-a}\right):\left(\frac{1}{a^3-8c^3}-\frac{1}{a^2+2ac+4c^2}\right)$,

$B=1-2c+a$.

**159.** $A=\frac{b-4}{b-2}:\left(\frac{80b}{b^3-8}+\frac{2b}{b^2+2b+4}-\frac{b-16}{2-b}\right)-\frac{6b+4}{(4-b)^2}$, $B=\frac{b}{b-4}$

**160.** $A=\frac{9m}{(3-m)^2}-1:\left(\frac{m}{m-3}+\frac{12m^2-9m}{27-m^3}+\frac{9}{m^2+3m+9}\right)$, $B=-1$

Demuéstrese, para cualesquiera números positivos $a$ y $b$, que se verifican las desigualdades (161 . . . 165):

161. $(a^2-b^2)^2 \geqslant 4ab(a-b)^2$. 162. $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$.

163. $(a+b)^4 \leqslant 8a^4+8b^4$. 164. $\frac{a+b}{1+a+b} < \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$.

165. $\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

Demuéstrese, haciendo uso de la desigualdad sobre la media aritmética y la media proporcional, que cualesquiera números positivos $a$, $b$ y $c$ se verifican las igualdades siguientes (166 . . . 168):

166. $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant a+b+c$.

167. $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$.

168. $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac$.

169. Demuéstrese que para cualquier número real $a$ se verifica la desigualdad

$$a^2+1 \geqslant \frac{2a}{a^2+1}.$$

170. Demuéstrese que si $a \geqslant b \geqslant c > 0$, entonces

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3.$$

171. Demuéstrese que si $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, . . ., $a_n > 0$ y $a_1+a_2+\ldots$ $\ldots+a_n=1$, entonces

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}.$$

Demuéstrese que para cualquier $n$ natural se verifican las siguientes desigualdades (172 . . . 173):

172. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2$.

173. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n!} < 2$.

Demuéstrese que para cualquier $m$ y $p$ natural se verifican las siguientes desigualdades (174 . . . 176):

174. $\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\frac{1}{(m+3)(m+4)}+\ldots$
$\ldots+\frac{1}{(m+p)(m+p+1)} < \frac{1}{m+1}$.

175. $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m+3}+\ldots+\frac{1}{m+p} > \frac{p}{m+p}$.

176. $\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\frac{1}{(m+3)^2}+\ldots+\frac{1}{(m+p)^2} < \frac{1}{p}$.

Demuéstrese que para $n \geqslant 2$ ($n$ es cualquier número natural) se verifican las siguientes desigualdades (177 . . . 184):

177. $(n!)^2 \geqslant n^n$. 178. $\frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1}$. 179. $\frac{2^n}{n!} \leqslant \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

180. $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. 181. $(n!)^2 < \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n$.

182. $n! < \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$. 183. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

184. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$.

Descompónganse, según la fórmula del binomio de Newton (185 . . . 187):

185. $\left(a+\frac{1}{2}\right)^6$. 186. $(a-\sqrt{2})^7$. 187 $(a-\sqrt{3})^8+(a+\sqrt{3})^8$.

Hállese el séptimo término en la descomposición del binomio de Newton (188 . . . 191):

188. $(2+b)^9$. 189. $(3a-2)^{10}$. 190 $(a^2-2a)^{11}$. 191. $\left(\frac{a^2}{3}+3a\right)^{12}$.

Hállense todos los $k$, para cada uno de los cuales el coeficiente de $a^k$ en el desarrollo del binomio de Newton es un número racional (192 . . . 194):

192. $(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\cdot a)^{24}$. 193. $(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}\cdot a)^{76}$. 194. $(\sqrt[3]{3}\cdot a+\sqrt[12]{2})^{102}$.

Hállese el coeficiente de $x^5$ de los siguientes polinomios (195 . . . 200):

195. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^{14}$. 196. $(2x-1)^{17}$. 197. $(1+x-x^2)^4$.

198. $(1-2x+x^2)^5$. 199. $(1-x)^2\cdot(2+x)^6$. 200. $(1+2x)^4\cdot(x-1)^7$.

Escójanse los números $A$, $B$, $C$ de tal manera que se verifiquen las siguientes igualdades idénticas (201 . . . 205):

201. $x^4+2x^3-16x^2-2x+15=(x+1)(x^3+Ax^2+Bx+C)$.

202. $3x^5-x^4-3x+1=(x^2+1)(3x^3+Ax^2+Bx+C)$.

203. $\frac{x^2+4x-1}{x^3+9x^2+23x+15}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x+5}$.

204. $\frac{x^2-1}{x^3+5x^2+3x-9}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}$.

205. $\frac{-2x+1}{x^3+2x^2+2x+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$.

Hállense, aplicando el esquema de Horner, el cociente y el resto al dividir por $(x+1)$ los siguientes polinomios (206 . . . 211):

206. $x^6+9x^3+32x+16$.

207. $14x-4+27x^4-9x^7$. 208. $x^5-7x-6$. 209. $x^4+19x^2-30$.

210. $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^3$.

211. $(x^2+4x+18)^3+3x(x^2-4x+8)+3$.

Cerciórese, aplicando el esquema de Horner, de que tanto el número $(-2)$ como el número 1 son raíces de los siguientes polinomios (212 . . . 214):

212. $(x^2+x)^2+4(x^2+1)-12$. 213. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

214. $2x^4+7x^3-2x^2-13x+6$.

215. Cerciórese, aplicando el esquema de Horner, de que el polinomio

$$(x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15$$

se divide por el polinomio $(x+2)(x+6)$ y hállese el cociente.

216. Cerciórese, aplicando el esquema de Horner, de que el polinomio

$$x^5-6x^4+16x^3-32x^2+48x-32$$

se divide por el polinomio $(x-2)^3$.

217. ¿Se dividirá el polinomio $(x^4-10x^2+16)+(x^4-11x^2+24)$ por el polinomio $(x^2-8)$?

218. Demuéstrese que la suma de potencias iguales $x^m+c^m$ no es divisible por la diferencia entre sus bases $x-c$.

219. Demuéstrese que la diferencia entre potencias iguales impares $x^{2k+1}-c^{2k+1}$ no es divisible por la suma de sus bases $x+c$.

**220.** Demuéstrese que la suma de potencias iguales pares $x^{2k}+c^{2k}$ no es divisible por la suma de sus bases $x+c$.

**221.** Hállense las raíces enteras del polinomio $x^4-x^3-2x^2+4x-24$.

Demuéstrese, empleando el método de inducción matemática, que para cualquier $n$ natural se verifican las siguientes igualdades (222 . . . 241):

**222.** $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

**223.** $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

**224.** $2^2+4^2+8^2+\ldots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

**225.** $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

**226.** $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

**227.** $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

**228.** $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\ldots+(n-1)n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

**229.** $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

**230.** $3+3^2+3^3+\ldots+3^n=\frac{3(3^n-1)}{2}$.

**231.** $2\cdot 2^0+3\cdot 2^1\cdot+4\cdot 2^2+\ldots+(n+1)\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^n$.

**232.** $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{2(n+2)}$.

**233.** $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$.

**234.** $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n-3}{2^n}$.

**235.** $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.

**236.** $\frac{1}{1\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 19}+\frac{1}{19\cdot 28}+\ldots+\frac{1}{(9n-8)(9n+1)}=\frac{n}{9n+1}$.

**237.** $\frac{1}{5\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 23}+\ldots+\frac{1}{(6n-1)(6n+5)}=\frac{n}{5(6n+5)}$.

**238.** $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

**239.** $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

**240.** $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

**241.** $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{3}{5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=$

$=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$.

Demuéstrese (por el método de inducción matemática) que para cualquier $n$ natural se verifican las siguientes desigualdades (242 . . . 244):

242. $\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+ \ldots +\frac{1}{(n+1)^2}<2-\frac{1}{n+1}$.

243. $2\sqrt{n+1}>\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$.

244. $(n!)>\left(\frac{n}{3}\right)^n$.

245. Demuéstrese que para todo $n \geqslant 5$ ($n$ es un número natural) se verifica la desigualdad $2^n > n^2$.

246. Demuéstrese que para todo $n$ natural ($n \geqslant 3$) se verifica la desigualdad $n! > 2^{n-1}$.

Demuéstrese que para cualquier $n$ natural:

247. El número $n^3+5n$ es divisible por 6.

248. El número $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ es divisible por 9.

249. El número $4^n+15n-1$ es divisible por 9.

250. El número $3^{2^n}-1$ se divide por $2^{n+2}$ y no se divide por $2^{n+3}$.

251. El número $n^5-n$ se divide por 30.

252. El número $4^{2n}-3^{2n}-7$ se divide por 84.

253. El número $6^{2n}+19^n-2^{n+1}$ se divide por 17.

254. El número $4^{2n+1}+3^{n+2}$ se divide por 13.

255. El número $n^2(n^4-1)$ se divide por 60.

256. El número $6n^5+15n^4+10n^3-n$ se divide por 30.

257. El número $20^{n+1}+16^{n+1}-3^{n+1}-1$ se divide por 323.

258. El número $(2n)^3+20(2n)$ se divide por 48.

CAPÍTULO

# III

# ECUACIONES ALGEBRAICAS Y DESIGUALDADES

Sean dados dos polinomios $A$ y $B$. Si se plantea el problema (cap. II) de resolver la ecuación $A = B$, se dice que está dada la *ecuación algebraica* $A = B$. Si, en cambio, se pide resolver la desigualdad $A > B$ ($A < B$, $A \geqslant B$, $A \leqslant B$), se dice que está dada la desigualdad algebraica $A > B$ ($A < B$, $A \geqslant B$, $A \leqslant B$).

En este capítulo se estudian solamente las ecuaciones y desigualdades algebraicas. Por eso, en lugar de las palabras «ecuación algebraica» escribiremos simplemente «ecuación», y en lugar de las palabras «desigualdad algebraica», simplemente «desigualdad».

## § 1. Ecuación con una sola incógnita

**Conceptos principales y definiciones.** Supongamos que se pide resolver la ecuación

$$R(x) = Q(x), \tag{1}$$

donde $R(x)$ y $Q(x)$ son polinomios enteros (véase el cap. II) respecto de la letra $x$; entonces, $x$ se denomina letra incógnita o, simplemente, *incógnita*, y la ecuación (1), *ecuación algebraica con una sola incógnita.*

Por cuanto el CVA de los polininmios $R(x)$ y $Q(x)$ se compone de todos los números reales, el problema sobre la resolución de la ecuación (1) puede enunciarse así: *hállense todos los valores numéricos de la incógnita $x$, cada uno de los cuales convierte la ecuación* (1) *en una igualdad numérica justa.* Todo número de este género se llama *raíz* o *solución* de la ecuación (1). Por eso, *resolver la ecuación* (1) significa determinar el conjunto de todas sus raíces.

Si el conjunto de todas las raíces de la ecuación (1) consta de $k$ números $x_1, x_2, \ldots, x_k$, entonces se dice que la ecuación (1) tiene sólo *$k$ raíces* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, es decir, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (1) es el conjunto $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Si el conjunto de todas las raíces consta solamente de un número $x_1$,

se dice, además, que la ecuación (1) tiene *la única raíz* o *la única solución* $x_1$.

En el caso en que el conjunto de todas las raíces de la ecuación (1) es un conjunto vacío se dice, que la ecuación (1) *no tiene raíces.*

Por ejemplo, es evidente que la ecuación $x^2 + 1 = -(x^4 + 1)$ no tiene raíces, pues la ecuación no se convierte en una igualdad numérica que se verifica, cualquiera que sea el valor numérico de la incógnita $x$.

Examinemos ahora la ecuación algebraica más simple con una sola incógnita

$$x = \alpha, \tag{2}$$

donde $\alpha$ es un número fijo determinado. Es obvio que esta ecuación elemental tiene la única raíz, que es el número $\alpha$, por lo cual el conjunto de todas las raíces de la ecuación (2) consta de un solo número $\alpha$.

Sin embargo, no en toda ecuación algebraica con una incógnita la cuestión sobre el conjunto de todas las raíces de la misma es tan evidente como en los dos ejemplos examinados más arriba. Por regla general, para determinar el conjunto de todas las raíces de una ecuación, esta última se reduce mediante los pasos equivalentes (véase más abajo la definición de paso equivalente) a una ecuación o al conjunto (sistema) de varias ecuaciones (véase más abajo la definición de conjunto de ecuaciones), cada una de las cuales es o bien una ecuación elemental del tipo (2), o bien una ecuación de la cual podemos decir que a ciencia cierta no tiene raíces.

En este párrafo se estudian los ejemplos de pasos equivalentes.

Sean dadas dos ecuaciones algebraicas con una sola incógnita $R(x) = Q(x)$ y $S(x) = T(x)$. Estas ecuaciones se denominan *equivalentes*, si cualquier—raíz de la primera ecuación es raíz de la segunda ecuación y, viceversa, si cualquier raíz de la segunda ecuación es raíz de la primera. En virtud de esta definición, son equivalentes cualesquiera dos ecuaciones que no tienen raíces.

La sustitución de una ecuación por otra, equivalente a la primera, se llama *paso equivalente* de una ecuación a otra. El paso equivalente de una ecuación a otra se denota mediante una flecha doble $\Leftrightarrow$. La notación

$$R(x) = Q(x) \Leftrightarrow S(x) = T(x)$$

significa que las ecuaciones $R(x) = Q(x)$ y $S(x) = T(x)$ son equivalentes.

Demos a conocer algunas **afirmaciones**, con ayuda de las cuales se realizarán los pasos equivalentes.

1. *Las ecuaciones* $R(x) = Q(x)$ y $R(x) - Q(x) = 0$ *son equivalentes.*

2. *Las ecuaciones* $R(x) = Q(x)$ *y* $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ *son equivalentes para cualquier número real* $\alpha$.

3. *Las ecuaciones* $R(x) = Q(x)$ *y* $\alpha R(x) = \alpha Q(x)$ *son equivalentes para todo número real* $\alpha$ *distinto de cero.*

4. *Supongamos que se sabe que para cualquier número real $x$ se verifica la igualdad $R(x) = T(x)$, entonces serán equivalentes las ecuaciones $R(x) = Q(x)$ y $T(x) = Q(x)$.*

Las demostraciones de la validez de estas afirmaciones son semejantes, razón por la cual **demostraremos**, por ejemplo, sólo la afirmación 2. Sea el número $x_1$ una raíz de la ecuación $R(x) = Q(x)$. En este caso será válida la igualdad numérica $R(x_1) = Q(x_1)$. Por cuanto la validez de la igualdad numérica no se perturba al adicionar a ambos miembros de ella un número real cualquiera (véase el cap. II), entonces queda lícita la igualdad numérica $R(x_1) + \alpha = Q(x_1) + \alpha$. La validez de esta igualdad numérica significa que el número $x_1$ es la raíz de la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$. Por cuanto tal razonamiento puede realizarse para toda raíz de la ecuación $R(x) = Q(x)$, entonces con ello queda demostrado que cualquier raíz de la ecuación $R(x) = Q(x)$ es también raíz de la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$.

Mostremos ahora lo contrario. Sea el número $x_2$ una raíz de la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$. En este caso será válida la igualdad numérica $R(x_2) + \alpha = Q(x_2) + \alpha$. Sumemos a ambos miembros de esta igualdad numérica el número $(-\alpha)$ y obtendremos que se verifica la igualdad numérica $R(x_2) = Q(x_2)$, de donde se desprende que $x_2$ es la raíz de la ecuación $R(x) = Q(x)$. Como tal razonamiento puede realizarse para toda raíz de la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$, entonces queda demostrado que cualquier raíz de la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ es también raíz de la ecuación $R(x) = Q(x)$.

De lo demostrado se deduce que si la ecuación $R(x) = Q(x)$ no tiene raíces, tampoco las tendrá la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$. Efectivamente, supongamos que la ecuación $R(x) = Q(x)$ no tiene raíces, mientras que la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ tiene por lo menos una raíz. De la condición de que la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ tiene una raíz proviene, de acuerdo con lo demostrado más arriba, que también tiene raíz la ecuación $R(x) = Q(x)$, lo que contradice la suposición. Quiere decir, si la ecuación $R(x) = Q(x)$ no tiene raíces, tampoco las tiene la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$.

De modo análogo se muestra que si la ecuación $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ no tiene raíces, la ecuación $R(x) = Q(x)$ tampoco tiene raíces.

Así pues, se ha mostrado que en este caso las ecuaciones $R(x) = Q(x)$ y $R(x) + \alpha = Q(x) + \alpha$ son equivalentes, con lo cual queda demostrada completamente la afirmación 2.

Sea dado un polinomio $P(x)$ de grado $n$, entero respecto de la letra $x$:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0), \qquad (3)$$

donde con las letras $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ se denotan ciertos números reales fijos que se denominan *coeficientes* del polinomio $P(x)$.

De las afirmaciones **1** y **4** se deduce que cada ecuación algebraica con una sola incógnita puede reducirse a la forma $P(x) = 0$, y por esta razón será suficiente examinar sólo la ecuación

$$P(x) = 0, \tag{4}$$

donde $P(x)$ es un polinomio de tipo (3). Toda ecuación de este género se llama *ecuación algebraica de grado n*.

De la definición de raíz del polinomio $P(x)$ (véase el § 5, cap. II) y de raíz (solución) de una ecuación algebraica se desprende que cualquier raíz del polinomio $P(x)$ será raíz (solución) de la ecuación (4). Por consiguiente, la determinación de todas las raíces (soluciones) de la ecuación (4) se reduce a hallar todas las raíces del polinomio $P(x)$. Sólo se debe tener en cuenta que durante la determinación de las raíces de la ecuación (4) no se toma en consideración la multiplicidad de la raíz del polinomio $P(x)$. Por ejemplo, el polinomio $P(x) = x^2 - 2x + 1$ tiene la raíz $x_1 = 1$ de segundo orden de multiplicidad, mientras que la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$ tiene la única raíz (la única solución) $x_1 = 1$. Sabemos bien que la determinación de las raíces de un polinomio es un problema complejo. Es por eso que se analizarán aquí sólo aquellos casos en que se logra hallar todas las raíces del polinomio, es decir, resolver la ecuación (4).

**Ecuación de primer grado.** Analicemos el caso en que $P(x)$ es un polinomio de primer grado, es decir, examinemos la ecuación

$$a_0x + a_1 = 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{5}$$

En virtud de la afirmación 2, la ecuación (5) es equivalente a la ecuación

$$a_0x = -a_1 \quad (a_0 \neq 0). \tag{6}$$

Por cuanto $a_0 \neq 0$, de acuerdo con la afirmación 3, la ecuación (6) es equivalente a la ecuación

$$x = -\frac{a_1}{a_0} \quad (a_0 \neq 0). \tag{7}$$

Todos los pasos equivalentes de la ecuación (5) a la (7) pueden ser escritos más brevemente en forma de la cadena siguiente de pasos equivalentes:

$$a_0x + a_1 = 0\ (a_0 \neq 0) \Leftrightarrow a_0x = -a_1\ (a_0 \neq 0) \Leftrightarrow x = -\frac{a_1}{a_0}\ (a_0 \neq 0).$$

La ecuación elemental $x = -\frac{a_1}{a_0}$ tiene una raíz única que es el número $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$. Como la ecuación (5) es equivalente a la ecuación elemental (7), entonces la ecuación (5) también tiene una sola raíz, que es el número $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$.

De este modo, la *ecuación de primer grado* (5) con una sola incógnita tiene *una sola raíz* $x_1 = -\frac{a_1}{a_0}$.

Para resolver ecuaciones algebraicas de grados más elevados se necesitará el concepto de conjunto (sistema) de ecuaciones. Sean dados $m$ polinomios $P_1(x)$, $P_2(x)$, . . ., $P_m(x)$. Se dice que está dado el *sistema de m ecuaciones algebraicas* con una sola incógnita $x$:

$$P_1(x) = 0, \quad P_2(x) = 0, \ \ldots, \ P_m(x)\ 0, \qquad (8)$$

si se necesita encontrar todos los valores numéricos de la incógnita $x$, cada uno de los cuales es la raíz de por lo menos una ecuación de dicho sistema (8) (las ecuaciones del sistema se escriben, habitualmente, en una línea).

De este modo, resolver un sistema de ecuaciones (8) significa resolver cada ecuación $P_i(x) = 0$, donde $i = 1, 2, \ldots, m$, es decir, encontrar los conjuntos $N_1$, $N_2$, . . ., $N_m$ de todas las raíces de cada una de las ecuaciones y luego tomar la unión de estos conjuntos. Esta unión $N = N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_m$ será el conjunto de todas las raíces del sistema de ecuaciones (8), y todo número, perteneciente al conjunto $N$, se denominará raíz o solución del sistema (8). Si el conjunto $N$ se compone de $k$ números: $x_1, x_2, \ldots, x_k$, suele decirse que el sistema de ecuaciones (8) tiene *sólo k raíces* $x_1, x_2, \ldots, x_k$; si, en cambio, el conjunto $N$ se compone de un solo número $x_1$, se dice que el conjunto de ecuaciones (8) tiene la *única raíz* $x_1$.

Surge frecuentemente la necesidad de realizar el paso equivalente de una ecuación al sistema de ecuaciones. Diremos que la ecuación

$$P(x) = 0 \qquad (4)$$

*es equivalente al sistema de ecuaciones*

$$P_1(x) = 0, \quad P_2(x) = 0, \ \ldots, \ P_m(x) = 0, \qquad (8)$$

siempre que cualquier solución (cualquier raíz) de la ecuación (4) sea solución (raíz) del sistema (8), y, viceversa, cualquier solución (cualquier raíz) del sistema (8) es solución (raíz) de la ecuación (4). La sustitución de la ecuación (4) por el sistema (8), equivalente a (4), se llama *paso equivalente de la ecuación* (4) al sistema (8).

Por ejemplo, la ecuación

$$(3x+4)(-7x+2)(2x-\sqrt{5})(-12x-16)=0 \qquad (9)$$

es equivalente al sistema de ecuaciones

$$3x+4=0, \quad -7x+2=0, \quad 2x-\sqrt{5}=0, \quad -12x-16=0.$$

En efecto, cualquier raíz de la ecuación (9) reduce a cero por lo menos uno de los polinomios $(3x + 4)$, $(-7x + 2)$, $(2x - \sqrt{5})$, $(-12x - 16)$, es decir, es la raíz de al menos una de las ecuaciones del sistema y, viceversa, cualquier raíz del sistema reduce a cero por lo menos uno de estos polinomios, es decir, satisface la ecuación (9).

El sistema de ecuaciones tiene solamente tres raíces: $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{2}{7}$, $x_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Por consiguiente, debido a que el paso es equivalente, las raíces citadas, y sólo ellas, son raíces de la ecuación (9).

Estudiemos una *ecuación algebraica de segundo grado*, es decir, la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0). \tag{10}$$

Se ha acostumbrado llamar estas *ecuaciones cuadráticas*. El polinomio $ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, se denomina, corrientemente, *trinomio de segundo grado*; el número $a$ ($a \neq 0$) que precede a $x^2$ se llama *primer coeficiente*; el número $b$, que precede a $x$, segundo coeficiente y el número $c$, término independiente. Además, el número $D = b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* del trinomio de segundo grado y, también, discriminante de la ecuación cuadrática (10).

Efectuémos una transformación idéntica del trinomio de segundo grado. Por cuanto $a \neq 0$, se verificará la siguiente igualdad idéntica

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Apliquemos ahora la transformación idéntica que lleva el nombre de «formación de cuadrado perfecto»:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} =$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} =$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}.$$

En definitiva llegamos a que resulta válida la siguiente igualdad idéntica:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] \quad (a \neq 0).$$

En virtud de la afirmación (4), la ecuación (10) es equivalente a la ecuación

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] = 0 \quad (a \neq 0), \tag{11}$$

y, en virtud de la afirmación 3 (tomando en consideración que $a \neq 0$), resulta que la ecuación (11) es equivalente a la ecuación

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0 \quad (a \neq 0). \tag{12}$$

En una forma más breve esto puede escribirse así:

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0),$$
$$\Updownarrow$$
$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]=0 \quad (a\neq 0),$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}=0 \quad (a\neq 0).$$

Según sea el discriminante $D$, son posibles tres casos.

a) $D<0$. Por cuanto para cualquier valor numérico $x_0$ el número $\left(x_0+\frac{b}{2a}\right)^2$ es no negativo y el número $\left(-\frac{D}{4a^2}\right)$, positivo, entonces el número $\left(x_0+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}$ será también positivo, por lo cual no puede ser igual a cero. Esto significa que la ecuación (12) no tiene raíces reales. Por cuanto la ecuación (10) es equivalente a la (12), ella tampoco tendrá raíces reales.

b) $D=0$. La ecuación (12) toma en este caso la forma

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \quad (a\neq 0).$$

Esta ecuación es equivalente a una ecuación de primer grado

$$x+\frac{b}{2a}=0 \quad (a\neq 0).$$

Por consiguiente, si $D=0$, la ecuación (12) tendrá la única raíz $x_1=-\frac{b}{2a}$.

c) $D>0$. Entonces, $D=(\sqrt{D})^2$ y, por esta razón, la expresión en el primer miembro de la ecuación (12) puede ser considerada como la diferencia entre dos cuadrados $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ y $\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$. Haciendo uso de la fórmula para la multiplicación reducida, obtendremos la ecuación

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right]=0 \quad (a\neq 0),$$

que es equivalente a la ecuación (12). Esta ecuación es, a su vez, equivalente al sistema de dos ecuaciones

$$x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}=0 \ (a\neq 0), \quad x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}=0 \ (a\neq 0). \tag{13}$$

Cada ecuación en este sistema es de primer grado y, por tanto, según lo demostrado más arriba, tiene una sola raíz. Resolviendo cada una de las ecuaciones del sistema (13), llegamos a que el sistema de ecua-

ciones (13) tiene tan sólo dos raíces

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad (a\neq 0), \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \quad (a\neq 0). \tag{14}$$

Por ser equivalentes los pasos, si $D>0$, la ecuación (10) será equivalente al sistema (13), por lo cual tiene solamente dos raíces, $x_1$ y $x_2$, que se calculan por las fórmulas (14).

Así pues, *la ecuación cuadrática* (10) *no tiene raíces reales, si su discriminante es negativo, tiene tan sólo dos raíces reales, si el discriminante es positivo y tiene una sola raíz real, si el discriminante es igual a cero.*

Notemos que si el discriminante de la ecuación cuadrática (10) es positivo, las fórmulas (14) para hallar las raíces de esta ecuación se escriben, a menudo, en forma de una sola fórmula

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (a\neq 0). \tag{15}$$

**Observación.** Si $D=0$, se puede considerar que la fórmula (15) queda válida, mas debe retenerse en memoria que en este caso la ecuación cuadrática tiene una sola raíz.

**Ecuación cuadrática reducida.** Un trinomio de segundo grado, en el cual el primer coeficiente es igual a la unidad se denomina *reducido*. Se ha convenido generalmente denotar con $p$ el segundo coeficiente del trinomio reducido, y con $q$, su término independiente, es decir, un trinomio reducido de segundo grado tiene por expresión $x^2+px+q$

La ecuación cuadrática de la forma

$$x^2+px+q=0 \tag{16}$$

lleva el nombre de ecuación cuadrática *reducida*.

Es obvio que la ecuación cuadrática (10) es equivalente a la ecuación reducida correspondiente, a saber,

$$ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0) \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \ (a\neq 0). \tag{17}$$

Si el discriminante de la ecuación reducida (16) es positivo, la fórmula (15) para hallar las raíces de esta ecuación toma la forma siguiente

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}. \tag{18}$$

**Teorema** (de Viète). *Si una ecuación cuadrática reducida $x^2+px+q=0$ tiene discriminante positivo, entonces la suma de las raíces de dicha ecuación es igual a su segundo coeficiente tomado con signo opuesto, y el producto de las raíces es igual al término independiente, es decir, si $x_1$ y $x_2$ son las raíces de la ecuación $x^2+px+q=0$, entonces $x_1+x_2=-p$; $x_1x_2=q$.*

**Demostración.** Por cuanto $D > 0$, entonces, aplicando la fórmula (18), obtendremos

$$x_1+x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)+\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=-p,$$

$$x_1x_2=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)\left(\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)=$$

$$=\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=q.$$

El teorema está demostrado.

**Observación.** Como se deduce de la demostración, el teorema de Viète queda lícito para $D = 0$, siempre que la raíz $x_1 = -\frac{p}{2}$ se considere como dos raíces coincidentes $x_1 = -\frac{p}{2}$ y $x_2 = -\frac{p}{2}$. El teorema de Viète tiene lugar también para $D < 0$, mas, en este caso, a título de raíces de la ecuación cuadrática intervienen números conjugados complejos (véase el cap. XI).

El teorema de Viète es de amplio uso en la resolución de distintos problemas. Veamos uno de ellos. Se require hallar el término indepeniente desconocido $q$ de la ecuación cuadrática $x^2 + x + q = 0$, si se sabe que esta ecuación tiene dos raíces reales, $x_1$ y $x_2$, y la suma de los cuadrados de dichas raíces es igual a la unidad, es decir, $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Para encontrar $q$, apliquemos el teorema de Viète. Resulta válida la cadena de igualdades idénticas

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

y, por consiguiente, $x_1^2 + x_2^2 = 1 - 2q$, es decir, $1 - 2q = 1$, de donde $q = 0$.

**Ecuación simétrica de tercer grado.** Una ecuación algebraica de tercer grado se denomina *simétrica*, si tiene por expresión

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0). \tag{19}$$

Transformemos el polinomio $ax^3 + bx^2 + bx + a$, empleando con este fin el método de descomposición de un polinomio en factores. Es evidente que se verifica la siguiente cadena de igualdades idénticas:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + bx + a &= a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = \\ &= a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = \\ &= (x + 1)[a(x^2 - x + 1) + bx] = \\ &= (x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a], \end{aligned}$$

por lo cual la ecuación (19) es equivalente a la ecuación

$$(x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a] = 0 \quad (a \neq 0). \tag{20}$$

La ecuación (20 es, a su vez, equivalente al sistema de ecuaciones:

$$x + 1 = 0 \ (a \neq 0), \quad ax^2 + (b - a)x + a = 0 \ (a \neq 0). \qquad (21)$$

Por consiguiente, la ecuación (19) es también equivalente a este sistema. La solución del sistema (21) se halla con facilidad, puesto que ésta contiene solamente ecuaciones de primer y segundo grados.

**Ejemplo.** Hállense las raíces de la ecuación

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0. \qquad (22)$$

Transformemos el primer miembro de la ecuación:

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (x^3 + 1) + 4x(x + 1) = (x+1)(x^2 + 3x + 1).$$

Es evidente que la ecuación (22) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$x + 1 = 0, \quad x^2 + 3x + 1 = 0. \qquad (23)$$

La primera ecuación del conjunto (23) tiene una sola raíz $x_1 = -1$; la segunda, sólo dos raíces, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ y $x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. Por consiguiente, el sistema de ecuaciones (23) y, por tanto, ecuación dada (22) tienen solamente tres raíces $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

**Ecuación simétrica de cuarto grado.** Una ecuación algebraica de cuarto grado se denomina *simétrica*, si tiene por expresión

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a \neq 0). \qquad (24)$$

Teniendo en cuenta que $a \neq 0$, escribamos esta ecuación en la forma equivalente:

$$(x^4 + 1) + \frac{b}{a}x(x^2 + 1) + \frac{c}{a}x^2 = 0 \quad (a \neq 0).$$

Es evidente la validez de la siguiente cadena de igualdades idénticas:

$$(x^4+1) + \frac{b}{a}x(x^2+1) + \frac{c}{a}x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) + \frac{b}{a}x(x^2+1) +$$
$$+ \left(\frac{c}{a} - 2\right)x^2 = (x^2+1)^2 + 2(x^2+1)\frac{bx}{2a} + \left(\frac{bx}{2a}\right)^2 + x^2\left(\frac{c}{a} - 2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$
$$= \left(x^2 + \frac{b}{2a}x + 1\right)^2 - \frac{b^2 - 4a(c-2a)}{4a^2}x^2.$$

La validez de esta cadena predetermina que la ecuación (24) es equivalente a la ecuación

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}x + 1\right)^2 - \frac{b^2 - 4a(c-2a)}{4a^2}x^2 = 0 \quad (a \neq 0). \qquad (25)$$

Según sea el número $M = b^2 - 4a(c - 2a)$, son posibles tres casos,

a) $M < 0$. La ecuación (25) y, por lo tanto, la ecuación (24): equivalente a ella, no tienen raíces reales.

b) $M = 0$. La ecuación (25) adquiere en este caso la forma

$$\left(x^2+\frac{b}{2a}x+1\right)^2=0. \tag{26}$$

Es evidente que la ecuación (26) es equivalente a la ecuación

$$x^2+\frac{b}{2a}x+1=0. \tag{27}$$

Por consiguiente, el conjunto de raíces de la ecuación simétrica de cuarto grado coincide en este caso con el conjunto de raíces de la ecuación cuadrática

$$x^2+\frac{b}{2a}x+1=0 \quad (a\neq 0). \tag{28}$$

c) $M > 0$. La ecuación (25) y, por lo tanto, la ecuación (24), equivalente a ella, son equivalentes al sistema de ecuaciones cuadráticas

$$x^2+\frac{b+\sqrt{b^2-4a(c-2a)}}{2a}x+1=0 \quad (a\neq 0), \tag{29}$$

$$x^2+\frac{b-\sqrt{b^2-4a(c-2a)}}{2a}x+1=0 \quad (a\neq 0), \tag{30}$$

cada una de las cuales se resuelve con facilidad.

**Ejemplo.** Resuélvase la ecuación

$$x^4+x^3-x^2+x+1=0. \tag{31}$$

Aduzcamos la siguiente cadena de igualdades idénticas:

$$x^4+x^3-x^2+x+1=x^4+2x^2+1+x(x^2+1)-3x^2=$$
$$=(x^2+1)^2+2(x^2+1)\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2-3x^2-\frac{x^2}{4}=$$
$$=\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2-\frac{13x^2}{4}=$$
$$=\left(x^2+\frac{1+\sqrt{13}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{13}}{2}x+1\right),$$

de donde se desprende que la ecuación (31) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$x^2+\frac{1+\sqrt{13}}{2}x+1=0, \quad x^2+\frac{1-\sqrt{13}}{2}x+1=0.$$

La primera ecuación de este sistema tiene solamente dos raíces.

$$x_1=\frac{-\sqrt{13}-1+\sqrt{2\sqrt{13}-2}}{4}, \quad x_2=\frac{-\sqrt{13}-1-\sqrt{2\sqrt{13}-2}}{4}. \tag{32}$$

mientras que la segunda ecuación no tiene raíces reales, puesto que su discriminante es negativo. Por consiguiente, la ecuación (31) tiene solamente dos raíces (32).

**Ecuación binomia.** Una ecuación algebraica se llama *binomia*, si tiene por expresión

**Ecuación binomia.** Una ecuación algebraica se llama *binomia*, si tiene por expresión

$$x^n - a = 0. \qquad (33)$$

Primeramente examinemos la ecuación binomia (33) en el caso particular cuando $a = 1$:

$$x^n - 1 = 0. \qquad (34)$$

Para $n = 1$ la ecuación (34) es un caso particular de la ecuación de primer grado y por ello tiene la única raíz $x_1 = 1$. Cuando $n = 2$, la ecuación (34) representa un caso particular de la ecuación cuadrática con discriminante positivo, por lo cual tiene solamente dos raíces: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. Mostremos ahora que para $n \geqslant 3$, para cualquier $n$ impar, la ecuación (34) tiene una sola raíz real $x_1 = 1$, y para todo $n$ par la ecuación (34) tiene solamente dos raíces reales, $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Sea $n$ un número natural impar fijo, $n \geqslant 3$, es decir, sea $n = 2k + 1$, donde $k$ es un número natural fijo. Aprovechando la fórmula de multiplicación reducida, obtenemos la validez de la igualdad idéntica (véase el cap. II):

$$x^{2k+1} - 1 = (x - 1)(x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1).$$

De la validez de esta igualdad idéntica se desprende que, para $n = 2k + 1$, la ecuación (34) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$(x - 1) = 0, \quad x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0.$$

La primera ecuación de este sistema tiene la única raíz $x_1 = 1$, la segunda ecuación del sistema no tiene raíces reales. Con el fin de demostrarlo mostremos que para cualquier $x$ real se verifica la desigualdad

$$x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1 > 0. \qquad (35)$$

En efecto, para cualquier $x \in [0, +\infty)$ la validez de la desigualdad (35) es obvia. Para cualquier $x \in [-1; 0)$, al escribir el primer miembro de la desigualdad (35) en la forma

$$x^{2k} + x^{2k-2}(x + 1) + \ldots + x^2(x + 1) + (x + 1),$$

nos convencemos de que el primer sumando de esta suma es positivo y los demás, no negativos. Quiere decir, para cualquier $x \in [-1; 0)$ la desigualdad (35) es válida. Escribiendo el primer miembro de la desigualdad (35) en la forma

$$x^{2k-1}(x + 1) + x^{2k-3}(x + 1) + \ldots + x(x + 1) + 1,$$

nos convencemos de que para cualquier $x \in (-\infty, -1)$ todos los sumandos de esta suma son positivos. Quiere decir, para todo $x \in \in (-\infty; -1)$ la desigualdad (35) es válida.

Así pues, se ha mostrado la validez de la desigualdad (35) para cualquier $x$ real y esto significa que la ecuación

$$x^{2k} + x^{2k-1} + \ldots + x^2 + x + 1 = 0$$

no tiene raíces reales. Por tanto, la ecuación (34) tiene, para $n = 2k + 1$, una sola raíz real $x_1 = 1$.

Sea ahora $n = 2k$ ($k$ es un número natural fijo y $k \geqslant 2$). Aprovechando la fórmula de multiplicación reducida (véase el cap. II), llegamos a que se verifica la igualdad idéntica

$$x^{2k} - 1 = (x^2 - 1)\,(x^{2(k-1)} + x^{2(k-2)} + \ldots + x^4 + x^2 + 1).$$

Por cuanto esta igualdad idéntica es válida, resulta que la ecuación (34) es equivalente, para $n = 2k$ ($k \geqslant 2$), al sistema de ecuaciones

$$x^2 - 1 = 0,\ x^{2(k-1)} + x^{2(k-2)} + \ldots + x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

La primera ecuación de este sistema tiene dos raíces, $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$, mientras que la segunda ecuación no tiene raíces reales, puesto que para cualquier $x$ real se verifica, evidentemente, la desigualdad

$$x^{2(k-1)} + x^{2(k-2)} + \ldots + x^4 + x^2 + 1 > 0.$$

Por consiguiente, para $n = 2k$, la ecuación (34) tiene dos raíces reales: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Así pues, cualquiera que sea $n$ impar, la ecuación (34) tiene una sola raíz real $x_1 = 1$, y para cualquier $n$ par, solamente dos raíces reales: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Razonando análogamente, podemos mostrar (véase el § 1 del cap. VII) que:

— para cualquier $a$ positivo la ecuación (33) tiene: 1) una sola raíz real $x_1 = \sqrt[n]{a}$, para cualquier $n$ impar, 2) solamente dos raíces reales, $x_1 = \sqrt[n]{a}$ y $x_2 = -\sqrt[n]{a}$, para cualquier $n$ par;

— cuando $a = 0$, la ecuación (33) tiene una sola raíz $x_1 = 0$;

— para cualquier $a$ negativo se puede mostrar (véase el § 1, cap. VII) que la ecuación (33) tiene: 1) una sola raíz real, $x_1 = -\sqrt[n]{-a}$, para cualquier $n$ impar, 2) no tiene raíces reales, cualquiera que sea $n$ par.

**Ejemplo.** Resuélvase la ecuación

$$x^3 + 8 = 0.$$

Por cuanto $n$ es impar en este caso ($n = 3$) y $a$ es negativo ($a = -8$), la ecuación dada tiene la única solución $x_1 = -2$.

**Ecuación trinomia.** La ecuación algebraica de la forma

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \tag{36}$$

se denomina *trinomia* a condición de que $n \geqslant 2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$. Cuando $n = 2$, la ecuación trinomia se llama, además, «*ecuación bicuadrada*». Al resolver la ecuación bicuadrada

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0) \tag{37}$$

su primer miembro se transforma por el método de «formación de cuadrado perfecto»:

$$ax^4 + bx^2 + c = a\left[\left(x^4 + 2x^2\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

En virtud de esta igualdad idéntica la ecuación (37) es equivalente a la siguiente

$$a\left[\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \quad (a \neq 0). \tag{38}$$

Es evidente que si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación (38) y, por lo tanto, la (37), equivalente a la (38), no tienen raíces.

Cuando $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación (38) adquiere la forma

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad (a \neq 0). \tag{39}$$

La ecuación (39) es, obviamente, equivalente a la ecuación

$$x^2 + \frac{b}{2a} = 0 \quad (a \neq 0). \tag{40}$$

De este modo, cuando $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación bicuadrada (37) es equivalente a la ecuación cuadrática (40), es decir, para $\frac{b}{2a} < 0$ tiene tan sólo dos raíces reales, $x_1 = \sqrt{-\frac{b}{2a}}$ y $x_2 = -\sqrt{-\frac{b}{2a}}$; para $\frac{b}{2a} = 0$, la única raíz $x_1 = 0$; para $\frac{b}{2a} > 0$, no tiene raíces.

En cambio, si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación (38) y, por consiguiente, la (37), que es equivalente a (38), son equivalentes al sisteme de ecuaciones $x^2 + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$ $(a \neq 0)$, $x^2 + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$ $(a \neq 0)$. Escribamos esta sistema en la forma equivalente

$$x^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a \neq 0), \qquad x^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a \neq 0). \tag{41}$$

Por cuanto los números que figuran en los segundos miembros de las ecuaciones del sistema (41) son raíces de la ecuación cuadrática

$$at^2 + bt + c = 0 \quad (a \neq 0), \tag{42}$$

que tiene discriminante positivo $D = b^2 - 4ac$, entonces el sistema de ecuaciones (41) puede ser escrito en la forma:

$$x^2 = t_1 \quad (a \neq 0), \quad x^2 = t_2 \quad (a \neq 0), \tag{43}$$

donde $t_1$ y $t_2$ son raíces de la ecuación (42).

Hemos mostrado, pues, que para resolver la ecuación bicuadrada (37) se debe resolver al principio la ecuación cuadrática (42), con la particularidad de que, si la ecuación cuadrática (42) no tiene raíces reales, es decir, si su discriminante es negativo, la ecuación (37) tampoco tendrá raíces; si el discriminante de la ecuación (42) es nulo, la ecuación (37) será equivalente a la ecuación cuadrática (40) que se resuelve con facilidad; por fin, si el discriminante de la ecuación (42) es positivo, la ecuación (37) será equivalente al sistema de ecuaciones (41). Cada una de las ecuaciones del sistema (41) es cuadrática, razón por la cual las raíces de dicho sistema y, por consiguiente, las raíces de la ecuación (37), equivalente al sistema citado, se hallan fácilmente.

**Ejemplo.** Resuélvase la ecuación bicuadrada

$$x^4 - x^2 - 6 = 0. \tag{44}$$

Con el fin de resolver la ecuación (44) resolvamos al principio la ecuación cuadrática $t^2 - t - 6 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $t_1 = -2$, $t_2 = 3$. Por eso, la ecuación (44) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$x^2 = -2, \quad x^3 = 3.$$

La primera ecuación de este sistema no tiene raíces reales, mientras que la segunda tiene tan sólo dos raíces: $x_1 = \sqrt{3}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$. Quiere decir, la ecuación (44) también tiene solamente dos raíces: $x_1 = \sqrt{3}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$.

Cuando $n > 2$, para resolver la ecuación trinomia

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \quad (a \neq 0),$$

el primer miembro de ésta también se transforma por el método de «formación de cuadrado perfecto»

$$ax^{2n} + bx^n + c = a\left[\left(x^n + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]. \tag{45}$$

En virtud de esta igualdad idéntica, la ecuación (36) es equivalente a la ecuación

$$\left(x^n + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (a \neq 0). \tag{46}$$

Es evidente que si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación (46), y, por tanto, la ecuación (36) no tienen raíces.

Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación (46) es equivalente a la ecuación binomia

$$x^n + \frac{b}{2a} = 0 \quad (a \neq 0). \tag{47}$$

Por consiguiente, cuando $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación trinomia (36) es equivalente a la ecuación binomia (47), cuya resolución fue examinada en el punto antecedente.

En cambio, si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación (46) es equivalente al sistema de ecuaciones binomias

$$x^n + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0 \ (a \neq 0), \quad x^n + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0 \ (a \neq 0), \tag{48}$$

cuya solución, como se mostró más arriba, puede ser determinada.

**Ejemplo.** Resuélvase la ecuación trinomia

$$x^6 + 3x^3 + 2 = 0. \tag{49}$$

Puesto que la ecuación dada es equivalente al sistema de dos ecuaciones binomias

$$x^3 + 2 = 0, \quad x^3 + 1 = 0,$$

entonces, resolviéndolas, obtendremos que la ecuación (49) tiene solamente dos raíces reales, $x_1 = -\sqrt[3]{2}$ y $x_2 = -1$.

**Observación.** Hemos mostrado más arriba cómo se resuelven cualquier ecuación de primer grado y cualquier ecuación cuadrática y se obtienen las fórmulas correspondientes para determinar sus raíces. En lo que se refiere a las ecuaciones de grado superior a dos, se examinaron algunos ejemplos sueltos. Esto se debe a lo siguiente: aunque existen fórmulas para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grados, ellas son demasiado engorrosas y por esta razón se emplean muy raras veces, mientras que para las ecuaciones de grados quinto y superiores tales fórmulas no existen en general. Al mismo tiempo cabe notar que si todos los coeficientes del polinomio $P(x)$ en la ecuación (4) son números enteros (o racionales), entonces para la determinación de las raíces enteras (o racionales) de la ecuación (4), puede aplicarse el teorema sobre las raíces enteras (o racionales) de un polinomio (véase el cap. II).

## § 2. Desigualdades con una sola incógnita

**Conceptos y definiciones principales.** Supongamos que se pide resolver la desigualdad

$$R(x) > Q(x) \text{ [o bien } R(x) < Q(x)\text{]}, \tag{1}$$

donde $R(x)$ y $Q(x)$ son ciertos polinomios, enteros (véase el cap. II) respecto de una letra $x$. La letra $x$ se llama desconocida o, simplemen-

te, *incógnita*; la desigualdad (1) lleva el nombre de *desigualdad algebraica con una sola incógnita.*

Por cuanto el CVA de los polinomios $R(x)$ y $Q(x)$ se compone de todos los números reales, el problema sobre la resolución de la desigualdad (1) puede enunciarse así: hállense todos los valores numéricos de la letra $x$, cada uno de los cuales convierte la desigualdad (1) en una desigualdad numérica que se verifica. Cada valor numérico semejante recibe el nombre de *solución* de la desigualdad (1). Por eso, resolver la desigualdad (1) significa hallar el conjunto de todas sus soluciones. Si resulta que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (1) es un conjunto vacío, se dice que la desigualdad (1) no tiene soluciones.

Dos desigualdades algebraicas $R(x) > Q(x)$ y $T(x) < S(x)$ se denominan *equivalentes*, si cualquier solución de la primera desigualdad es también solución de la segunda y, viceversa, cualquier solución de la segunda desigualdad es solución de la primera. En virtud de esta definición, son equivalentes cualesquiera dos desigualdades que no tienen soluciones. La sustitución de una desigualdad por otra, equivalente a la primera, recibe el nombre de *paso equivalente* de una desigualdad a la otra. El paso equivalente suele designarse con una flecha doble $\Leftrightarrow$. La escritura

$$R(x) > Q(x) \Leftrightarrow T(x) < S(x)$$

significa que las desigualdades $R(x) > Q(x)$ y $T(x) < S(x)$ son equivalentes.

Demos a conocer algunas afirmaciones con cuya ayuda se realizarán los pasos equivalentes.

1. *Las desigualdades* $R(x) > Q(x)$ *y* $R(x) - Q(x) > 0$ *son equivalentes.*

2. *Las desigualdades* $R(x) > Q(x)$ *y* $R(x) + \alpha > Q(x) + \alpha$ *son equivalentes para cualquier número real* $\alpha$.

3. a) *Las desigualdades* $R(x) > Q(x)$ *y* $\alpha R(x) > \alpha Q(x)$ *son equivalentes para cualquier número positivo* $\alpha$.

b) *Las desigualdades* $R(x) > Q(x)$ *y* $\alpha R(x) < \alpha Q(x)$ *son equivalentes para cualquier número negativo* $\alpha$.

4. *Supongamos que se conoce que para cualquier número real* $x$ *se verifica la igualdad* $R(x) = T(x)$, *entonces son equivalentes las desigualdades* $R(x) > Q(x)$ *y* $T(x) > Q(x)$.

Por cuanto las demostraciones de dichas afirmaciones son similares, demostremos sólo la afirmación 1. Sea $x_1$ una solución de la desigualdad $R(x) > Q(x)$, es decir, supongamos que se verifica la desigualdad numérica $R(x_1) > Q(x_1)$. Entonces, de acuerdo con la propiedad de las desigualdades numéricas, se verifica también la desigualdad numérica $R(x_1) - Q(x_1) > 0$. La validez de esta desigualdad numérica significa que el número $x_1$ es solución de la desigualdad $R(x) - Q(x) > 0$. Por cuanto semejante razonamiento puede efectuarse para cualquier solución de la desigualdad $R(x) >$ $> Q(x)$, entonces cualquier solución de la desigualdad $R(x) >$

$> Q(x)$ será también solución de la desigualdad $R(x) - Q(x) > 0$.

Mostremos, ahora, lo contrario. Supongamos que el número $x_2$ es una solución de la desigualdad $R(x) - Q(x) > 0$, es decir, que se verifica la desigualdad numérica $R(x_2) - Q(x_2) > 0$. De la validez de la última desigualdad proviene la validez de la desigualdad numérica $R(x_2) > Q(x_2)$ y esto significa que el número $x_2$ es la solución de la desigualdad $R(x) > Q(x)$. Por cuanto semejante razonamiento puede llevarse a cabo para toda solución de la desigualdad $R(x) - Q(x) > 0$, cualquier solución de la desigualdad $R(x) - Q(x) > 0$ es también solución de la desigualdad $R(x) > Q(x)$. Quiere decir, si cada una de las desigualdades $R(x) > Q(x)$ y $R(x) - Q(x) > 0$ tiene solución, ellas son equivalentes.

De lo demostrado se deduce que si una de las desigualdades $R(x) > Q(x)$ ó $R(x) - Q(x) > 0$ no tiene soluciones, la otra tampoco las tiene, es decir, en este caso las desigualdades $R(x) > Q(x)$ y $R(x) - Q(x) > 0$ son también equivalentes. La afirmación 1 está demostrada.

De las afirmaciones 1 y 4 se desprende que cada desigualdad algebraica puede ser reducida o bien a la forma $P(x) > 0$, o bien a la forma $P(x) < 0$, por lo cual resulta suficiente analizar sólo las desigualdades del tipo

$$P(x) > 0 \tag{2}$$

y

$$P(x) < 0 \tag{3}$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado $n$, entero respecto de la letra $x$, es decir,

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a \neq 0).$$

Las desigualdades de esta índole se denominan desigualdades algebraicas de grado $n$.

**Desigualdades de primer grado. Método de intervalos.** Supongamos que se pide resolver la desigualdad

$$a_0x + a_1 > 0 \quad (a_0 \neq 0), \tag{4}$$

la cual se denomina *desigualdad de primer grado*. En virtud de la afirmación 2, la desigualdad (4) es equivalente a la desigualdad

$$a_0x > -a_1 \quad (a_0 \neq 0). \tag{5}$$

Examinemos los casos de $a_0 > 0$ y $a_0 < 0$. Sea $a_0 > 0$, entonces, teniendo presente la afirmación 3a), la desigualdad (5) es equivalente a la desigualdad

$$x > -\frac{a_1}{a_0} \quad (a_0 \neq 0). \tag{6}$$

Es evidente que cualquier $x$ del intervalo $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ satisface la desigualdad (6). Por consiguiente, el conjunto de todas las solu-

ciones de la desigualdad (6) es el intervalo $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ (fig. 11). Por cuanto la desigualdad (4) es equivalente, para $a_0>0$, a la desigualdad (6), el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (4) también será el intervalo $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$. Todos los pasos equivalentes de la desigualdad (4) a la desigualdad (5) y,




Fig. 11

luego, a la desigualdad evidente (6) se escriben más brevemente en forma de la siguiente cadena de pasos equivalentes:

$$a_0x+a_1>0\,(a_0>0) \Leftrightarrow a_0x>-a_1\,(a_0>0) \Leftrightarrow x>-\frac{a_1}{a_0}\,(a_0>0).$$

Análogamente, se verifican las siguientes cadenas de pasos equivalentes:

$$a_0x+a_1>0\,(a_0<0) \Leftrightarrow a_0x>-a_1\,(a_0<0) \Leftrightarrow x<-\frac{a_1}{a_0}\,(a_0<0);$$

$$a_0x+a_1<0\,(a_0>0) \Leftrightarrow a_0x<-a_1\,(a_0>0) \Leftrightarrow x<-\frac{a_1}{a_0}\,(a_0>0);$$

$$a_0x+a_1<0\,(a_0<0) \Leftrightarrow a_0x<-a_1\,(a_0<0) \Leftrightarrow x>-\frac{a_1}{a_0}\,(a_0<0).$$

A partir de la última desigualdad en cada una de estas cadenas se halla fácilmente el conjunto de todas las soluciones de la primera desigualdad de la cadena dada (con la restricción indicada sobre $a_0$). Así pues, la solución de la desigualdad $a_0x+a_1>0$, para $a_0<0$, se representa por el intervalo $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$; la solución de la desigualdad $a_0x+a_1<0$, para $a_0>0$, es el intervalo $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$; y la solución de la desigualdad $a_0x+a_1<0$, para $a_0<0$, es el intervalo $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$.

Todo lo expuesto más arriba concerniente a la resolución de las desigualdades de primer grado se enuncia, a menudo, así: un polinomio de primer grado $a_0x+a_1$ $(a_0\neq 0)$:

a) es positivo, cuando $a_0>0$, para cualquier $x\in\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ y negativo para cualquier $x\in\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$,

b) es positivo, cuando $a_0<0$, para cualquier $x\in\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$ y negativo, para cualquier $x\in\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$.

En particular, el binomio $(x - \alpha)$ es positivo para todos los $x$ que se ubican en el eje numérico a la derecha respecto del punto que representa el número $\alpha$, y negativo para todo $x$ que se dispone a la izquierda del punto mencionado. En otras palabras, el punto $\alpha$ divide el eje numérico en dos partes: en la parte dispuesta a la derecha del punto $\alpha$ el binomio $(x - \alpha)$ es positivo, y en la otra parte, dispuesta a la izquierda del punto $\alpha$, negativo.

En esta propiedad del polinomio $(x - \alpha)$ se basa el *método de intervalos* y se emplea con frecuencia para resolver las desigualdades algebraicas de grados superiores.

Supongamos que se pide resolver la desigualdad

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n) > 0 \qquad (7)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ son ciertos números fijos, entre los cuales no hay iguales, y, además, tales que $\alpha_1 < \alpha_2 \ldots < \alpha_{n-1} < < \alpha_n$.

Examinemos el polinomio

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n). \qquad (8)$$

En virtud de la observación hecha más arriba resulta obvio que para cualquier número $x_0$ tal que $x_0 > \alpha_n$, el valor numérico correspondiente de todo factor en el producto (8) es positivo y, por esta razón,

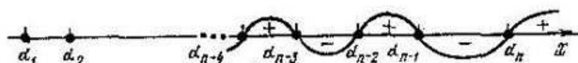



Fig. 12

el correspondiente valor numérico $P(x_0)$ del polinomio $P(x)$ es también positivo. Para cualquier número $x_1$, elegido del intervalo $(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$, el valor numérico correspondiente del último factor es negativo, y el valor numérico correspondiente de cualquiera de los factores restantes es positivo, por lo cual el número $P(x_1)$ es negativo; análogamente, para todo número $x_2$, perteneciente al intervalo $(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1})$, el número $P(x_2)$ es positivo, etc.

Precisamente en este razonamiento se basa el *método de intervalos* que consiste en lo siguiente: en la recta numérica se marcan los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$; en el intervalo, que se encuentra a la derecha del número mayor, se pone el signo más, en el intervalo siguiente, que va de derecha a izquierda, se pone el signo menos, luego, el signo más, luego, el signo menos, etc. (fig. 12). Entonces el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7) será la unión de todos los intervalos que llevan el signo más.

El método de intervalos permite resolver aquellas desigualdades algebraicas que pueden reducirse, mediante una cadena de pasos equivalente, a las desigualdades del tipo (7).

**Ejemplo.** Resuélvase la desigualdad

$$(x-3)(2+x)(4-x)>0. \qquad (9)$$

Al multiplicar la desigualdad (9) por (—1), obtendremos una desigualdad, equivalente a la (9):

$$[x-(-2)](x-3)(x-4)<0. \qquad (10)$$

Apliquemos el método de intervalos para resolver la desigualdad (10): en la recta numérica marcamos los números (—2), 3, 4. En los intervalos ponemos, de derecha a izquierda, los signos más y menos (fig. 13). El conjunto de todas las $x$, pertenecientes a los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(3, 4)$, representa el conjunto de todas las soluciones

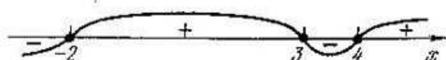



Fig. 13

de la desigualdad (10). Ya que la desigualdad (9) es equivalente a la (10), el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) es el conjunto $(-\infty, -2) \cup (3, 4)$.

**Desigualdad cuadrática.** Apliquemos el método de intervalos a la resolución de las desigualdades algebraicas de segundo grado. Se llaman, corrientemente, desigualdades *cuadráticas*. Analicemos la desigualdad cuadrática

$$ax^2+bx+c>0 \quad (a\neq 0). \qquad (11)$$

Realizando la transformación idéntica de «formación de cuadrado perfecto» (véase el § 1, cap. III), obtenemos

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right],$$

donde $D=b^2-4ac$. Por eso, la desigualdad (11) es equivalente a la desigualdad

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right]>0 \quad (a\neq 0). \qquad (12)$$

Sea $a>0$. Entonces, la desigualdad (12) es equivalente a la desigualdad

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}>0 \quad (a>0). \qquad (13)$$

a) Si $D<0$, entonces, cualquiera que sea el valor numérico de la incógnita $x=x_0$, en el primer miembro de la desigualdad (13) figura la suma del número no negativo $\left((x_0+\frac{b}{2a}\right)^2$ con el número positivo $\left(-\frac{D}{4a^2}\right)$, es decir, la desigualdad (13) se convierte en una desigualdad numérica que se verifica. Por consiguiente, la desigual-

dad (13) es válida para cualquier $x$. En otras palabras, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (13) es en este caso el conjunto de todos los números reales.

b) Si $D = 0$, entonces, obviamente, la desigualdad (13) se convierte en una lícita desigualdad numérica para todo $x$, a excepción del número $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (13) será en este caso el conjunto $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

c) Si $D > 0$, entonces la desigualdad (13) es equivalente a la desigualdad

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0 \quad (a > 0), \tag{14}$$

donde $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. Es evidente que $x_1 < x_2$, razón por la cual, al aplicar el método de intervalos, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) será el conjunto $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$.

Sea $a < 0$. Entonces, la desigualdad (12) es equivalente a la desigualdad

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} < 0 \quad (a < 0). \tag{15}$$

a) Si $D < 0$, resulta evidente que para todo número $x$ esta desigualdad se convierte en una desigualdad ilícita, por lo cual la desigualdad (15) no tiene soluciones.

b) Si $D = 0$, resulta también evidente que la desigualdad (15) no tiene soluciones.

c) Si $D > 0$, la desigualdad (15) será equivalente a la desigualdad

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0 \quad (a < 0), \tag{16}$$

donde $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. Es obvio que $x_1 > x_2$, y por ello, al aplicar el método de intervalos, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (16) es el intervalo $(x_2; x_1)$.

De modo análogo se efectúa la resolución de la desigualdad $ax^2 + bx + c < 0$ $(a \neq 0)$. Los razonamientos aducidos pueden reunirse juntos formando la Tabla 1.

Hemos de notar que esta tabla no debe retenerse en la memoria, pues para resolver una desigualdad cuadrática concreta resulta mejor repetir cada vez los razonamientos realizados más arriba.

**Ejemplo.** Resuélvase la desigualdad

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

*Tabla 1*

| $a$ | $D$ | Desigualdad | Solución de la desigualdad |
| --- | --- | --- | --- |
| $a>0$ | $D>0$ | $ax^2+bx+c>0$ | $\left(-\infty, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, +\infty\right)$ |
| $a>0$ | $D>0$ | $ax^2+bx+c<0$ | $\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)$ |
| $a>0$ | $D=0$ | $ax^2+bx+c>0$ | $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ |
| $a>0$ | $D=0$ | $ax^2+bx+c<0$ | no hay soluciones |
| $a>0$ | $D<0$ | $ax^2+bx+c>0$ | $(-\infty, +\infty)$ |
| $a>0$ | $D<0$ | $ax^2+bx+c<0$ | no hay soluciones |
| $a<0$ | $D>0$ | $ax^2+bx+c>0$ | $\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)$ |
| $a<0$ | $D>0$ | $ax^2+bx+c<0$ | $\left(-\infty, \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}, +\infty\right)$ |
| $a<0$ | $D=0$ | $ax^2+bx+c>0$ | no hay soluciones |
| $a<0$ | $D=0$ | $ax^2+bx+c<0$ | $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ |
| $a<0$ | $D<0$ | $ax^2+bx+c>0$ | no hay soluciones |
| $a<0$ | $D<0$ | $ax^2+bx+c<0$ | $(-\infty, +\infty)$ |

Por cuanto las raíces del trinomio de segundo grado $P(x) = x^2 - x - 6$ son $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$, entonces $P(x) = (x-3) \times (x+2)$.

Quiere decir, la desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$(x-3)(x+2) < 0.$$

Al aplicar el método de intervalos a la última desigualdad (fig. 14). llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida es el intervalo $(-2; 3)$.




Fig. 14

**Método de intervalos generalizado.** Algunas desigualdades algebraicas de grados superiores a dos se reducen, mediante una cadena de pasos equivalentes, a la forma

$$(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_{n-1})^{k_{n-1}}(x-\alpha_n)^{k_n} > 0, \qquad (17)$$

donde $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n$ son números naturales fijos, y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$, números reales fijos, entre los cuales no hay iguales, y tales que $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$ (indiquemos que si al menos uno de los números $k_i \geqslant 2$, entonces el método de intervalos aducido anteriormente no puede ser aplicado para la resolución de la desigualdad (17)). Entonces, las desigualdades del tipo (17) se resuelven por el así llamado *método de intervalos generalizado*. Examinemos el polinomio

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_{n-1})^{k_{n-1}}(x-\alpha_n)^{k_n}. \qquad (18)$$

Es evidente que para cualquier número $x_0$ tal que $x_0 > \alpha_n$, el valor correspondiente de todo factor en el producto (18) es positivo, debido a lo cual el valor numérico $P(x_0)$ del polinomio $P(x)$ es también positivo.

Para cualquier número $x_1$, elegido dentro del intervalo $(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$, el valor numérico correspondiente de todo factor, a excepción del último, es positivo; el valor numérico correspondiente del último factor es positivo, si $k_n$ es un número par, y negativo, si $k_n$ es un número impar. Por eso, el número $P(x_1)$ es positivo, si $k_n$ es un número par, y el número $P(x_1)$ es negativo, si $k_n$ es impar. En estos casos suele decirse, habitualmente, que el polinomio $P(x)$ cambia de signo, al pasar por el punto $\alpha_n$, si $k_n$ es un número impar, y no cambia de signo, si $k_n$ es un número par.

Análogamente se muestra que si se conoce el signo del polinomio $P(x)$ en el intervalo $(\alpha_i, \alpha_{i+1})$, entonces en el intervalo $(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$ el signo se determina según la siguiente regla: el polinomio $P(x)$ cambia de signo, al pasar por el punto $\alpha_i$, si $k_i$ es un número impar,

y no cambia de signo, si $k_i$ es un número par. Precisamente en estos razonamientos está basado el método de intervalos generalizado: en el eje numérico se marcan los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$; en el intervalo dispuesto a la derecha del número mayor, es decir, a la derecha de $\alpha_n$, se pone el signo más, en el intervalo que sigue tras el primero de derecha a izquierda se pone el signo más, si $k_n$ es un número par, y el signo menos, si $k_n$ es un número impar; en el siguiente intervalo de derecha a izquierda se pone el signo, rigiéndose por la siguiente regla: el polinomio $P(x)$ cambia de signo, al pasar por el punto $\alpha_{n-1}$, si $k_{n-1}$ es un número impar, y conserva el signo

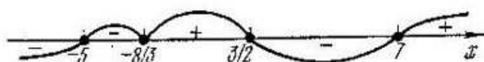



Fig. 15

invariable, si $k_{n-1}$ es un número par; a continuación se examina el intervalo siguiente que va de derecha a izquierda y se pone en él el signo, rigiéndose por la misma regla; de esta manera se analizan todos los intervalos.

La solución de la desigualdad (17) será la unión de todos los intervalos en los cuales se ha puesto el signo más.

**Ejemplo.** Resuélvase la desigualdad

$$(x+5)(2x-3)^5(-x+7)^3(3x+8)^2<0. \qquad (19)$$

Al multiplicar esta desigualdad por $\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$, obtendremos, ante todo, una desiguldad equivalente a (19):

$$[x-(-5)]\left[x-\left(-\frac{8}{3}\right)\right]^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^5(x-7)^3>0. \qquad (20)$$

Con el fin de resolver la desigualdad (20) apliquemos el método de intervalos generalizado. En el eje numérico marquemos los números $(-5)$, $\left(-\frac{8}{3}\right)$, $\frac{3}{2}$, 7 (fig. 15). A la derecha del número mayor, es decir, del número 7, ponemos el signo más. Al pasar por el punto (7), el polinomio

$$P(x)=[x-(-5)]\left[x-\left(-\frac{8}{3}\right)\right]^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^5(x-7)^3 \qquad (21)$$

cambia de signo, puesto que el binomio $(x-7)$ está contenido en el producto (21) elevado a una potencia impar, razón por la cual ponemos en el intervalo $\left(\frac{3}{2}, 7\right)$ el signo menos. Al pasar por el punto $\left(\frac{3}{2}\right)$, el polinomio $P(x)$ cambia de signo, puesto que el binomio $\left(x-\frac{3}{2}\right)$ está contenido en el producto (21) elevado a una potencia impar, y por esta razón ponemos en el intervalo $\left(-\frac{8}{3}, \frac{3}{2}\right)$

el signo más. Al pasar por el punto $\left(-\frac{8}{3}\right)$ el polinomio $P(x)$ no cambia de signo, puesto que en el producto (21) el binomio $\left[x-\left(-\frac{8}{3}\right)\right]$ está contenido elevado a una potencia par, por lo cual en el intervalo $\left(-5, -\frac{8}{3}\right)$ ponemos el signo más. Por fin, al pasar por el punto $(-5)$, el polinomio $P(x)$ cambia de signo, puesto que el binomio $[x-(-5)]$ figura en el producto (21) a la primera potencia, por lo cual ponemos en el intervalo $(-\infty, -5)$ el signo menos. Así pues, la solución de la desigualdad (20) y de la (19), equivalente a la (20), representa el conjunto de todos los intervalos con el signo más, es decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (19) es el conjunto $\left(-5, -\frac{8}{3}\right) \cup \left(-\frac{8}{3}, \frac{3}{2}\right) \cup (7, +\infty)$.

**Desigualdades no estrictas.** Pasemos ahora a la resolución de las desigualdades no estrictas

$$P(x) \geqslant 0, \tag{22}$$

$$P(x) \leqslant 0. \tag{23}$$

Si cierto número $x_0$ es la solución de la desigualdad (22), se verificará la desigualdad numérica $P(x_0) \geqslant 0$. Entonces, debido a la definición del signo no estricto de una desigualdad, se verifica o bien la igualdad numérica $P(x_0) = 0$, o bien la desigualdad numérica $P(x_0) > 0$. En otras palabras, si el número $x_0$ es la solución de la desigualdad (22), entonces dicho número es o bien la solución de la ecuación $P(x) = 0$, o bién, de la desigualdad $P(x) > 0$. Esto puede decirse sobre cualquier solución de la desigualdad $P(x) \geqslant 0$. Del modo análogo se muestra que toda solución de la desigualdad $P(x) > 0$ y toda solución de la ecuación $P(x) = 0$ es también la solución de la desigualdad (22).

De este modo, el conjunto de soluciones de la desigualdad no estricta (22) representa la unión de dos conjuntos: el de todas las soluciones de la desigualdad estricta $P(x) > 0$ y el de todas las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

Análogamente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad no estricta (23) es la unión de dos conjuntos: el de todas las soluciones de la desigualdad estricta $P(x) < 0$ y el de todas las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.

En esto precisamente está basado el *principio de resolución de las desigualdades no estrictas*. Se resuelven primeramente la desigualdad estricta y la ecuación correspondiente después de lo cual se reúnen los conjuntos de soluciones de la desigualdad estricta y de la ecuación; la unión de dichos conjuntos es precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad no estricta.

**Ejemplos.** 1. Resuélvase la desigualdad no estricta de primer

grado:

$$a_0x + a_1 \geqslant 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{24}$$

Resolvamos primeramente la ecuación

$$a_0x + a_1 = 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{25}$$

Su única solución es el número $\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)$. Luego resolvamos la disigualdad

$$a_0x + a_1 > 0 \quad (a_0 \neq 0). \tag{26}$$

Cuando $a_0 > 0$, el conjunto de todas sus soluciones es el conjunto $\left(-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$; cuando $a_0 < 0$, el conjunto de todas sus soluciones es el conjunto $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right)$. Al reunir las soluciones de la ecuación (25) y de la desigualdad (26), obtenemos: para $a_0 > 0$ el



Fig. 16

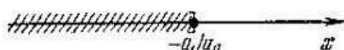


Fig. 17

conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (24) es el conjunto $\left[-\frac{a_1}{a_0}, +\infty\right)$ (fig. 16); para $a_0 < 0$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (24) es el conjunto $\left(-\infty, -\frac{a_1}{a_0}\right]$ (fig. 17).

2. Resuélvase la desigualdad

$$(x^2 - 3x + 2)(x^3 - 3x^2)(4 - x^2) \geqslant 0. \tag{27}$$

Por cuanto son válidas las igualdades idénticas siguientes

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1),$$
$$x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3),$$
$$4 - x^2 = -(x - 2)(x + 2),$$

entonces, de acuerdo con las afirmaciones 4 y 3b) de este párrafo, la desigualdad (27) es equivalente a la desigualdad

$$[x - (-2)]\, x^2 (x - 1)(x - 2)^2 (x - 3) \leqslant 0. \tag{28}$$

Resolvamos primeramente la ecuación

$$[x - (-2)]\, x^2 (x - 1)(x - 2)^2 (x - 3) = 0. \tag{29}$$

Tiene solamente cinco raíces: $x = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_3 = 3$. Luego resolvamos la desigualdad estricta

$$[x - (-2)]\, x^2 (x - 1)(x - 2)^2 (x - 3) < 0 \tag{30}$$

aplicando el método de intervalos generalizado (fig. 18). El conjunto de todas sus soluciones será el conjunto $(-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup$ $\cup (2; 3)$. Reuniendo el conjunto de soluciones de la ecuación (29) y

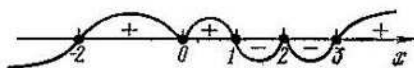



Fig. 18

de la desigualdad estricta (30), obtenemos el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (28) y, en virtud de que el paso es equivalente, de la desigualdad (27).

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (27) es el conjunto $(-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [1; 3]$.

## § 3. Ecuaciones con dos incógnitas

**Conceptos principales.** Sea dada la ecuación

$$R(x, y) = Q(x, y), \qquad (1)$$

donde $R(x, y)$, $Q(x, y)$ son polinomios, enteros (véase el § 3, cap. II) con respecto a dos letras $x$ e $y$. En este caso se dice que está dada una *ecuación algebraica con dos incógnitas $x$ e $y$*. El par ordenado $(x, y)$ se denomina *colección de incógnitas* de la ecuación (1). El CVA de la ecuación (1) es el conjunto de todos los pares $(x, y)$, donde las letras $x$ e $y$ pueden ser números reales cualesquiera.

La colección numérica $(x_0, y_0)$, correspondiente a la colección de incógnitas $(x, y)$ se llama *solución de la ecuación* (1), si son iguales los valores numéricos de los polinomios $R$ y $Q$ que corresponden a dicha colección numérica, es decir, si se verifica la igualdad numérica $R(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0)$. *Resolver la ecuación* (1) signiifca determinar el conjunto de todas sus soluciones, es decir, hallar todas las colecciones numéricas, cada una de las cuales convierte la ecuación (1) en una igualdad numérica lícita. Si el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (1) consta de $k$ pares de números reales $(x_1, y_1)$; $(x_2, y_2)$; . . . ; $(x_k, y_k)$, se dice que la ecuación (1) tiene tan sólo $k$ *soluciones*, es decir, el conjunto de todas las soluciones es el conjunto $M = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k)\}$. Si, en cambio, el conjunto de todas las soluciones consta de un solo par $(x_1, y_1)$, se dice que la ecuación (1) tiene la *única solución*. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ tiene la única solución $(x, y)$: $(0, 0)$. Cuando el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (1) es vacío, se dice que la ecuación (1) *no tiene soluciones*. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 =$ $= -1$ no tiene soluciones.

Sean dadas dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas:

$$R(x, y) = Q(x, y) \text{ y } T(x, y) = S(x, y).$$

Estas ecuaciones se llaman *equivalentes*, si cualquier solución de la primera ecuación es a la vez solución de la segunda ecuación y toda solución de la segunda ecuación es solución de la primera. En virtud de esta definición, son equivalentes cualesquiera dos ecuaciones que no tienen soluciones.

La sustitución de una ecuación por otra, equivalente a la primera, se denomina *paso equivalente* de la primera ecuación a la segunda.

Son válidas las siguientes **afirmaciones:**

1. *Las ecuaciones* $R(x, y) = Q(x, y)$ *y* $R(x, y) - Q(x, y) = 0$ *son equivalentes.*

2. *Las ecuaciones* $R(x, y) = Q(x, y)$ *y* $R(x, y) + S(x, y) = Q(x, y) + S(x, y)$, *donde* $S(x, y)$ *es un polinomio cualquiera entero respecto a las letras* $x$ *e* $y$, *son equivalentes.*

3. *Las ecuaciones* $R(x, y) = Q(x, y)$ *y* $\alpha R(x, y) = \alpha Q(x, y)$ *son equivalentes para cualquier número real* $\alpha$ *distinto de cero.*

4. *Supongamos que es válida la igualdad idéntica* $R(x, y) = T(x, y)$, *entonces las ecuaciones* $R(x, y) = Q(x, y)$ *y* $T(x, y) = Q(x, y)$ *son equivalentes.*

La validez de estas afirmaciones se demuestra igual que en el caso de las afirmaciones en el § 1, razón por la cual la demostración aquí se omite. De las afirmaciones 1 y 4 se deduce que cada ecuación algebraica con dos incógnitas $x$ e $y$ puede ser reducida a la forma $P(x, y) = 0$, por lo cual sólo podemos analizar la ecuación del tipo

$$P(x, y) = 0, \qquad \textbf{(2)}$$

donde $P(x, y)$ es un polinomio entero respecto a las letras $x$ e $y$. Para ilustrar geométricamente el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (2) resulta conveniente introducir un sistema de coordenadas en el plano.

**Sistema rectangular (cartesiano) de coordenadas en un plano.** Si se indica el método que permite establecer la posición de los puntos en el plano prefijando los pares de números, suele decirse que *en el plano viene dado un sistema de coordenadas*. El propio plano se llama en este caso *plano de coordenadas.* Veamos el sistema de coordenadas más simple que se usa con mayor frecuencia y que se denomina *rectangular* o *cartesiano.*

Sea dado un segmento cuya longitud se toma como unidad de medición de la longitud en el plano, es decir, supongamos que se ha introducido la escala. Supongamos, además, que están dadas dos rectas recíprocamente perpendiculares. Convengamos en considerar que el punto de intersección de las rectas es el origen de coordenadas. Definamos en cada recta la dirección positiva y marquemos en ambas, a partir del origen de coordenadas, el segmento unidad prefijado. De este modo, en cada recta queda introducido su propio sistema de coordenadas (véase el § 5, cap. I); las rectas mencionadas se denominan *rectas coordenadas* y, también, *ejes coordenados*, con la par-

ticularidad de que uno de ellos se denomina *eje de abscisas* y el otro, *eje de ordenadas.*

Si en un plano queda introducida la escala y vienen dados dos ejes coordenados recíprocamente perpendiculares y si se sabe cuál de dichos ejes es el de abscisas y cuál, el de ordenadas, suele decirse que en el plano está dado el *sistema rectangular de coordenadas.*

Designemos el origen de coordenadas con la letra $O$, el eje de abscisas con las letras $Ox$ y el eje de ordenadas, con $Oy$. En los dibujos los ejes coordenados se disponen, corrientemente, de tal modo que el eje de abscisas sea horizontal y su semieje positivo esté orientado a la derecha, mientras que el semieje positivo de ordenadas, hacia arriba (fig. 19).

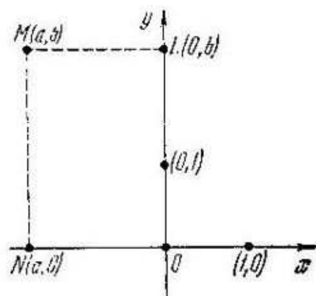


Fig. 19

Sea $M$ un punto cualquiera del plano de coordenadas. Tracemos por el punto $M$ rectas, paralelas a los ejes coordenados. Supongamos que la recta que pasa por el punto $M$ y es paralela al eje $Oy$ corta el eje de abscisas en el punto $N$, y la recta que pasa por el punto $M$ paralelamente al eje $Ox$ corta el eje de ordenadas en el punto $L$ (véase la fig. 19). Por cuanto en los ejes están dados los sistemas de coordenadas, el punto $N$ tiene en el eje de abscisas del sistema de coordenadas una coordenada $a$, y el punto $L$ tiene en su sistema de coordenadas en el eje de ordenadas la coordenada $b$. Entonces, se denominan *coordenadas del punto* $M$ en el sistema elegido de coordenadas con los ejes $Ox$ y $Oy$ un *par ordenado de números* $(a, b)$. El número $a$ se llama primera coordenada o *abscisa del punto* $M$, el número $b$, segunda coordenada u *ordenada del punto* $M$. El hecho de que el punto $M$ tiene la abscisa $a$ y la ordenada $b$ se escribe del modo siguiente: $M(a, b)$ (primeramente se escribe la abscisa y luego, la ordenada del punto $M$).

Muy a menudo, cuando se estudian varios puntos fijos diferentes en el plano de coordenadas, éstos se designan con cierta letra mayúscula con diferentes números, por ejemplo, $M_1$, $M_2$, . . ., $M_n$, . . . . Las coordenadas de estos puntos se denotan con los números correspondientes: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, . . ., $M_n(x_n, y_n)$, . . .

Dado que por cualquier punto del plano puede ser trazada solamente una recta, paralela al eje de coordenadas dado, y cada recta corta el eje correspondiente, perpendicular a ella, sólo en un punto, entonces a todo punto del plano de coordenadas le corresponde un solo par ordenado de números, es decir, las coordenadas de este punto.

Entre los puntos dispuestos en cualquier eje y el conjunto de números reales existe una correspondencia biunívoca (véase el

cap. 1), por consiguiente, a los distintos puntos del plano $xOy$ les corresponderán distintos pares ordenados de números reales. Así pues, si en un plano viene dado el sistema rectangular de coordenadas $xOy$, entonces entre el conjunto de puntos del plano y el conjunto de pares ordenados de números reales existe la siguiente **correspondencia**:

1. A todo punto del plano le corresponde sólo un par ordenado de números reales.

2. A dos puntos diferentes del plano les corresponden diferentes pares ordenados de números reales.

3. No existe un par ordenado de números reales que no corresponda a algún punto del plano.

La correspondencia de este género se llama *biunívoca*. De este modo, la introducción en el plano de un sistema rectangular de coordenadas permite establecer la correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los puntos del plano y el conjunto de pares ordenados de números reales. La correspondencia citada presta la posibilidad de reducir el estudio del conjunto de punto del plano al estudio del conjunto de pares de números reales, es decir, la posibilidad de aplicar al estudio de los problemas geométricos los métodos algebraicos.

Hagamos algunas **observaciones**:

1. *La abscisa* del punto $M$ *es igual a cero*, cuando, y sólo cuando, el punto $M$ se ubica en el eje $Oy$.

2. *La ordenada* del punto $M$ *es igual a cero*, cuando, y sólo cuando, el punto $M$ se ubica en el eje $Ox$.

3. El punto $O$, y sólo este punto, *que es el origen de coordenadas, tiene sus dos coordenadas nulas*.

4. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene ordenada positiva ($y > 0$) se llama *semiplano superior*.

5. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene ordenada negativa ($y < 0$) se llama *semiplano inferior*.

6. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene abscisa positiva ($x > 0$) se llama *semiplano derecho*.

7. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene abscisa negativa ($x < 0$) se llama *semiplano izquierdo*.

8. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene abscisa positiva ($x > 0$) y ordenada positiva ($y > 0$) se denomina *primer cuadrante de coordenadas*.

9. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene ordenada positiva ($y > 0$) y abscisa negativa ($x < 0$) se denomina *segundo cuadrante de coordenadas*.

10. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas

en el que todo punto tiene abscisa negativa ($x < 0$) y ordenada negativa ($y < 0$) se denomina *tercer cuadrante de coordenadas.*

11. El conjunto de todos los puntos de un plano de coordenadas en el que todo punto tiene ordenada negativa ($y < 0$) y abscisa positiva ($x > 0$) se denomina *cuarto cuadrante de coordenadas.*

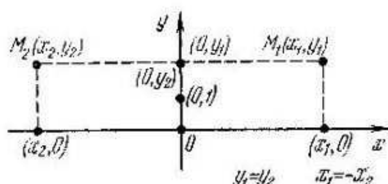



Fig. 20

12. Dos puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$ se llaman *simétricos con relación al eje de ordenadas,* si sus coordenadas son tales que $x_1 = -x_2$ e $y_1 = y_2$ (fig. 20); *simétricos con relación al eje de abscisas,* si sus coordenadas son tales que $x_1 = x_2$ e $y_1 = -y_2$ (fig. 21); *simétricos con relación al origen de coordenadas,* si sus coordenadas son tales que $x_1 = -x_2$ e $y_1 = -y_2$ (fig. 22).

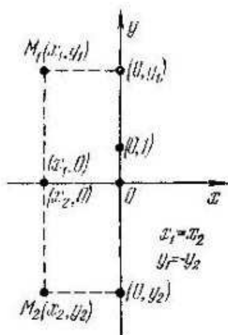



Fig. 21

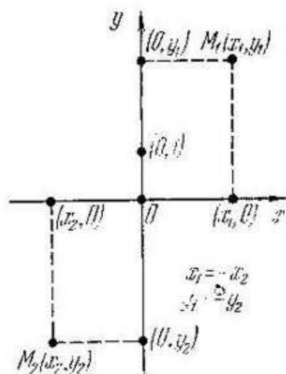



Fig. 22

**Teorema 1.** *Cualquiera que sea la disposición de dos puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$ en el plano de coordenadas, el cuadrado de la distancia entre ellos (es decir, el cuadrado de la longitud del segmento $M_1M_2$) se determina por la fórmula $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, o sea, el cuadrado de la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano de coordenadas es igual a la suma de los cuadrados de las diferencias entre las coordenadas homónimas.*

**Demostración.** Sean dados dos puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$ que no coinciden. La recta $M_1M_2$ puede ser:

a) paralela al eje $Oy$ (o coincidente con éste);

b) paralela al eje $Ox$ (o coincidente con éste);

c) no paralela al eje $Oy$, ni tampoco al $Ox$. La demostración del teorema se realizará para cada uno de estos casos por separado.

a) Supongamos que la recta en que se disponen los puntos $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$ es paralela al eje $Oy$ (o coincide con éste). Entonces, cualquier punto dispuesto en esta recta tendrá una misma abscisa, es decir, los puntos $M_1$ y $M_2$ tendrán abscisas iguales: $x_1 = x_2 = m$ (fig. 23).

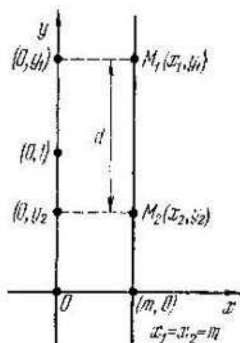



Fig. 23

Esta recta puede considerarse como un eje con dirección positiva hacia arriba y el mismo segmento unitario que para el sistema de coordenadas $xOy$ y origen en el punto $(m, 0)$. La coordenada de cualquier punto de este eje coincidirá con la ordenada del mismo punto al considerarlo como un punto del plano. De acuerdo con el teorema 1 (§ 5, cap. I), la distancia entre los puntos $M_1$ y $M_2$, considerados como puntos de esta recta coordenada, es igual a $d = |y_2 - y_1|$, de donde

$$d^2 = |y_2 - y_1|^2 = 0 + (y_2 - y_1)^2 = (m - m)^2 + \\ + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

b) Supongamos que la recta en que se disponen los puntos $M_1$ y $M_2$ es paralela al eje $Ox$ (o coincide con éste). Entonces, cualquier

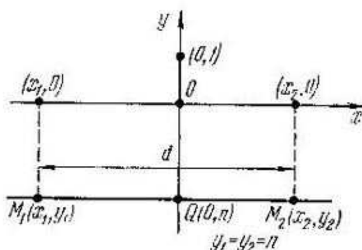



Fig. 24

punto dispuesto en esta recta tendrá una misma ordenada, es decir, los puntos $M_1$ y $M_2$ tendrán ordenadas iguales: $y_1 = y_2 = n$ (fig. 24).

La recta citada puede considerarse como un eje cuyo origen se encuentra en el punto $(0, n)$; la dirección positiva de este eje está orientada hacia la derecha y el segmento unidad es el mismo que en el sistema de coordenadas $xOy$. La coordenada de cualquier punto

de este eje coincidirá con la abscisa del mismo punto al considerarlo como un punto del plano. De acuerdo con el teorema 1 (§ 5, cap. I), la distancia entre dos puntos $M_1$ y $M_2$, como puntos de esta recta coordenada, es igual a $d = |x_2 - x_1|$, de donde

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + 0 = (x_2 - x_1)^2 + (n - n)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

c) Supongamos ahora que los puntos $M_1$ y $M_2$ no se encuentran en la recta paralela al eje de ordenadas ni tampoco en la recta paralela al eje de abscisas. En este caso las coordenadas homónimas de estos puntos serán números diferentes, es decir, $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$ (fig. 25). Tracemos por el punto $M_1$ una recta paralela al eje de abscisas, y por el punto $M_2$, una recta que sea paralela al eje de ordenadas. Estas rectas se cortarán en el punto $K$ $(x_2, y_1)$. El punto $M_1$ y el punto $K$ pertenecen a recta paralela al eje de abscisas, por consiguiente, como se estableció en el caso b), la distancia entre estos puntos (longitud del segmento $M_1K$) es igual a $d_{M_1K} = |x_2 - x_1|$.

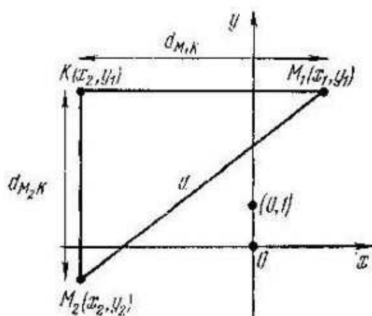


Fig. 25

Los puntos $M_2$ y $K$ se disponen en la recta paralela al eje de ordenadas, por consiguiente, conforme a lo establecido en el caso a), la distancia entre estos puntos (longitud del segmento en $M_2K$) es igual a $d_{M_2K} = |y_2 - y_1|$. Por cuanto el triángulo $M_1KM_2$ es rectángulo, entonces, según el teorema de Pitágoras, $d^2 = d^2_{M_1K} + d^2_{M_2K} = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$. En virtud de la propiedad de la magnitud absoluta obtenemos

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

El teorema está completamente demostrado.

**Corolario.** *La distancia d entre cualesquiera dos puntos* $M_1$ $(x_1, y_1)$ *y* $M_2$ $(x_2, y_2)$ *en el plano de coordenadas se determina según la fórmula*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**Ejemplo.** Hállese la distancia $d$ entre los puntos $M_1$ $(-3, -2)$ y $M_2$ $(-2, 1)$.

$$d = \sqrt{[-2-(-3)]^2 + [1-(-2)]^2} = \sqrt{10}.$$

**Ilustración geométrica de un conjunto de soluciones.** Un conjunto no vacío de todos los puntos del plano de coordenadas, las coordenadas $x$ e $y$ de cada uno de los cuales representan una solución de la

ecuación (2): $P(x, y) = 0$, representa cierta figura $G$. Se dice que la ecuación $P(x, y) = 0$ define cierta figura $G$ o que es una ecuación de la figura $G$, siempre que se cumplan las siguientes dos condiciones:

1. Las coordenadas de cada punto $M_0(x_0, y_0)$ de la figura $G$ son una solución de la ecuación $P(x, y) = 0$, es decir, satisfacen la igualdad numérica $P(x_0, y_0) = 0$.

2. A toda solución de la ecuación $P(x, y) = 0$, es decir, a todo par de números $(x_1, y_1)$ que satisface la igualdad numérica $P(x_1, y_1) = 0$, le corresponde en el plano de coordenadas un punto $M_1(x_1, y_1)$, perteneciente a la figura $G$.

Aduzcamos algunos **ejemplos**.

1. Sea dada la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \tag{3}$$

Mostremos que en el plano de coordenadas esta ecuación representa una circunferencia de radio $R$ con centro en el punto $C(a, b)$.

En efecto tomemos un punto cualquiera $M_0$ con las coordenadas $x_0$ e $y_0$ que se dispone en la circunferencia dada. Por definición de la circunferencia la distancia del punto $M_0$ al centro de la circunferencia (el punto $C$) es igual a $R$. Haciendo uso del corolario del teorema **1**, llegamos a que $R = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$. De esta igualdad numérica se desprende la igualdad numérica

$$R^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2.$$

Por consiguiente todo punto dispuesto en la circunferencia dada tiene coordenadas que representan la solución de la ecuación 3).

Tomemos ahora una solución cualquiera de la ecuación (3) es decir, tomemos cualquier par de números $(x_1, y_1)$ tal, que se verifique la igualdad numérica

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2.$$

Esta igualdad numérica es equivalente a la igualdad numérica

$$\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} = |R|.$$

Al par ordenado de números $(x_1, y_1)$ le corresponde en el plano de coordenadas el punto $M_1(x_1, y_1)$, con la particularidad de que de la validez de la igualdad numérica $\sqrt{(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2} = |R| = R$ se desprende que el punto $M_1(x_1, y_1)$ se encuentra en la circunferencia de radio $R$ con centro en el punto $C(a, b)$.

Quiere decir, efectivamente, la ecuación (3) es la ecuación de la circunferencia de radio $R$ con centro en el punto $C(a, b)$ (fig. 26). Supongamos que en el plano de coordenadas está dada una circunferencia de radio $r$ con centro en el punto $(\alpha, \beta)$. Razonando de una

manera análoga, se puede mostrar que

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

es la ecuación de esta circunferencia.

Así pues, en el plano de coordenadas cada ecuación de la forma (3) es la ecuación de cierta circunferencia y cada circunferencia se define mediante cierta ecuación del tipo (3).

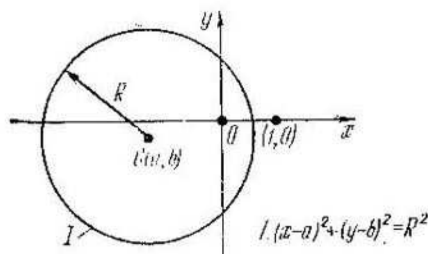



Fig. 26

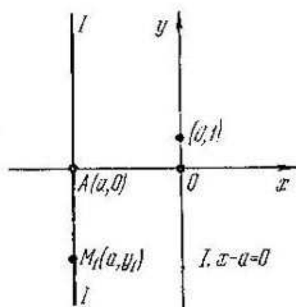



Fig. 27

Por eso, cuando se dice que en el plano de coordenadas está definida una circunferencia, se sobreentiende que está dada la ecuación de esta circunferencia, es decir, la ecuación del tipo (3).

2. Sea dada la ecuación

$$x-a=0 \tag{4}$$

Mostremos que en el plano de coordenadas esta ecuación representa la ecuación de una recta que es paralela al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A$ $(a, 0)$.

Efectivamente, tomemos un punto cualquiera $M_0$ dispuesto en esta recta. Entonces, la abscisa de este punto es el número $x_0=a$, y la ordenada $y_0$, un número real fijo.

Es evidente que las coordenadas $x_0$ e $y_0$ representan la solución de la ecuación (4), es decir, las coordenadas de cualquier punto dispuesto en una recta que es paralela al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A$ $(a, 0)$ representan la solución de la ecuación (4).

Tomemos ahora cualquier solución de la ecuación (4), es decir, elijamos cualquier par de números $(x_1, y_1)$ tal que satisfaga la igualdad numérica $x_1-a=0$. En otras palabras, tomemos cualquier par de números $(a, y_1)$, donde $y_1$ es un número real fijo cualquiera.

Es fácil ver que el punto $M_1$ $(a, y_1)$ se dispone en una recta paralela al eje de ordenadas y que pasa por el punto $A$ $(a, 0)$ (fig. 27). Por lo tanto, la ecuación (4) es en realidad la ecuación de la recta paralela al eje de ordenadas.

Supongamos que en el plano de coordenadas viene dada una recta que es paralela al eje de ordenadas y pasa por el punto $D$ $(d, 0)$. Razonando análogamente, podemos mostrar que la ecuación $x - d = 0$ representa la ecuación de esta recta.

Así pues, en el plano de coordenadas cada ecuación del tipo (4) es la ecuación de cierta recta paralela al eje de ordenadas, y la recta, paralela al eje de ordenadas, se define por cierta ecuación del tipo (4).

Por eso, cuando se dice que en el plano de coordenadas está definida una recta paralela al eje de ordenadas, se sobreentiende que

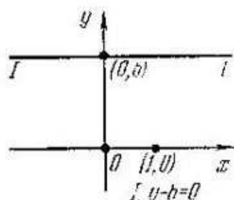


Fig. 28

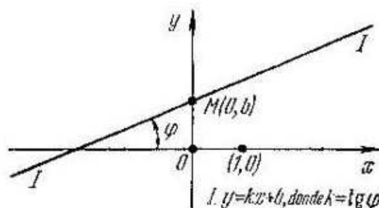


Fig. 29

está dada la ecuación de dicha recta, es decir, la ecuación del tipo (4).

3. Razonando análogamente, se puede mostrar que en el plano de coordenadas toda ecuación de la forma

$$y - b = 0 \tag{5}$$

es la ecuación de cierta recta paralela al eje de abscisas (fig. 28), y cada recta paralela al eje de abscisas se define por cierta ecuación del tipo (5).

Por eso, cuando se dice que en el plano de coordenadas viene dada una recta paralela al eje de abscisas, se sobreentiende que está dada la ecuación de dicha recta, es decir, una ecuación del tipo (5).

4. Sea dada la ecuación

$$y = kx + b, \tag{6}$$

donde $k \neq 0$.

En el capítulo VI se mostrará que en el plano de coordenadas esta expresión es la ecuación de una recta que pasa por el punto $M$ $(0, b)$ y que forma con la dirección positiva del eje $Ox$ un ángulo cuya tangente es igual a $k$ (fig. 29).

Supongamos que en el plano de coordenadas está dada una recta que pasa por el punto $M$ $(0, b_1)$ y que forma con la dirección positiva del eje $Ox$ un ángulo, cuya tangente es igual a $k_1$, donde $k_1 \neq 0$; podemos demostrar que la ecuación

$$y = k_1x + b_1$$

es la ecuación de esta recta.

Así pues, en el plano de coordenadas cada ecuación del tipo (6), donde $k \neq 0$, es la ecuación de una recta que no es paralela a ninguno de los ejes de coordenadas, y cada recta no paralela a ninguno de los ejes coordenados se define por cierta ecuación del tipo (6), donde $k \neq 0$.

Por eso, cuando se dice que en el plano de coordenadas está definida una recta que no es paralela al eje de abscisas ni tampoco al eje de ordenadas, se sobreentiende que está dada la ecuación de esta recta, es decir, una ecuación del tipo (6), donde $k \neq 0$.

**Ecuación de primer grado.** Se denomina *ecuación de primer grado* con dos incógnitas una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0,$$

donde $A^2 + B^2 \neq 0$, o, con otras palabras, donde por lo menos uno de los coeficientes $A$ y $B$ es distinto de cero.

De lo expuesto más arriba se infiere que en el plano de coordenadas cada ecuación de primer grado con dos incógnitas es la ecuación de cierta recta, y cada recta del plano se define por cierta ecuación de primer grado con dos incógnitas.

En efecto, sea dada la ecuación

$$Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0). \tag{7}$$

Si $B = 0$, entonces, tomando en consideración que $A \neq 0$ concluimos que la ecuación (7) es equivalente a la siguiente

$$x - \left(-\frac{C}{A}\right) = 0,$$

y esta ecuación es, de acuerdo con lo mostrado anteriormente, la ecuación de una recta. Si $B \neq 0$, entonces la ecuación (7) será equivalente a la ecuación

$$y = \left(-\frac{A}{B}\right) x + \left(-\frac{C}{B}\right),$$

la cual es, conforme a lo mostrado más arriba, ecuación de una recta. Quiere decir, la ecuación (7) es en realidad la ecuación de cierta recta. Además, se puede mostrar que si en el plano de coordenadas viene dada una recta, se define ésta por cierta ecuación del tipo (7).

Por eso, cuando se dice que en el plano de coordenadas está definida una recta, se sobreentiende que está dada la ecuación de dicha recta, es decir, cierta ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Por cuanto por dos puntos no coincidentes pasa una recta única, para definir una recta resulta suficiente prefijar dos puntos que no coinciden y que pertenecen a esta recta.

Quiere decir, si se conocen las coordenadas de dos puntos no coincidentes, dispuestos en esta recta, se puede escribir la ecuación de esta recta.

**Ejemplo.** Escríbase la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $M(p, q)$, donde $p^2 + q^2 \neq 0$. Si $p = 0$, entonces, evidentemente, la recta es el eje de ordenadas y su ecuación es $x = 0$.

Si $q = 0$, entonces, evidentemente, la recta es el eje de abscisas y su ecuación es $y = 0$.

Si $q \neq 0$, $p \neq 0$, entonces, de acuerdo con lo explicado anteriormente, la ecuación de esta recta es de la forma (7), donde $A$, $B$, $C$ son ciertos números fijos, con la particularidad de que $A^2 + B^2 \neq 0$.

Determinemos estos números, haciendo uso de la condición de que dos puntos $O(0, 0)$ y $M(p, q)$ se disponen en la recta mencionada.

Por cuanto la recta pasa por el origen de coordenadas, entonces el par $(0, 0)$ debe ser la solución de la ecuación (7), lo que es posible sólo cuando $C = 0$. Está claro que $B \neq 0$, puesto que si el coeficiente fuera igual a cero, la ecuación (7) tendría por expresión $Ax = 0$, es decir, representaría la ecuación del eje de ordenadas ($A \neq 0$, puesto que $A^2 + B^2 \neq 0$), lo cual contradice la condición $p \neq 0$. Como $B \neq 0$, la ecuación (7) es equivalente a la ecuación

$$y = kx,$$

donde $k = -\frac{A}{B}$. Dado que la recta pasa por el punto $(p, q)$, entonces se verifica la igualdad numérica

$$q = kp.$$

Por consiguiente, $k = \frac{q}{p}$, y la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $M(p, q)$, el cual no se encuentra en los ejes de coordenadas, tiene por expresión

$$y = \frac{q}{p} x.$$

**Conjunto de ecuaciones.** Sean dados los polinomios $P_1(x, y)$ $P_2(x, y)$, . . ., $P_m(x, y)$, enteros respecto a las letras $x$ e $y$.

Se dice que está definido *un conjunto de m ecuaciones algebraicas con dos incógnitas*

$$P_1(x, y) = 0, \quad P_2(x, y) = 0, \quad \ldots, \quad P_m(x, y) = 0, \tag{8}$$

si se requiere hallar todos los pares de números $(x, y)$, cada uno de los cuales es la solución de al menos una ecuación del conjunto (8) y el cual lleva el nombre de solución del conjunto (8). De este modo, resolver el conjunto de ecuaciones (8) significa resolver cada una de las ecuaciones que integran el conjunto, es decir, determinar los conjuntos $M_1$, $M_2$, . . ., $M_m$, donde $M_i$ es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $P_i(x, y) = 0$, y, a continuación, hallar el conjunto $M_0$ que es la unión de todos los conjuntos aducidos: $M_0 = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_m$. El conjunto $M_0$ será precisamente el conjunto de todas las soluciones del conjunto de ecuaciones (8).

La ecuación (1) *es equivalente al conjunto de ecuaciones* (8), si cualquier solución de la ecuación (1) es también solución del conjunto de ecuaciones (8), y cualquier solución del conjunto de ecuaciones (8) es solución de la ecuación (1), en otras palabras, si coinciden los conjuntos de sus soluciones. La sustitución de la ecuación (1) por el conjunto equivalente de ecuaciones (8) se denomina *paso equivalente* de la ecuación (1) al conjunto de ecuaciones (8).

Con ayuda de tales pasos equivalentes al conjunto de ecuaciones se logra, frecuentemente, resolver la ecuación de partida. Por ejemplo, se pide hallar todas las raíces de la ecuación

$$x^2 - y^2 = 0. \tag{9}$$

Hagamos uso de la fórmula de multiplicación reducida (véase el cap. II) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$. Entonces, según la afirmación 4, obtendremos la ecuación (10), equivalente a la ecuación (9):

$$(x - y)(x + y) = 0. \tag{10}$$

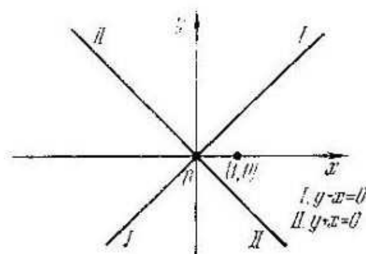



Fig. 30

Es fácil ver que la ecuación (10) es equivalente al siguiente conjunto de ecuaciones:

$$x - y = 0, \quad x + y = 0. \tag{11}$$

El conjunto de todas las soluciones de la primera ecuación del conjunto es el conjunto de todos los pares $(t, t)$, donde $t$ es cualquier número real: $M_1 = \{(t, t) \mid t \in R\}$. El conjunto de todas las soluciones de la segunda ecuación del conjunto es el conjunto de todos los pares $(q, -q)$, donde $q$ es cualquier número real: $M_2 = \{(q, -q) \mid q \in R\}$. De este modo, el conjunto de todas las soluciones del conjunto (11) y, por lo tanto, de la ecuación (9) es la unión de estos conjuntos $M = M_1 \cup M_2$, es decir, $M = \{(t, t) \mid t \in R; (q, -q) \mid q \in R\}$.

Según lo demostrado anteriormente, cada una de las ecuaciones del conjunto (11) es la ecuación de una recta. Por eso, la figura, definida por la ecuación (9), representa dos rectas; es fácil ver, además, que estas rectas pasan por el origen de coordenadas y son las bisectrices de los ángulos coordenados (fig. 30).

## § 4. Sistemas de ecuaciones

**Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.** Sean dados los polinomios $P(x, y)$, $a(x, y)$, enteros respecto a las letras $x$ e $y$. Se dice que está dado un *sistema* de dos ecuaciones algebraicas con dos

incógnitas $x$ e $y$:

$$\begin{cases} P(x, y)=0, \\ Q(x, y)=0, \end{cases} \tag{1}$$

si se pide hallar las colecciones numéricas, correspondientes a la colección de incógnitas $(x, y)$, cada una de los cuales es la solución de cada ecuación del sistema (1), es decir, si se requiere hallar todas las colecciones numéricas de incógnitas $(x, y)$ tales quo, siendo sustituida cada una de ellas en ambas ecuaciones del sistema (1), estas últimas se convierten en igualdades numéricas lícitas. Cada colección numérica de esta índole lleva el nombre de *solución* del sistema (1) (las ecuaciones de un sistema se escriben habitualmente en columna y se reúnen con una llave).

Resolver el sistema de ecuaciones (1) significa hallar el conjunto de todas las soluciones de este sistema. Cabe notar que dicho conjunto es la intersección de dos conjuntos: el conjunto de todas las soluciones de la primera ecuación del sistema y el conjunto de todas las soluciones de la segunda ecuación del mismo. Examinemos un sistema más de dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas:

$$\begin{cases} R(x, y)=0, \\ S(x, y)=0, \end{cases} \tag{2}$$

donde $R(x, y)$, $S(x, y)$ son polinomios enteros con respecto a las letras $x$ e $y$. Dos sistemas de ecuaciones algebraicas (1) y (2) se denominan *equivalentes*, si cualquier solución del primer sistema es a la vez la solución del segundo sistema y cualquier solución del segundo sistema es la solución del primer sistema. Con otras palabras, los sistemas (1) y (2) son equivalentes, si coinciden los conjuntos de sus soluciones. De la definición se desprende que dos sistemas son equivalentes, si los conjuntos de sus soluciones son vacíos.

Suele decirse que está dado un *conjunto* de $k$ sistemas de dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas:

$$\begin{cases} P_1(x, y)=0, \\ Q_1(x, y)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} P_2(x, y)=0, \ \ldots \\ Q_2(x, y)=0, \ \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} P_k(x, y=0, \\ Q_k(x, y=0, \end{cases} \tag{3}$$

donde $P_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, ..., $P_k(x, y)$; $Q_1(x, y)$, ..., $Q_k(x, y)$ son polinomios enteros respecto de las letras $x$ e $y$, si se requiere hallar todas las colecciones numéricas, cada una de las cuales es la solución de por lo menos uno de los sistemas de ecuaciones del conjunto (3). Cada una de dichas colecciones recibe el nombre de *solución* del conjunto de sistemas de ecuaciones (3).

El sistema de ecuaciones (1) es *equivalente* al conjunto de sistemas de ecuaciones (3), si cualquier solución del sistema de ecuaciones (1) es, a la vez, solución del conjunto de sistemas de ecuaciones (3), y cualquier solución del conjunto de sistemas de ecuaciones (3) es la solución del sistema de ecuaciones (1).

Demos a conocer algunas **afirmaciones** referentes a la equivalencia de los sistemas de ecuaciones.

1. *Si se cambia el orden de seguimiento de las ecuaciones en el sistema* (1), *el sistema obtenido será equivalente al* (1).

2. *Si una de las ecuaciones del sistema* (1) *se sustituye por otra ecuación equivalente, el sistema obtenido será equivalente al sistema* (1).

3. *Supongamos que en un sistema de ecuaciones con incógnitas $x$ e $y$ una de las ecuaciones está escrita de tal modo que en el primer miembro figura una de las incógnitas, por ejemplo, $x$ a la primera potencia, y en el segundo miembro figura un polinomio entero respecto de $y$. En este caso se dice que la incógnita $x$ está expresada en términos de la otra incógnita $y$. Si la incógnita $x$ viene expresada a partir de la primera ecuación del sistema* (1), *entonces, al sustituirla en otra ecuación del sistema* (1), *en lugar de $x$, el polinomio obtenido de $y$, tendremos un sistema equivalente de ecuaciones, es decir, resultan equivalentes los siguientes sistemas*:

$$\begin{cases} x = R(y), \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x = R(y), \\ Q[R(y), y] = 0. \end{cases}$$

Observemos que la segunda ecuación $Q[R(y), y] = 0$ es una ecuación con una sola incógnita, por lo cual para encontrar sus soluciones podemos emplear los métodos examinados en el § 1.

4. *Si la primera ecuación del sistema* (1) *se sustituye por una ecuación igual a la suma de la primera ecuación, multiplicada por cierto número real $\beta \neq 0$, con la segunda ecuación, multiplicada por cierto número real $\alpha$, entonces el sistema obtenido de ecuaciones será equivalente al sistema de ecuaciones* (1), es decir, cualesquiera que sean los números reales $\beta \neq 0$ y $\alpha$, serán equivalentes los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} P(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \beta P(x, y) + \alpha Q(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases}$$

A título de corolario de la afirmación 4 tenemos la afirmación:

5. *Si la primera ecuación del sistema* (1) *se sustituye por la suma (o la diferencia) de la primera y segunda ecuaciones del sistema, entonces el sistema obtenido de ecuaciones será equivalente al sistema de ecuaciones* (1).

6. *Si la primera ecuación del sistema* (1) *es equivalente al conjunto de ecuaciones $P_1(x, y) = 0$, $P_2(x, y) = 0$, . . ., $P_k(x, y) = 0$, entonces el sistema* (1) *será equivalente al siguiente conjunto de $k$ sistemas de ecuaciones*:

$$\begin{cases} P_1(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} P_2(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0, \end{cases} \ \ldots, \quad \begin{cases} P_k(x, y) = 0, \\ Q(x, y) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Si la ecuación $Q(x, y) = 0$ es equivalente al conjunto de $m$ ecuaciones $Q_1(x, y) = 0$, $Q_2(x, y) = 0$, . . ., $Q_m(x, y) = 0$, entonces a

cada sistema del conjunto (4) se le puede aplicar la afirmación 6 y cada sistema del conjunto (4) puede sustituirse por su conjunto de $m$ sistemas.

La demostración de todas estas afirmaciones se omite.

Veamos cómo se aplican las afirmaciones enunciadas al resolver sistemas de ecuaciones.

**Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.** Examinemos el sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

donde $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ y $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, con otras palabras, donde por lo menos uno de los dos coeficientes $a_1$ y $b_1$, y también por lo menos uno de los dos coeficientes $a_2$ y $b_2$ son distintos de cero (en el caso contrario por lo menos uno de los polinomios $a_1x + b_1y + c_1$ ó $a_2x + b_2y + c_2$ no sería un polinomio de primer grado ni respecto de la incógnita $x$, ni respecto de la incógnita $y$).

Cada una de las dos ecuaciones del sistema (5) (como se ha mostrado en el § 3) es la ecuación de una recta en el plano de coordenadas. Como se sabe, dos rectas en el plano de coordenadas pueden o bien intersecarse en un punto, o bien coincidir, o bien ser paralelas sin que sean coincidentes. Por consiguiente, al buscar todas las soluciones del sistema de ecuaciones (5), también pueden surgir estas mismas situaciones.

Aclarémoslas con unos ejemplos.

1. Sea dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y + 1 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Es fácil ver que el sistema (6) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x = y, \\ x + y + 1 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Haciendo uso de la afirmación 3, pasemos del sistema (7) al sistema

$$\begin{cases} x = y, \\ y + y + 1 = 0, \end{cases} \tag{8}$$

que es equivalente a (7).

La segunda ecuación del sistema (8) es de primer grado con una incógnita y tiene la única solución $y_1 = -\frac{1}{2}$. Por consigiente, el sistema (8) y, por tanto, el sistema (6), equivalente a (8), tiene la única solución $(x_1, y_1): \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. El punto con estas coordenadas es el de intersección de las rectas definidas por las ecuaciones (6) (fig. 31).

2. Sea dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ 2x+2y+2=0. \end{cases} \tag{9}$$

Al dividir por 2 los miembros primero y segundo de la segunda ecuación, pasamos al sistema

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ x+y+1=0, \end{cases} \tag{10}$$

que es equivalente al sistema de partida (9).

El sistema (10) consta de dos ecuaciones iguales, lo que corresponde en el plano de coordenadas a dos rectas coincidentes (fig. 32).

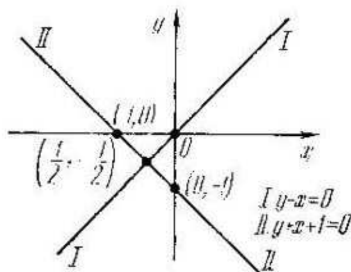


Fig. 31

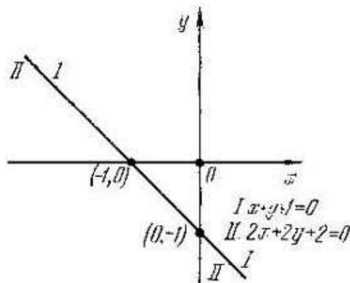


Fig. 32

Es obvio que el conjunto de todas las soluciones del sistema (10) y por tanto, del sistema equivalente (9), es el conjunto de todos los pares del tipo $(t, -1-t)$, donde $t$ es un número real cualquiera.

3. Sea dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y=0, \\ 2x+2y+1=0. \end{cases} \tag{11}$$

Pasemos al sistema equivalente al dado

$$\begin{cases} x=-y, \\ 2x+2y+1=0. \end{cases} \tag{12}$$

Al hacer uso de la afirmación 3, obtendremos el sistema

$$\begin{cases} x=-y, \\ 2(-y)+2y+1=0. \end{cases} \tag{13}$$

que es equivalente al sistema (12).

La segunda ecuación del sistema (13) es equivalente a la igualdad numérica $1=0$ que no es cierta. Por consiguiente, el sistema (13) y, por tanto, el sistema (11), no tienen soluciones, lo que corresponde

a dos rectas paralelas en el plano de coordenadas pero no coincidentes (fig. 33).

El método de resolución de los sistemas de ecuaciones (6), (9) y (11), que está basado en la afirmación 3, se denomina *método de sustitución* o *método de eliminación de la incógnita*.

Veamos cómo se emplea este método en un ejemplo más complejo, cuando una de las ecuaciones del sistema no es ecuación de primer grado.

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \qquad (14)$$

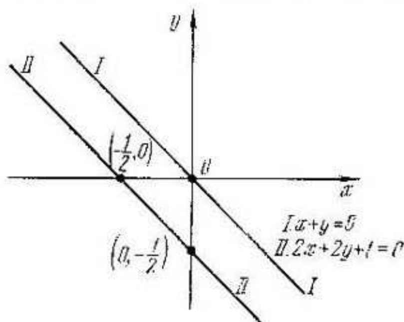


Fig. 33

Analicemos el caso en que $b=0$. Entonces la primera ecuación del sistema (14) es la ecuación de una recta paralela al eje de ordenadas. La segunda ecuación del sistema (14) es la ecuación de una circunferencia de radio unidad con centro en el origen de coordenadas. Al aplicar el método de sustitución ($a \neq 0$, puesto que $b=0$), obtendremos el sistema

$$\begin{cases} x=-\frac{c}{a}, \\ \left(-\frac{c}{a}\right)^2+y^2=1 \end{cases} \qquad (15)$$

que es equivalente al sistema de partida (14). La segunda ecuación del sistema (15) es una ecuación cuadrática. Si $1-\frac{c^2}{a^2}<0$, entonces esta ecuación no tiene raíces y, por tanto, el sistema (15) y el (14), equivalente al (15), tampoco las tienen. Esto corresponde a la situación en que la recta $x=-\frac{c}{a}$ no corta la circunferencia unidad $x^2+y^2=1$ (fig. 34), $\left[\text{en la figura 34 la recta } x=-\frac{c}{a}\right.$ viene expresada tanto para el caso de $\left(-\frac{c}{a}\right)>1$, como para el de $\left.\left(-\frac{c}{a}\right)<-1\right]$. Si $1-\frac{c^2}{a^2}=0$, la segunda ecuación del sistema (15) tiene la única solución $y=0$. El sistema (15) y, por tanto, el sistema (14), tienen en este caso la única solución $(x_1, y_1)$: $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$. Geométricamente esto corresponde al caso en que la recta es tangente a la circunferencia unidad en el punto $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ (fig. 35) $\Big($en la fig. 35 la recta $x=-\frac{c}{a}$ viene expresada tanto para el caso de

$\left(-\frac{c}{a}\right)=1$, como para el de $\left(-\frac{c}{a}\right)=-1\Big)$. Si $1-\frac{c^2}{a^2}>0$, entonces la segunda ecuación del sistema (15) tiene tan solo dos raíces, $y_1=\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}$ e $y_2=-\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}$. Por consiguiente, los sistemas (15) y (14) tienen en este caso sólo dos soluciones $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$; $\left(-\frac{c}{a}, \sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)$, $\left(-\frac{c}{a}, -\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)$. En el sentido geomé-

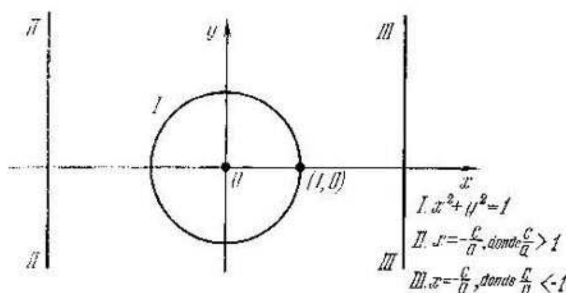



Fig. 34

trico esto corresponde a que la circunferencia unidad se corta por la recta $x=-\frac{c}{a}$ en dos puntos: $\left(-\frac{c}{a}, \sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)$ y $\left(-\frac{c}{a}, -\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}}\right)$ (fig. 36). $\Big($En la fig. 36 la recta $x=-\frac{c}{a}$ está representada en tres casos: 1) $0<-\frac{c}{a}<1$, 2) $\left(-\frac{c}{a}\right)=0$, 3) $0>\left(-\frac{c}{a}\right)>-1\Big)$.

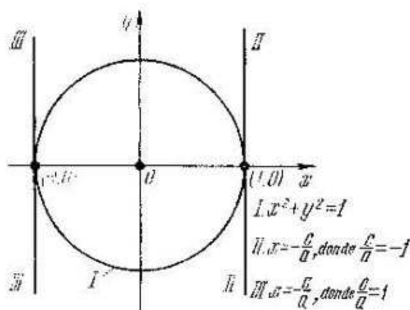



Fig. 35

Si $b\neq 0$, entonces en virtud de la primera ecuación del sistema (14) podemos expresar la incógnita $y$: $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, y, por analogía con lo expuesto más arriba, aplicar el método de sustitución. Resultan posibles en este caso sólo tres situaciones:

1. El sistema (14) no tiene soluciones, es decir, la recta y la circunferencia no tienen puntos comunes (véase la fig. 34).

2. El sistema tiene la única solución, es decir, la recta es tangente a la circunferencia dada (véase la fig. 35).

3. El sistema tiene tan sólo dos soluciones, es decir, la recta corta la circunferencia solamente en dos puntos (véase la fig. 36).

Queda al cargo del lector realizar los cómputos correspondientes para este caso.

*Método de transformación lineal* (el método está basado en la afirmación 4 y consiste en la sustitución equivalente de la primera ecuación del sistema por otra ecuación, igual a la suma de la primera ecuación, multiplicada por un número $\beta \neq 0$, con la segunda ecuación multiplicada por un número $\alpha$).

Examinemos la aplicación de este método en el ejemplo de resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+y^2+3y+1=0, \\ x^2+y^2+y-3=0. \end{cases} \quad (16)$$

Al restar la segunda ecuación de la primera, obtendremos, en virtud de la afirmación 5, el sistema

$$\begin{cases} 2y+4=0, \\ x^2+y^2+y-3=0, \end{cases} \quad (17)$$

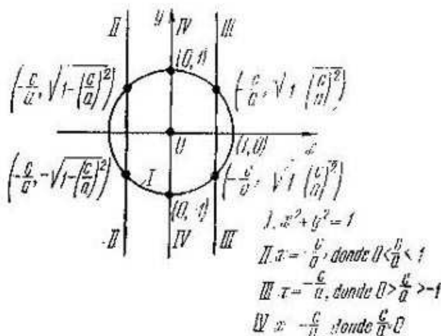


Fig. 36

que es equivalente al sistema (16). La primera ecuación del sistema (17) tiene la única solución $y_1 = -2$. Al sustituir este valor de $y_1$ en la segunda ecuación del sistema (17), obtendremos que este sistema y, por tanto, el sistema equivalente (16) tienen solamente dos soluciones: $(1, -2)$ y $(-1, -2)$. Observemos que dichas soluciones se escriben frecuentemente en forma del conjunto: $M = \{(1, -2); (-1, -2)\}$.

*Método de sustitución de un sistema de ecuaciones por un conjunto de sistemas de ecuaciones* (el método se basa en la afirmación 6 sobre la equivalencia entre un sistema de ecuaciones y un conjunto de sistemas de ecuaciones).

Veamos cómo se aplica este método en un ejemplo de resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2-y^2-x+y=0, \\ x+y^2-2=0. \end{cases} \quad (18)$$

Por cuanto la primera ecuación de este sistema es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$x-y=0, \; x+y-1=0,$$

entonces el sistema (18) será equivalente al conjunto de sistemas

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x+y^2-2=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-1=0, \\ x+y^2-2=0. \end{cases} \tag{19}$$

Cada uno de los sistemas del conjunto (19) se resuelve fácilmente por el método de sustitución. El primer sistema tiene solamente dos soluciones: (1, 1); (—2, —2); el segundo sistema también tiene tan sólo dos soluciones:

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Por consiguiente, el sistema (18) tiene cuatro soluciones:

$$(1, 1); \ (-2, -2); \ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right); \ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Examinemos, además, la aplicación de este método en el ejemplo de resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, si una de las ecuaciones de dicho sistema es homogénea de segundo grado. La ecuación $ax^2+bxy+cy^2=0$ se denomina *ecuación homogénea de segundo grado*. Así pues, resolvamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax^2+bxy+cy^2=0, \\ P(x, y)=0, \end{cases} \tag{20}$$

donde $P(x, y)$ es un polinomio entero respecto de $x$ e $y$.

1. Sea $a=0$. Es evidente que el sistema (20) es equivalente al conjunto de sistemas

$$\begin{cases} y=0, \\ P(x, y)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} bx+cy=0, \\ P(x, y)=0. \end{cases}$$

Cada uno de estos sistemas puede resolverse por el método de sustitución.

2. Sea $a \neq 0$. Apliquemos al primer miembro de la primera ecuación del sistema (20) una transformación idéntica «formación de cuadrado perfecto»:

$$ax^2+bxy+cy^2=a\left(x^2+\frac{b}{a}xy+\frac{c}{a}y^2\right)=$$
$$=a\left\{\left[x^2+2x\frac{by}{2a}+\left(\frac{by}{2a}\right)^2\right]+\frac{cy^2}{a}-\left(\frac{by}{2a}\right)^2\right\}=$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}y\right)^2-\frac{Dy^2}{4a^2}\right\}, \tag{21}$$

donde $D=b^2-4ac$.

En el caso de $D>0$ el primer miembro de la primera ecuación del sistema (20) se representa en forma de un producto

$$ax^2+bxy+cy^2=a\left(x+\frac{b}{2a}y+\frac{\sqrt{D}}{2a}y\right)\left(x+\frac{b}{2a}y-\frac{\sqrt{D}}{2a}y\right),$$

por lo cual el sistema (20) es equivalente al conjunto de sistemas

$$\begin{cases} x+\dfrac{b+\sqrt{D}}{2a}y=0, \\ P(x, y)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+\dfrac{b-\sqrt{D}}{2a}y=0, \\ P(x, y)=0. \end{cases} \tag{22}$$

Cada uno de estos sistemas puede resolverse por el método de sustitución. En el caso cuando $D = 0$, el conjunto de sistemas (22) se compone de dos sistemas iguales de ecuaciones, es decir, de hecho, es un solo sistema de ecuaciones.

Cuando $D < 0$, de la igualdad (21) se deduce que la primera ecuación del sistema (20) tiene la única solución $(x_1, y_1)$: (0, 0) y nos queda sólo comprobar si esta ecuación satisface la segunda ecuación del sistema (20).

Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases} \tag{23}$$

Apliquemos primero el método de transformación lineal del sistema: al multiplicar la primera ecuación por 7, y la segunda, por 19, y al sustraer luego la primera ecuación de la segunda, obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 12x^2-26xy+12y^2=0, \\ x^2-xy+y^2=7, \end{cases} \tag{24}$$

que es equivalente al sistema (23). Apliquemos al primer miembro de la primera ecuación la transformación idéntica de «formación de cuadrado perfecto»:

$$12x^2-26xy+12y^2=12\left[x^2-2x\frac{13y}{12}+\left(\frac{13y}{12}\right)^2+y^2-\frac{169y^2}{144}\right]=$$

$$=12\left[\left(x-\frac{13y}{12}\right)^2-\frac{25y^2}{144}\right]=12\left(x-\frac{13y}{12}+\frac{5y}{12}\right)\left(x-\frac{13y}{12}-\frac{5y}{12}\right)=$$

$$=12\left(x-\frac{2y}{3}\right)\left(x-\frac{3y}{2}\right).$$

En virtud de esta transformación idéntica y de la afirmación 6, podemos constatar que el sistema de ecuaciones (24) es equivalente al conjunto de sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-\dfrac{2}{3}y=0, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases} \qquad \begin{cases} x-\dfrac{3y}{2}=0, \\ x^2-xy+y^2=7. \end{cases}$$

Resolviendo cada uno de estos sistemas por el método de sustitución, obtenemos que el primer sistema tiene tan solo dos soluciones: (2; 3) y (—2; —3); el segundo sistema también tiene sólo dos solu-

ciones: $(3;\ 2)$ y $(-3;\ -2)$. Por consiguiente, el sistema (23) tiene solamente cuatro soluciones: $(2;\ 3)$; $(-2;\ -3)$; $(3;\ 2)$; $(-3;\ -2)$.

En algunos casos para resolver un sistema de ecuaciones, se necesita que la afirmación 6 sea empleada no una sola vez, sino varias veces. Por ejemplo, esto se debe realizar al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 19(x - y), \\ x^3 + y^3 = 7(x + y) \end{cases} \tag{25}$$

Escribamos este sistema en la siguiente forma equivalente:

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 19) = 0, \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 7) = 0. \end{cases}$$

En virtud de la afirmación 6, este sistema es equivalente al conjunto de sistemas

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 7) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 19 = 0, \\ (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 7) = 0. \end{cases}$$

Aplicando otra vez a cada sistema la afirmación 6, llegamos a que el sistema de ecuaciones inicial (25) es equivalente al conjunto de sistemas de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - 7 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 19 = 0, \\ x + y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 19 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - \ \ 7 = 0. \end{cases}$$

Los tres primeros sistemas se resuelven fácilmente por el método de sustitución; el cuarto sistema ya se ha resuelto más arriba. Al reunir juntas las soluciones de todos estos sistemas, resulta que el sistema de partida (25) tiene tan sólo nueve soluciones: $(0,\ 0)$; $(\sqrt{7},\ \sqrt{7})$; $(-\sqrt{7},\ -\sqrt{7})$; $(-\sqrt{19},\ \sqrt{19})$; $(\sqrt{19},\ -\sqrt{19})$; $(2,\ 3)$; $(-2,\ -3)$; $(3,\ 2)$; $(-3,\ -2)$.

Hemos de indicar que comúnmente para la resolución de tal o cual sistema nos vemos obligados a emplear varios métodos.

**Sistemas de ecuaciones con varias incógnitas.** En la práctica nos encontramos con la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones no sólo con dos incógnitas, sino con una cantidad mayor de incógnitas: con tres, cuatro, etc. Demos a conocer, por eso, las definiciones correspondientes y analicemos ciertas afirmaciones que son indispensables para la resolución de tales sistemas.

Supongamos que se pide resolver la ecuación

$$R(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t) = Q(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t), \tag{26}$$

donde $R(x, y, z, \ldots, t)$ y $Q(x, y, z, \ldots, t)$ son polinomios, enteros (véase el cap. 11) respecto de las letras $x, y, z, \ldots, t$. En este caso se dice que está definida una *ecuación algebraica con las incógnitas* $x, y, z, \ldots, t$. Observemos que las incógnitas $x, y, z, \ldots, t$ representan el conjunto de todas las incógnitas contenidas tanto en el primer miembro, como en el segundo miembro de la ecuación (26). Por ejemplo, la expresión $4x^2 = yz + 5y^2$ es una ecuación respecto de las incógnitas $x, y, z$, puesto que los polinomios que figuran en los miembros primero y segundo de dicha ecuación pueden ser escritos en la forma $R(x, y, z) = 4x^2 = 4x^2 + 0 \cdot y + 0 \cdot z$, $Q(x, y, z) = yz + 5y^2 = 0 \cdot x + yz + 5y^2$, de donde se ve que estos polinomios son realmente enteros respecto a las letras $x, y, z$.

Se llama colección ordenada $(x, y, z, \ldots, t)$ *la colección de incógnitas* de la ecuación (26). El CVA de la ecuación (26) es el conjunto de todas las colecciones numéricas, correspondientes a la colección de incógnitas $(x, y, z, \ldots, t)$, en cada una de las cuales en lugar de cada incógnita puede figurar cualquier número real.

La colección numérica $(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$, correspondiente a la colección de incógnitas $(x, y, z, \ldots, t)$, se llama *solución* de la ecuación (26) son iguales los valores numéricos de los polinomios $R$ y $Q$, correspondientes a esta colección numérica, es decir, si se verifica la igualdad numérica $R(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0) = Q(x_0, y_0, z_0, \ldots, t_0)$.

Resolver la ecuación (26) significa hallar todas sus soluciones, es decir, determinar todas las colecciones numéricas, cada una de las cuales convierte la ecuación (26) en una igualdad numérica que se verifica.

Sean dadas dos ecuaciones algebraicas con iguales incógnitas:

$$R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$$

y

$$T(x, y, z, \ldots, t) = S(x, y, z, \ldots, t).$$

Estas ecuaciones se denominan *equivalentes*, si cualquier solución de la primera ecuación es también solución de la segunda ecuación y, viceversa, cualquier solución de la segunda ecuación es también solución de la primera ecuación. La sustitución de una ecuación por otra, equivalente a la primera, lleva el nombre de *paso equivalente* de la primera ecuación a la segunda.

Son lícitas las siguientes **afirmaciones**:

1. *Las ecuaciones* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *y* $R(x, y, z, \ldots, t) - Q(x, y, z, \ldots, t) = 0$ *son equivalentes.*

2. *Las ecuaciones* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *y* $R(x, y, z, \ldots, t) + S(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t) + S(x, y, z, \ldots, t)$, *donde* $S(x, y, z, \ldots, t)$ *es un polinomio entero respecto de las letras* $x, y, z, \ldots, t$, *son equivalentes.*

3. *Las ecuaciones* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *y* $\alpha R(x, y, z, \ldots, t) = \alpha Q(x, y, z, \ldots, t)$ *son eqiuvalentes para cualquier número real* $\alpha$, *distinto de cero.*

4. *Supongamos que se sabe que se verifica la igualdad idéntica* $R(x, y, z, \ldots, t) = T(x, y, z, \ldots, t)$; *entonces, las ecuaciones* $R(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *y* $T(x, y, z, \ldots, t) = Q(x, y, z, \ldots, t)$ *son equivalentes.*

La validez de estas afirmaciones se demuestra de manera análoga a la de las afirmaciones correspondientes en el § **1**, por lo cual se omite aquí.

De las afirmaciones 1 y 4 se desprende que cada ecuación algebraica puede ser reducida a la forma $P(x, y, z, \ldots, t) = 0$, y por eso podemos examinar sólo las ecuaciones del tipo

$$P(x, y, z, \ldots, t) = 0, \tag{27}$$

donde $P(x, y, z, \ldots, t)$ es un polinomio entero respecto de las letras $x, y, z, \ldots, t$.

Sean dados los polinomios $P_1(x, y, z, \ldots, t)$, $P_2(x, y, z, \ldots, t)$, $\ldots$, $P_m(x, y, z, \ldots, t)$, enteros respecto de las letras $x, y, z, \ldots, t$. Se dice que está dado el *conjunto* de $m$ ecuaciones algebraicas con las incógnitas $x, y, z, \ldots, t$:

$$P_1(x, y, z, \ldots, t) = 0, \ P_2(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ \ldots, P_m(x, y, z, \ldots, t) = 0, \tag{28}$$

si se requiere hallar todas las colecciones numéricas, correspondientes a la colección de incógnitas $(x, y, z, \ldots, t)$, cada una de las cuales sea solución de por lo menos una de las ecuaciones pertenecientes al conjunto (28). Cada una de dichas colecciones se denomina *solución del conjunto* (28). De este modo, resolver el conjunto de ecuaciones (28) significa resolver cada una de las ecuaciones $P_i(x, y, z, \ldots, t) = 0$, donde $i = 1, 2, \ldots, m$, y tomar, a continuación, la unión de estas soluciones.

La ecuación (27) es *equivalente* al conjunto de ecuaciones (28), si cualquier solución de la ecuación (27) es, a la vez, solución del conjunto (28) y cualquier solución del conjunto (28) es solución de la ecuación (27). La sustitución de la ecuación (27) por el conjunto equivalente (28) lleva el nombre de *paso equivalente* de la ecuación (27) al conjunto (28).

Sean dados los polinomios $P_1(x, y, z, \ldots, t)$, $P_2(x, y, z, \ldots, t)$, $\ldots$, $P_m(x, y, z, \ldots, t)$, enteros respecto de las letras $x, y, z, \ldots, t$. Se dice que está dado un sistema de $m$ ecuaciones algebraicas con las incógnitas $x, y, z, \ldots, t$:

$$\begin{cases} P_1(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t) = 0, \end{cases} \tag{29}$$

si se requiere hallar todas las colecciones numéricas, correspondientes a la colección de incógnitas $(x, y, z, \ldots, t)$, cada una de las cuales es solución de cada ecuación del sistema (29), es decir, si se requiere determinar todas las colecciones numéricas de las incógnitas $(x, y, z, \ldots, t)$ tales que, siendo sustituida cada una de las colecciones en todas las ecuaciones del sistema (29), las últimas se reduzcan a igualdades numéricas que se verifican. Cada semejante colección numérica se denomina *solución del sistema* (29) (las ecuaciones del sistema se escriben habitualmente en una columna y se reúnen con una llave).

Dos sistemas de ecuaciones algebraicas con incógnitas iguales $x, y, z, \ldots, t$ se llaman *equivalentes*, si cualquier solución del primer sistema es a la vez solución del segundo sistema y, viceversa, cualquier solución del segundo sistema es solución del primer sistema.

Se dice que está dado el *conjunto* de $k$ sistemas algebraicos de ecuaciones con las incógnitas $x, y, z, \ldots, t$:

$$\begin{cases} P_{11}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_{21}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{m1}(x, y, z, \ldots, t)=0, \end{cases} \quad \begin{cases} P_{12}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_{22}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{n2}(x, y, z, \ldots, t)=0, \end{cases} \quad \ldots$$

$$\ldots, \begin{cases} P_{1k}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_{2k}(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{ik}(x, y, z, \ldots, t)=0, \end{cases} \qquad (30)$$

si se requiere hallar todas las colecciones numéricas, cada una de las cuales es la solución de al menos uno de los sistemas de ecuaciones del conjunto (30). Cada tal colección se llama *solución* del conjunto de sistemas de ecuaciones (30). El sistema de ecuaciones (29) es *equivalente* al conjunto de sistemas de ecuaciones (30), si cualquier solución del sistema de ecuaciones (29) es a la vez la solución del conjunto de sistemas de ecuaciones (30), y cualquier solución del conjunto de sistemas de ecuaciones (30) es la solución del sistema de ecuaciones (29).

He aquí algunas **afirmaciones** referentes a la equivalencia de los sistemas de ecuaciones.

1. *Si se cambia el orden de seguimiento de las ecuaciones del sistema* (29), *el sistema obtenido será equivalente al sistema* (29).

2. *Si una de las ecuaciones del sistema* (29) *se sustituye por una ecuación equivalente, el sistema obtenido será equivalente al sistema* (29).

3. *Supongamos que en el sistema de ecuaciones con las incógnitas $x, y, z, \ldots, t$ la primera ecuación está escrita en forma tal, que el primer miembro de ésta contiene una de las incógnitas, por ejemplo, $x$ a la potencia una, y en el segundo miembro figura un polinomio entero*

*respecto de las otras letras. En este caso se dice que la incógnita $x$ viene expresada de la primera ecuación del sistema por medio de las otras incógnitas. Si la incógnita $x$ viene expresada a partir de la primera ecuación del sistema en términos de otras incógnitas, entonces, al sustituir en otras ecuaciones del sistema, en lugar de $x$, el polinomio citado de otras incógnitas, obtendremos un sistema equivalente de ecuaciones, es decir, resultan equivalentes los dos siguientes sistemas:*

$$\left\{\begin{array}{l} x=Q(y, z, \ldots, t), \\ P_2(x, y, z, \ldots, t)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t)=0 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{l} x=Q(y, z, \ldots, t), \\ P_2[Q(y, z, \ldots, t), y, z, \ldots, t]=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m[Q(y, z, \ldots, t), y, z, \ldots, t]=0. \end{array}\right.$$

Observemos que si en el segundo sistema se examinan sólo las ecuaciones $P_2=0$, $P_3=0$, ..., $P_m=0$, entonces ellas forman un sistema de ecuaciones con un número de incógnitas menor que en el primer sistema.

4. *Si la primera ecuación del sistema* (29) *se sustituye por una ecuación igual a la suma de la primera ecuación multiplicada por cierto número real $\beta \neq 0$, con la segunda ecuación multiplicada por cierto número real $\alpha$, entonces, el sistema obtenido de ecuaciones será equivalente al sistema de ecuaciones* (29), *es decir, cualesquiera que sean $\beta \neq 0$ y $\alpha$ reales, serán equivalentes los dos siguientes sistemas de ecuaciones:*

$$\left\{\begin{array}{l} P_1(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t)=0, \end{array}\right.$$

y

$$\left\{\begin{array}{l} \beta P_1(x, y, z, \ldots, t)+\alpha P_2(x, y, z, \ldots, t)=0; \\ P_2(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t)=0. \end{array}\right.$$

A título de corolario de la afirmación 4 tenemos las **afirmaciones:**

5. *Si la primera ecuación del sistema* (29) *se sustituye por la suma (o la diferencia) de las ecuaciones primera y segunda del sistema, el sistema obtenido de ecuaciones será equivalente al sistema de ecuaciones* (29).

6. *Si la primera ecuación del sistema* (29) *es equivalente al conjunto de ecuaciones $Q_1(x, y, z, \ldots, t)=0$, $Q_2(x, y, z, \ldots, t)=0$, ... ..., $Q_k(x, y, z, \ldots, t)=0$, entonces el sistema* (29) *será equiva-*

*lente al siguiente conjunto de sistemas de ecuaciones:*

$$\begin{cases} Q_1(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} Q_2(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t)=0, \end{cases} \quad \ldots$$

$$\ldots, \begin{cases} Q_k(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ P_2(x, y, z, \ldots, t)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m(x, y, z, \ldots, t)=0 \end{cases} \tag{31}$$

Si otras ecuaciones del sistema (29) son equivalentes a sus respectivos conjuntos de ecuaciones, entonces a cada sistema de conjuntos (31) es aplicable la afirmación 6 y cada sistema de conjuntos (31) puede ser sustituido por su conjunto de sistemas de ecuaciones. El conjunto completo de sistemas de ecuaciones, equivalente al sistema (29), se obtiene examinando todos los casos lógicamente posibles.

**Observación.** Los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales se analizan detalladamente en el cap. X.

**Ejemplo.** Resolvamos un sistema de ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x^2+y+z=2, \\ x+y^2+z=2, \\ x+y+z^2=2. \end{cases} \tag{32}$$

Sustituyamos la primera ecuación por la diferencia entre las ecuaciones primera y segunda, y sustituyamos la segunda ecuación por la diferencia entre las ecuaciones segunda y tercera. De resultas, según la afirmación 5, obtendremos un sistema que será equivalente al de partida:

$$\begin{cases} x^2+y-x-y^2=0, \\ y^2+z-y-z^2=0, \\ x+y+z^2=2. \end{cases} \tag{33}$$

Los polinomios que figuran en el primer miembro de las ecuaciones primera y segunda del sistema (33) pueden ser descompuestos en factores:

$$x^2+y-x-y^2=(x-y)(x+y-1),$$
$$y^2+z-y-z^2=(y-z)(y+z-1).$$

Como resultado, de acuerdo con la afirmación 2, el sistema (33) es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0, \\ (y-z)(y+z-1)=0, \\ x+y+z^2=2. \end{cases} \tag{34}$$

La primera ecuación del sistema (34) es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$x - y = 0, \quad x + y - 1 = 0.$$

Por consiguiente, según la afirmación 6, el sistema (34) es equivalente al conjunto de sistemas

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ (y - z)(y + z - 1) = 0, \\ x + y + z^2 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ (y - z)(y + z - 1) = 0, \\ x + y + z^2 = 2. \end{cases} \qquad (35)$$

La segunda ecuación en los sistemas del conjunto (35) es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$y - z = 0, \quad y + z - 1 = 0.$$

Por consiguiente, el primer sistema del conjunto (35) es equivalente al conjunto de sistemas

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ y - z = 0, \\ x + y + z^2 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0, \\ y + z - 1 = 0, \\ x + y + z^2 = 2. \end{cases}$$

El segundo sistema del conjunto (35) es equivalente a la totalidad de sistemas

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y - z = 0, \\ x + y + z^2 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0, \\ x + y + z^2 = 2. \end{cases}$$

De este modo, el conjunto de sistemas (35) y, por tanto, el sistema (32), equivalente al conjunto (35), son equivalentes al siguiente conjunto de sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ y - z = 0, \\ x + y + z^2 = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0, \\ y + z - 1 = 0, \\ x + y + z^2 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y - z = 0, \\ x + y + z^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0, \\ x + y + z^2 = 2. \end{cases}$$

Todos los sistemas de este conjunto se resuelven con facilidad por el método de sustitución. El primer sistema tiene tan sólo dos soluciones $(x, y, z)$: $(-1 + \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3})$; $(-1 - \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3})$; el segundo sistema, sólo dos soluciones $(x, y, z)$: $(-1; -1; 2)$; $(1; 1; 0)$; el tercer sistema, sólo dos soluciones $(x, y, z)$: $(0; 1; 1)$; $(2; -1; -1)$; el cuarto, solo dos soluciones

$(x, y, z)$: $(1, 0; 1)$; $(-1; 2; -1)$. Por consiguiente, el sistema de partida (32) tiene solamente 8 soluciones $(x, y, z)$: $(-1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}; -1+\sqrt{3})$; $(-1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}; -1-\sqrt{3})$; $(0; 1; 1)$; $(1; 0; 1)$; $(1; 1; 0)$; $(-1; -1; 2)$; $(-1; 2, -1)$; $(2; -1; -1)$.

### *Ejercicios*

Aplicando el método de formación de cuadrado perfecto, escríbase en forma de la suma algebraica de los cuadrados de polinomios los siguientes polinomios (1 . . . 14):

**1.** $6x^2+7x-3$. **2.** $28+31x-5x^2$. **3.** $27x^2-15x-112$. **4.** $x^2-6(x+12)$.

**5.** $x(x+34)+289$. **6.** $-\frac{1}{2}x^2+2x+1$. **7.** $\frac{1}{3}x^2-4x+2$. **8.** $9-3x-\frac{x^2}{4}$.

**9.** $4x^2-4x+1$. **10.** $4x^4+3x^2+1$. **11.** $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$.

**12.** $x^4+2x^3-x+\frac{1}{4}$. **13.** $x^4-2x^3+\frac{3x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$.

**14.** $16x^6+16x^7-4x^8-4x^9+x^{10}$.

Escríbanse los polinomios que siguen en forma de un trinomio de segundo grado respecto de $x$, y hállense sus discriminantes (15 . . . 33):

**15.** $3-\frac{4x}{15}+4x^2$. **16.** $23x-120-x^2$.

**17.** $13x-11-8x(1+x)$. **18.** $x(22+x)-2(x-3)$.

**19.** $4+x^2+2(4x+6)$. **20.** $(x-1)(3-2x)-3x^2+2$.

**21.** $(2x-3)(3x+1)-(x-11)$. **22.** $3(x+1)(2x+3)-(x-1)^2$.

**23.** $8x-(4x+3)(x-2)-x(2x-1)$. **24.** $x^2-(x+2)(3-x)-2x-8$.

**25.** $5(4x^2+4)-3(x-1)+4(x+1)$. **26.** $\frac{1}{3}(1-x)(2-x)-\frac{x}{2}$.

**27.** $\frac{1}{6}(2x+9)-\frac{1}{10}(x^2-2x)$. **28.** $3+\frac{(3+1)(x-2)}{3}-\frac{x^2}{4}$.

**29.** $2mx-mn-nx+2x^2$. **30.** $x^2+2a(b-x)+3bc$.

**31.** $x^2-b(2x-b)-4b^2$. **32.** $5a(x-a)+8a(x+2a)-x(x-a)+2a(x-a)$.

**33.** $(x-3)(3x-a)-(x-2a)(2x-3)$.

¿Pertenecerá el conjunto $\{1; -2\}$ al conjunto de todas las soluciones de las siguientes ecuaciones (34 . . . 41):

**34.** $2x+1=3(x-2)-(x-7)$; **35.** $(x-1)(x+2)=0$;

**36.** $2x+x^2-3=0$; **37.** $x^6+7x^3=8$;

**38.** $4+x^4=5x^2$; **39.** $x^3+2x(1-x)=x^2$;

**40.** $x^3+3x(x-3)=7x-9$; **41.** $(x^2+3x-5)(x^2+3x+3)+7=0$?

¿Serán equivalentes las siguientes dos ecuaciones (42 . . . 54):

**42.** $2x+1=3$ y $2x=2$; **43.** $\frac{7x+5}{2}=9,5$ y $x(x-1)=2$;

**44.** $x^2=4$ y $x^4-16=0$; **45.** $x^2+1=0$ y $x^4+1=0$;

**46.** $9x(2x-3)=26$ y $(6x-13)(3x+2)=0$;

**47.** $(x-2)(3+4x)=2x^2$ y $\left(x+\frac{\sqrt{73}-5}{4}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{73}}{4}\right)=0$;

48. $(x+4)=0$ y $(x+4)(x^3+4x+100)=0$;
49. $x-12=17-2x$ y $(x-12)^2=(17-2x)^2$;
50. $x^2=6-x$ y $x^2(x-2)=(6-x)(x-2)$;
51. $x^2+6=5x$ y $(x^2+6)(x+4)=5x(x+4)$;
52. $3=2x-x^2$ y $3+(x^2+5)=2x-x^2+(x^2+5)$;
53. $\frac{x}{7}(x-4)=0$ y $2(x+1)(x+3)+8=(2x+1)(x+5)$;
54. $(3x+2)(2x-7)=6(x+2)^2+7$ y $3[5-2(x^2-2x+10)]=5x$?

¿Serán equivalentes las siguientes ecuaciones y conjuntos de ecuaciones (55 ... 72):

| | Ecuación | Conjunto de ecuaciones |
|---|---|---|
| 55. | $3x-4-\frac{4(7x+9)}{15}=\frac{4}{5}\left(6+\frac{x-1}{3}\right)$ | $13x-92=0;\ x=7\frac{1}{13}$; |
| 56. | $\frac{1}{6}(2x+9)-\frac{1}{10}(x^2-1)=(x+5)(x+3)$ | $7x=18-2x;\ 3x+6=0$; |
| 57. | $\frac{(3x-2)(x-1)}{21}=1\frac{2}{7}+\frac{(x-3)^2}{7}$ | $2x-5[7-(x-6)(x+1)]=28;\ x=4$; |
| 58. | $2x^2-32=x+4$ | $x=-4;\ 3x+12=0$; |
| 59. | $(3x-5)(2x-5)=x^2+2x+3$ | $x-4=0;\ x=\frac{7}{3}$; |
| 60. | $2x(x+7)=x^2+3x$ | $5x^2=6x;\ 5x+4=0$; |
| 61. | $2x^2-15=x$ | $2(x-1)=x+1;\ 2x+5=0$; |
| 62. | $15-11x=8x(1+x)$ | $8x-5=0;\ x+3=0$; |
| 63. | $x^2+\frac{1}{8}=\frac{3x}{4}$ | $2x=1;\ 2x+6=2(x+4)+1$; |
| 64. | $(x+1)(2x+3)=4x^2-22$ | $0,3x-1,8=0,7-0,2x;\ 2x+5=0$; |
| 65. | $(3x+5)^2+2x(3x+5)=0$ | $3\{7-3[x-2(x-1)]\}=6x;\ 2x=5$; |
| 66. | $\frac{7}{8}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{5}{11}(3x-1)^2=0$ | $3x-1=0;\ 6-(3-x)=4x-4$; |
| 67. | $(x+1)^2+(x-2)^2=2(x^2-2,5)$ | $15-x(8-x)=(x-5)^2;\ x=5$; |
| 68. | $\frac{x(2x+1)}{14}-\frac{(x+2)(x-4)}{7}=1\frac{1}{2}$ | $0,5x+\frac{x}{3}=x-3;\ 2(x-5)^2=0$; |
| 69. | $\frac{3}{5}(2x-7)=\frac{2}{3}(x-8)^2$ | $\frac{x}{3}-0,25x=1\frac{1}{2};\ 2x-\frac{1}{3}=0$; |
| 70. | $3(x-9)^2-2(x-9)-16=0$ | $\frac{x}{3}-\frac{3}{5}\left(x+\frac{4}{3}\right)=\frac{13}{2};\ x^2-14x+49=0$; |
| 71. | $3x(x-2)-(x+1)(x-13)=0$ | $x^2+7=0;\ 13x^2-14x+9=0$; |
| 72. | $4(2x-3)^2-4(2x-3)+1=0$ | $\sqrt{3}x^2-x+2=0;\ \frac{3(2x-7)(x^2+1)}{4}=0$. |

Resuélvanse las siguientes ecuaciones (73 . . . 123):

73. $5 - 4(x-3) = x - 2(x-1)$.

74. $4(3+x) - 3(2x-5) = 6 - x - 2(3-x)$.

75. $3\{15 - 2[x - 2(x-4)] - x\} = 5x - 20$.

76. $6 - \frac{x-1}{2} = \frac{3-x}{4} + \frac{x-2}{3}$. 77. $\frac{2x-5}{11} - \frac{x-2}{7} = 5x - 17\frac{1}{2}$.

78. $0{,}2(x-1) + 0{,}5(3x-9) = \frac{x}{3} - 2$. 79. $\frac{0{,}75-x}{3} - \frac{0{,}47+2x}{5} = \frac{4{,}4x}{1{,}5}$.

80. $(x+2)(x-1) = 0$. 81. $2x(3x-4) = 0$.

82. $(3x+4)(5-2x) = 0$.

83. $x^2 - 7x + 6 = 0$. 84. $2x^2 - 5x + 12 = 0$.

85. $3x^2 - 7x - 1 = 0$. 86. $2x(x+6) = x^2 - 3x$.

87. $3(x^2+20) = 21x$. 88. $x + 2x(x-1) = 5$.

89. $(2x+5)^2 + 2x(3x+5) = 0$. 90. $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{3}+2\right) - 1 = 0$.

91. $7(x^2+5x+8) = 3(x+1)(x-2)$.

92. $3(x^2-3x+1) - 2x(x-2) = 20 - 3(x+1)(2x-4)$.

93. $2(x-3) - 3(x^2-2x-4) = 4x^2 - (3-5x)(x-1) - 34$.

94. $3(x-2)^2 - \frac{3(2-x^2)}{4} = x - 1\frac{1}{2}$.

95. $(x+2)(x-3) + x(x+4) = (x-3)(x-7) + x^2$.

96. $(x+1)(x+2) + 9 + (x+2)(x+3) = (x+3)(x+4)$.

97. $(2+0{,}5x)\left(\frac{x}{3}-1\right) + 3\frac{1}{2} = 0{,}2\left(\frac{x}{2}+2\frac{1}{2}\right)$.

98. $18 + (x+4)(x-3)(x-1) = (x+1)(x+3)(x+2)$.

99. $(1-x)(x+2)(x+3) = 9x^2 - x^3 + 4(1-7x)$.

100. $x^2 + 4x - 8\sqrt{8}\cdot x + 20 = 0$. 101. $x(x-3) - 2x(\sqrt{2}\cdot x - 3) = 0$.

102. $(x+1)(x-3) - 2(x+\sqrt{7}) = 0$.

103. $3x^2 - 2x(x-\pi) + (x+2)(3x-1) = 0$.

104. $(\sqrt{2}-x)x - (\sqrt{3}x+4)(x+2) = 0$. 105. $(x+2)^2 = 2(x+2) + 3$.

106. $(x^2+5x-7)(2x^2+10x-11) + 1 = 0$. 107. $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$.

108. $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$. 109. $x^9 - 2x^5 + x = 0$.

110. $(x^4+x^2+1)(x^4+x^2+2) = 12$. 111. $(x^2+2x+1)(x^2-5x+7) = 0$.

112. $(4x^3 - 19x^2 + 12x)(2x^2 - 7x + 6) = 0$.

113. $(x^2-1)(x^2-5x-6) = 0$. 114. $3x^3 - 3x(x-1) = 7x^2$.

115. $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$. 116. $x^3 + x - 2 = 0$.

117. $x^3 - 2(x+1) = x$. 118. $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$.

119. $(x+9)(x-1)(2x^2+16x-20) = 12$.

120. $(x^2-5x+7)^2 - 2(x-2)(x-3) = 1$.

121. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. 122. $x^4 - x(x^2-x+1) = 0$.

123. $x^5 + x^3 = x^4$.

¿Pertenece el conjunto $\{-2; 1\}$ al conjunto de todas las soluciones de las siguientes desigualdades (124 . . . 134):

124. $7x - 3(2x+3) > 2(x-4)$; 125. $\frac{x+1}{4} < 2\frac{1}{2} - \frac{1-2x}{3}$;

126. $\frac{6-5x}{5}+\frac{3x-1}{2}>5-x$; 127. $\frac{7x}{4}<0,3(x+7)+2\frac{1}{5}$;

128. $x(x-1)-6>5x-x^2$; 129. $x^2-4x+3<0$;

130. $\frac{1}{4}x^2-3(x+5)<0$; 131. $9x^2-6x+1>0$;

132. $x(x-3)-2<3x-(x^2+2)$; 133. $4x^2+6\left(x-\frac{3}{2}\right)>2$;

134. $(x-2)(3x+4)(x^2+1)>0$?

¿Son equivalentes las siguientes dos desigualdades (135 . . . 153):

135. $x^2+4x+12>0$ y $x-x^2-3>0$;

136. $(2x-5)(2x-1)<0$ y $\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$;

137. $(x-1)^2>0$ y $1-x<0$;

138. $4x-3>1$ y $(4x-3)(x+2)>x+2$;

139. $2(5x-4)<4$ y $4(5x-4)^2\leqslant 16$;

140. $x+3>0$ y $x^3>-3x^2$;

141. $x-x^2\leqslant 2$ y $(x-x^2)(x+4x^2+5)\leqslant 2(x+4x^2+5)$;

142. $2x-4>3$ y $2x-4+2(x+3)>3+2(x+3)$;

143. $x^2-5x+6\leqslant 0$ y $1\leqslant 2x+7\leqslant 3$;

144. $x^2-x-6\geqslant 3x-1$ y $3\leqslant 5-2x\leqslant -5$;

145. $x+4<3x-2$ y $x(x+1)^2>3(x+1)^2$;

146. $\frac{x}{2}-3\left[2x-\frac{1-2(x-3)}{2}\right]>x+5\frac{1}{2}$ y $x>3$;

147. $6x^2-29x+30<0$ y $-3x^2+5x+2>0$;

148. $(x^2-4)(x+1)>0$ y $x^2-2x-3>0$;

149. $x^2-x+1>0$ y $4x^2+x+3>0$;

150. $x^3-1<0$ y $x<1$;

151. $x\geqslant -1$ y $x^3+1\leqslant 0$;

152. $x^8-x^5+x^2-x+1\geqslant 0$ y $x^2-3x+10\geqslant 0$;

153. $2x^2-1\leqslant x^4$ y $4x^4-4x^3+5x^2-4x+1\geqslant 0$?

Resuélvanse las siguientes desigualdades (154 . . . 205):

154. $21-7(2x-9)>3x$. 155. $5(3-x)-3(x-4)<16x$;

156. $2(x-1)-3(2x-3)>6-3(x+5)$.

157. $\frac{1}{3}(3-2x)-\frac{1}{6}(4-5x)>\frac{1}{5}(x+4)-16$.

158. $\frac{x}{3}-\frac{(4x-7)(3x-5)}{15}<\frac{2}{5}-\frac{(4x-9)(x-1)}{5}$.

159. $\frac{1}{6}(2x+24)-0,1(x+1)>\frac{2x}{5}-0,3(2-3x)$.

160. $\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)<\frac{3}{5}\left(x+\frac{4}{3}\right)+\frac{7}{2}$.

161. $3x-4-\frac{4(5x-9)}{15}>\frac{4}{5}\left(6-\frac{x-2}{3}\right)$.

162. $(3x-2)(2x-3)-(2x-1)(x-2)+6x>(2x-3)^2$.

163. $\frac{(3x-4)(3x+1)}{3}-\frac{(8x-11)(x+2)}{4}<\frac{(6x-1)(2x-3)}{12}$.

164. $\frac{(3x-2)(x-1)}{21}<1\frac{2}{7}+\frac{(x-3)^2}{7}-2(3x+1)$.

165. $(2x + 3)(x - 7) - (23x - 11) \leqslant 2(x + 8)(x - 2)$.

166. $\frac{3}{5}(2x-7) - \frac{2}{3}(x-8) - 4 \geqslant \frac{4x+1}{15} + \frac{4}{15}(x-11)$.

167. $x^2 - x - 2 < 0$. 168. $3x^2 - 5x - 8 \leqslant 0$.

169. $15x^2 - 77x + 10 > 0$. 170. $3x^2 + 13x - 30 \geqslant 0$.

171. $16x - 15x(x + 1) < 0$. 172. $21 - 22x - 24x^2 \leqslant 0$.

173. $(x - 4)^2 (x + 5) \leqslant 0$.

174. $\frac{(2-x)x}{2} > x + \frac{1+3x}{4}$.

175. $(x - 3) \geqslant (x - 3)^2$. 176. $8x(x + 2) + 3(x + 1) > -1$.

177. $(2x + 2)(x - 1) < 5x + 6$.

178. $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} > x(x-1) + 4$.

179. $\sqrt{6}\,x^2 - 2\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,x + 2 \leqslant 0$.

180. $(x^2 - 16x)^2 - 63 \geqslant 2(x^2 - 16x)$.

181. $x^2 + 2x + 7 \geqslant (4 + 2x + x^2)(3 + 2x + x^2)$.

182. $(3x^2 - 4x + 1)(4x^4 - 5x^3 + x^2) \leqslant 0$.

183. $x^3 + 2x^2 > 6 + 3x$. 184. $(x + 2)(x - 1)(x - 3)^2 \leqslant 0$.

185. $(x + 4)(x + 2)^3 (x - 1)(2 - x)^2 (x^2 - 3x + 5) > 0$.

186. $(x^2 - 4)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - x - 2) \leqslant 0$.

187. $(9 - x^2)(x^2 - 2x - 3)(x + 8) \geqslant 0$.

188. $(x^3 - 2x^2 - 3x + 4)(x^2 - 3x + 7) > 0$.

189. $(27 - 37x^2 - 16x^4)(x^2 + x + 1) < 0$.

190. $(x^2 - 4x - 12)(x^3 - 7x - 6) \geqslant 0$. 191. $(x^2 + 10x + 25) \times$
$\times (25 - x^2) > 0$.

192. $(2x^2 - 3x - 14)(2x^2 + 11x + 14) < 0$.

193. $(3x^3 - 24)(2x^2 + 6x - 20) \geqslant 0$.

194. $(x^2 + 4x - 45)(3x^2 - 14x - 5)(x + 1) \leqslant 0$.

195. $(2x^2 + 2x)(x^2 - 2x + 1)(3x^3 + 7x - 10) > 0$.

196. $(6x^3 - x^2 + 16)(8x^3 - 14x^2 + 19x - 4) < 0$.

197. $x(x^2 + 3x - 4) > 7x^3 - 18x^2 + 6x + 5$.

198. $4x^3 + 3x^2 - 5(4x + 3) > 2x^3 - 5x(2 + 5x - x^3)$.

199. $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 10 \geqslant 0$.

200. $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 5x + 6)(1 - x^2) \leqslant 0$.

201. $(5x^2 - x - 4)(x^3 - 1)(x - 10) > 0$.

202. $3(x^2 + 3x + 2) \geqslant (x + 1)(x + 2)(x + 3)$.

203. $(x^2 - 16)(3x - 9) \leqslant (x^2 - 8x + 16)(2x + 8)$.

204. $(x^2 + 4x)(x^2 + x - 6) > (x^3 - 9x)(x^2 + 2x - 8)$.

205. $(3x^2 - 7x + 2)(x^2 - 9) < (2x^2 - 5x - 3)(9x^2 - 6x + 1)$.

En los problemas №№ 206 . . . 213 por colección numérica $(a;\ b)$ se entiende una colección numérica correspondiente a la colección de incógnitas $(x;\ y)$ para $x = a$ e $y = b$.

¿Pertenece el conjunto $\{(2;\ 1)\}$ al conjunto de todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones (206 . . . 209)?:

206. $\begin{cases} 7x + 5y = 1, \\ 5x + 7y = 11; \end{cases}$ 207. $\begin{cases} 95y - 49 = 23x, \\ 76y = 102 - 13x; \end{cases}$

208. $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$ 209. $\begin{cases} 14x + 9y = 9, \\ 9x + 4y = 4? \end{cases}$

¿Es el conjunto $\{(2; 3), (3; 2)\}$ el conjunto de todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones (210 ... 213):

**210.** $\begin{cases} x+y=5, \\ x^3+y^3=35; \end{cases}$ **211.** $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2y^2+24=10xy; \end{cases}$

**212.** $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133. \end{cases}$ **213.** $\begin{cases} x^2+4y^2+80=15x+30y, \\ xy=6? \end{cases}$

En los problemas №№ 214 ... 221 por selección numérica $(a, b, c)$ se entiende una colección numérica que corresponde a la colección de incógnitas $(x, y, z)$ para $x=a$, $y=b$, $z=c$.

¿Pertenece el conjunto $\{(3; 2; 1)\}$ al conjunto de todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones (214 ... 217)?

**214.** $\begin{cases} 2x+y+z=8, \\ 5x-3y+2z=3, \\ 7x+y+3z=20; \end{cases}$ **215.** $\begin{cases} 5x-3z=4(1+y), \\ 2(z+2x)=8+3y, \\ 2y+3x=14-z; \end{cases}$

**216.** $\begin{cases} x^2-y^2+z^2=6, \\ 2yx-zx+2xy=13, \\ x-y+z=2; \end{cases}$ **217.** $\begin{cases} (x-1)(y+5)=14, \\ (y+5)(z+8)=63, \\ (z+8)(x-1)=18? \end{cases}$

¿Es el conjunto $\{(3; 4; 1), (-3; -4; -1)\}$ el conjunto de todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones (218 ... 221)?

**218.** $\begin{cases} x^2yz=36, \\ xy^2z=48, \\ xyz^2=12; \end{cases}$ **219.** $\begin{cases} x^2+xy+xz=25, \\ xy+y^2+yz=32, \\ xz+yz+z^2=8; \end{cases}$

**220.** $\begin{cases} xy^2z^2=36, \\ x^2yz^2=144, \\ x^2y^2z=48; \end{cases}$ **221.** $\begin{cases} xy+2x+y=24, \\ yz+3y+2z=15, \\ zx+x+3z=9? \end{cases}$

¿Son equivalentes los siguientes dos sistemas de ecuaciones (222 ... 229)?

**222.** $\begin{cases} 3x+2y=13, \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ y $\begin{cases} \dfrac{3x+1}{7}-\dfrac{2x-y}{2}=\dfrac{2y-x}{8}, \\ \dfrac{4x-2}{3}-\dfrac{4y-5x}{2}=\dfrac{x+y}{5}; \end{cases}$

**223.** $\begin{cases} x+y=11, \\ xy=12 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y=11, \\ x^2+xy+y^2=91; \end{cases}$

**224.** $\begin{cases} x+5y=26, \\ x^2-25y^2=156 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+2y=1, \\ x^3+8y^3=127; \end{cases}$

**225.** $\begin{cases} 7x-4y=23, \\ 49x^2-16y^2=1081 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y=5, \\ 4(x^2+y^2)=17xy; \end{cases}$

**226.** $\begin{cases} y-x=2, \\ 35x^2+35y^2=74xy \end{cases}$ y $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=741; \end{cases}$

**227.** $\begin{cases} x+y=6, \\ y+z=10, \\ z+x=20 \end{cases}$ y $\begin{cases} 4x-5y+6z=3, \\ 8x-7y-3z=9, \\ 7x-8y+9z=6; \end{cases}$

**228.** $\begin{cases} yz+zx=16, \\ zx+yx=25, \\ xy+zy=-39 \end{cases}$ y $\begin{cases} x^2+xy+xz=48, \\ xy+y^2+yz=12, \\ xz+yz+z^2=84; \end{cases}$

**229.** $\begin{cases} y+x-z=14, \\ y^2+z^2-x^2=46, \\ yz=9 \end{cases}$ y $\begin{cases} (x+y)^2-z^2=65, \\ x^2-(y+z)^2=13, \\ x+y-z=5? \end{cases}$

Resuélvanse los siguiontes sistemas de ecuaciones (230 . . . 273):

**230.** $\begin{cases} 4x+3y=21, \\ 4x-3y=3. \end{cases}$

**231.** $\begin{cases} 13+2y=9x, \\ 7x=3y. \end{cases}$

**232.** $\begin{cases} 9x+3y-2=0, \\ 10x+6y-4=0. \end{cases}$

**233.** $\begin{cases} 7x=8-7y, \\ 16y+16x-8=0. \end{cases}$

**234.** $\begin{cases} 5x-3=-2y, \\ 6y+15x=9. \end{cases}$

**235.** $\begin{cases} x+y=12, \\ 2xy=9\,(x-y). \end{cases}$

**236.** $\begin{cases} x+y=5, \\ x^2y^2-10xy+24=0. \end{cases}$

**237.** $\begin{cases} x+3y=10, \\ x^3+27y^3=280. \end{cases}$

**238.** $\begin{cases} x+y=11, \\ x^3+y^3=341. \end{cases}$

**239.** $\begin{cases} x-y=2, \\ x^4=272-y^4. \end{cases}$

**240.** $\begin{cases} x+y=3, \\ x^5+y^5=1023. \end{cases}$

**241.** $\begin{cases} x-y=2, \\ (x^2+y^2)\,(x^3-y^3)=260. \end{cases}$

**242.** $\begin{cases} x+3xy=35, \\ y=22-2xy. \end{cases}$

**243.** $\begin{cases} x^3=5x+y, \\ y^3=x+5y. \end{cases}$

**244.** $\begin{cases} xy=35, \\ 2\,(x+y)^2+324=51\,(x+y). \end{cases}$

**245.** $\begin{cases} xy=72, \\ x^2+y^2=145. \end{cases}$

**246.** $\begin{cases} x^2+xy=210, \\ y^2=231-xy. \end{cases}$

**247.** $\begin{cases} (x-y)^2=3-2x-2y, \\ y\,(x-y+1)=x\,(y-x+1). \end{cases}$

**248.** $\begin{cases} 3x^2+xy=2x+6, \\ 2y=y^2+3xy+3. \end{cases}$

**249.** $\begin{cases} x^2-3y^2=3y-x-30, \\ x^2+y^2+x+y=18. \end{cases}$

**250.** $\begin{cases} x^2+2xy+10y^2=145, \\ xy+y^2=24. \end{cases}$

**251.** $\begin{cases} x^2+4y^2=5xy, \\ 2x^2=y^2+31. \end{cases}$

**252.** $\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ x^3-y^3=8\,(x-y). \end{cases}$

**253.** $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37, \\ x^3-y^3=37. \end{cases}$

**254.** $\begin{cases} x^2-xy+y^2=39, \\ x^3+y^3=351. \end{cases}$

**255.** $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ (x+y)\,(y^3+x^3)=19. \end{cases}$

**256.** $\begin{cases} x^2y+xy^2=120, \\ x^3+y^3=152. \end{cases}$

**257.** $\begin{cases} x^4+y^4-x^2y^2=5, \\ x^2-y^2-xy=1. \end{cases}$

**258.** $\begin{cases} x^2+xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133. \end{cases}$

**259.** $\begin{cases} 10x-9z=19, \\ 8x-y=10, \\ y-12z=10. \end{cases}$

**260.** $\begin{cases} 5x-4y+z=3, \\ 3x+y-2z=31, \\ 8x-3y-z=1. \end{cases}$

**261.** $\begin{cases} 2x-y=z+12, \\ 3z+3y=6x-36, \\ 2\,(y+z)=4\,(x-6). \end{cases}$

**262.** $\begin{cases} x+y-z=1, \\ y+z-x=1, \\ x+z-y=1. \end{cases}$

**263.** $\begin{cases} 4x-2y=7x, \\ y+z=x, \\ y^2-4=8x-3z^2. \end{cases}$

**264.** $\begin{cases} x+y+z=19, \\ x^2+y^2+z^2=91, \\ y^2=xz. \end{cases}$

**265.** $\begin{cases} x-y+z=2, \\ x^2+z^2=y^2+6, \\ 2\,(xy+yz)=13+zx. \end{cases}$

**266.** $\begin{cases} xy+2x+y=7, \\ yz+3y+2z=12, \\ zx+z+3x=15. \end{cases}$

**267.** $\begin{cases} xy+yz=10, \\ yz+zx=12, \\ zx+yz=10. \end{cases}$

**268.** $\begin{cases} (x+y)\,(x+z)=63, \\ (y+z)\,(y+x)=42, \\ (z+x)\,(z+y)=54. \end{cases}$

**269.** $\begin{cases} x\,(x+y+z)=42, \\ y\,(x+y+z)=70, \\ z\,(x+y+z)=84. \end{cases}$

270. $\begin{cases} y + z = xyz, \\ z + x = xyz, \\ x + y = xyz. \end{cases}$

271. $\begin{cases} x^2yz = 6, \\ xy^2z = 18, \\ xyz^3 = 12. \end{cases}$

272. $\begin{cases} x^2yz^2 = 144, \\ x^2y^2z = 48, \\ xy^2z^3 = 36. \end{cases}$

273. $\begin{cases} x^3y^2z = 24, \\ xy^3z^2 = 18, \\ x^2yz^3 = 108. \end{cases}$

¿Qué figura en el plano de coordenadas se define por las siguientes ecuaciones (274 . . . 281)?

**274.** $y = 1$; **275.** $x - 2y = 0$; **276.** $3x - 2y = 1$; **277.** $xy = 0$; **278.** $(1 - x)(x - y) = 0$; **279.** $x^2 + y^2 = 5$; **280.** $x^2 + y^2 = 0$; **281.** $x^2 - y^2 = 0$?

¿Tienen un punto común las siguientes dos rectas (282 . . . 284)?

**282.** $x + 2y = 4$ y $2x + 3y = 7$;

**283.** $4x - y = 3$ y $8x = 2y + 6$;

**284.** $2x - y - 3 = 0$ y $2y + 9 = 4x$?

¿Tienen un punto común la circunferencia y la recta siguientes (285 . . . 289):

**285.** $x^2 + y^2 = 16$ y $2x + 5 = 0$;

**286.** $x^2 + y^2 = 25$ e $y = x$;

**287.** $x^2 + y^2 = 49$ e $y = 2x - 3$;

**288.** $x^2 + y^2 = 4$ e $y = 7 - x$;

**289.** $x^2 + y^2 = 18$ e $y = x + 3\sqrt{2}$?

CAPÍTULO

# IV

# POTENCIAS Y LOGARITMOS

## § 1. Potencia con exponente entero

En el primer capítulo se ha definido la operación de elevación a potencia con exponente natural de cualquier número real. En el párrafo presente se repite esta definición y, además, se aducen las definiciones de elevación de un número a potencia nula y a potencia con exponente entero negativo.

Sea $a$ un número real cualquiera y $n$, cualquier número natural. Entonces, se denomina *potencia del número a con exponente natural n* (*o bien n-ésima potencia del número a*) un número que se escribe en la forma $a^n$ y que se determina según la regla

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{aa \cdots a}_{n \text{ veces}}, & \text{si } n \geqslant 2; \\ a, & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Sea $a$ un número cualquiera real distinto de cero. Entonces, se denomina *potencia nula de este número* la unidad, es decir, por definición, $a^0 = 1$ para cualquier número real $a$ distinto de cero.

*La potencia nula del número cero no se define y el símbolo* $0^0$ *se considera privado de sentido.*

Sea $a$ un número real cualquiera distinto de cero y $n$, cualquier número natural, entonces se llama *potencia del número a con exponente entero negativo* $(-n)$ el número $\frac{1}{a^n}$, es decir, por definición, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ para cualquier número real $a$, distinto de cero, y para todo número entero negativo $(-n)$.

*La potencia entera negativa del número cero no se define y el símbolo* $0^{-n}$ *se considera privado de sentido.*

Así pues, la potencia natural ($n$-ésima) se determina para cualquier número real, mientras que las potencias nula y entera negativa se definen sólo para cualquier número real, distinto de cero.

Si $a$ es un número real cualquiera distinto de cero, entonces se puede enunciar la definición de potencia con exponente entero, la cual representa la reunión de las definiciones antecedentes.

Sea $a$ un número real cualquiera distinto de cero y $\alpha$, cualquier número entero; entonces, *por número* $a^\alpha$ se entiende aquel que se determina según la siguiente regla:

$$a^\alpha = \begin{cases} a, & \text{si } \alpha = 1; \\ \underbrace{aa \ldots a}_{m \text{ veces}}, & \text{si } \alpha = m, \ m \text{ es un número natural}, \ m \geqslant 2; \\ 1, & \text{si } \alpha = 0; \\ \dfrac{1}{a^n}, & \text{si } \alpha = -n, \ (-n) \text{ es un número negativo entero;} \end{cases}$$

en este caso el número $a^\alpha$ se denomina *potencia con exponente entero*, el número $a$ es la *base de la potencia*, el número $\alpha$, el *exponente de la potencia*.

En el primer capítulo se han aducido las propiedades principales que posee la operación de elevación a potencia con exponente natural. Para la operación de elevación a potencia con exponente entero estas propiedades también tienen lugar.

A saber, sean $a$ y $b$ cualesquiera números reales distintos de cero, y sean $\alpha$ y $\beta$ cualesquiera números enteros, entonces:

a) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ b) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$ ;

c) $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ d) $a^\alpha : a^\beta = \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$;

e) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

**Demostremos** que estas propiedades son lícitas. La validez de la propiedad a) para $\alpha$ natural ($\alpha = n$, $n \in N$) se deduce de las leyes principales de adición y multiplicación de números reales:

$$(ab)^\alpha = (ab)^n = \underbrace{(ab)(ab) \ldots (ab)}_{n \text{ veces}} = \underbrace{a \ldots a}_{n \text{ veces}} \underbrace{b \ldots b}_{n \text{ veces}} = a^n b^n = a^\alpha b^\alpha.$$

Sea $\alpha = 0$, entonces $(ab)^\alpha = (ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 b^0 = a^\alpha b^\alpha$, es decir, $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$.

Supongamos que $\alpha = -m$, y $m$ es un número natural. Por defi-

nición de potencia con exponente negativo, $(ab)^{\alpha}=(ab)^{-m}=\frac{1}{(ab)^m}=$

según la propiedad de una potencia con exponente natural $=\frac{1}{a^m b^m}=$

según la propiedad de las fracciones $=\frac{1}{a^m}\cdot\frac{1}{b^m}=$

por definición de potencia con exponente negativo $=a^{-m}b^{-m}=a^{\alpha}b^{\alpha}$.

Por consiguiente, la propiedad a) es válida.

La propiedad b) se demuestra del modo análogo.

Con el fin de demostrar la propiedad c) examinemos cada uno de los seis casos posibles: 1) $\alpha=n$, $\beta=m$; 2) $\alpha=n$, $\beta=-m$; 3) $\alpha=-n$, $\beta=m$; 4) $\alpha=-n$, $\beta=-m$ (donde $n$ y $m$ son números naturales cualesquiera); 5) $\alpha$ es un número entero cualquiera, $\beta=$ $=0$; 6) $\alpha=0$, $\beta$ es un número entero cualquiera.

1. Cuando $\alpha=n$, $\beta=m$, la validez de la propiedad c) se desprende de las leyes principales de adición y multiplicación de los números reales:

$$a^{\alpha}a^{\beta}=a^n\cdot a^m=\underbrace{(a\ \ldots\ a)}_{n\text{ veces}}\ \underbrace{(a\ \ldots\ a)}_{m\text{ veces}}=\underbrace{a\ \ldots\ a}_{(n+m)\text{ veces}}=a^{n+m}=a^{\alpha+\beta}.$$

2. Sea $\alpha=n$, $\beta=-m$, donde $n$ y $m$ son números naturales; entonces, por definición de potencia con exponente entero negativo, tenemos

$$a^{\alpha}a^{\beta}=a^n\cdot\frac{1}{a^m}.$$

Aplicando la regla de multiplicación de fracciones, tendremos

$$a^n\cdot\frac{1}{a^m}=\frac{a^n}{a^m}.$$

Supongamos que $n>m$, entonces, aplicando la propiedad de la potencia con exponente natural, obtenemos

$$\frac{a^n}{a^m}=a^n:a^m=a^{n-m}=a^{n+(-m)}=a^{\alpha+\beta}.$$

Sea $n=m$, entonces, por definición de potencia con exponente nulo, obtenemos

$$\frac{a^n}{a^m}=1=a^0=a^{n+(-m)}=a^{\alpha+\beta}.$$

Sea $n<m$, entonces, al aplicar la propiedad de la potencia con exponente natural y la definición de potencia con exponente nega-

tivo entero, obtenemos

$$\frac{a^n}{a^m}=\frac{1}{a^m\cdot\frac{1}{a^n}}=\frac{1}{a^m a^{-n}}=\frac{1}{a^{m-n}}=a^{-(m-n)}=a^{-m+n}=a^{n+(-m)}=a^{\alpha+\beta}.$$

3. Supongamos que $\alpha = -n$, $\beta = m$, donde $n$ y $m$ son números naturales. Este caso es análogo al caso en que $\alpha = n$, $\beta = -m$.

4. Sea $\alpha = -n$, $\beta = -m$, donde $n$ y $m$ son números naturales.

| | |
|---|---|
| Entonces | $a^\alpha a^\beta = a^{-n}a^{-m} =$ |
| según la definición de potencia con exponente entero negativo | $=\frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{a^m}=$ |
| según la regla de multiplicación de fracciones | $=\frac{1}{a^n a^m}=$ |
| según la propiedad de una potencia con exponente natural | $=\frac{1}{a^{n+m}}=$ |
| por definición de potencia con exponente entero negativo | $=a^{-(n+m)}=a^{-n-m}=$ <br> $=a^{(-n)+(-m)}=a^{\alpha+\beta}.$ |

5. Sea $\alpha$ un número entero cualquiera y sea $\beta = 0$, entonces, aplicando la definición de potencia con exponente nulo, obtenemos

$$a^\alpha a^\beta = a^\alpha\cdot 1 = a^\alpha = a^{\alpha+0} = a^{\alpha+\beta}.$$

6. Supongamos que $\alpha = 0$, y $\beta$ es un número entero cualquiera, entonces, aplicando la definición de potencia con exponente nulo, obtenemos

$$a^\alpha a^\beta = 1\cdot a^\beta = a^\beta = a^{0+\beta} = a^{\alpha+\beta}.$$

Por consiguiente, la propiedad c) es lícita.

Para demostrar la propiedad d) con $\alpha$ y $\beta$ naturales ($\alpha = n$, $\beta = m$, $n \in N$, $m \in N$), examinemos tres casos:

1. Si $n > m$, entonces $n = m + l$, donde $l \in N$. Aprovechemos las propiedades fundamentales de la multiplicación y la división de números reales:

$$a^\alpha : a^\beta = a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{(a\ldots a)}^{m\text{ veces}}\overbrace{(a\ldots a)}^{l\text{ veces}}}{\underbrace{a\ldots a}_{m\text{ veces}}} = a^l = a^{n-m} = a^{\alpha-\beta}.$$

2. Si $n=m$, entonces

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a\ldots a}^{n\text{ veces}}}{\underbrace{a\ldots a}_{m\text{ veces}}} = 1.$$

Por definición, $a^0 = 1$. Por lo tanto,

$$a^\alpha : a^\beta = a^n : a^m = a^0 = a^{n-m} = a^{\alpha-\beta}.$$

3. Si $m > n$, entonces $m = n + k$, donde $k \in N$. Aprovechemos las propiedades fundamentales de la multiplicación y la división de números reales y, además, la definición de elevación a una potencia negativa:

$$a^\alpha : a^\beta = a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{(a \ldots a)}^{n \text{ veces}}}{\underbrace{(a \ldots a)}_{n \text{ veces}} \underbrace{(a \ldots a)}_{k \text{ veces}}} = \frac{1}{\underbrace{a \ldots a}_{k \text{ veces}}} = a^{-k} =$$

$$= a^{-(m-n)} = a^{n-m} = a^{\alpha-\beta}.$$

Cabe señalar que en este caso $(n - m)$ no es un número natural.

En los demás cinco casos para los valores de $\alpha$ y $\beta$ la demostración de la propiedad d) es análoga a la de la propiedad c).

Con el objeto de demostrar la propiedad e), examinemos al igual que en los casos c) y d), los seis casos posibles:

1. Supongamos que $\alpha = n$, $\beta = m$, donde $n$ y $m$ son números naturales. En este caso hagamos uso de las leyes fundamentales de adición y multiplicación de números reales:

$$(a^\alpha)^\beta = (a^n)^m = \underbrace{(a^n)(a^n)\ldots(a^n)}_{m \text{ veces}} = \underbrace{\underbrace{(a \ldots a)}_{n \text{ veces}} \ldots \underbrace{(a \ldots a)}_{n \text{ veces}}}_{m \text{ veces}} =$$

$$= \underbrace{aa \ldots a}_{nm \text{ veces}} = a^{nm} = a^{\alpha\beta}.$$

2. Supongamos que $\alpha = n$, $\beta = -m$, donde $n$ y $m$ son números nalurales. Entonces

| | |
|---|---|
| | $(a^\alpha)^\beta = (a^n)^{-m} =$ |
| por definición de potencia con exponente entero negativo | $= \frac{1}{(a^n)^m} =$ |
| según la propiedad de la potencia con exponente natural | $= \frac{1}{a^{nm}} =$ |
| por definición de potencia con exponente entero negativo | $= a^{-nm} =$ |
| | $= a^{n(-m)} = a^{\alpha\beta}.$ |

3. Supongamos que $\alpha = -n$, $\beta = m$, donde $n$ y $m$ son números naturales. La validez de esta propiedad se demuestra igual que en el caso de $\alpha = n$, $\beta = -m$.

4. Supongamos que $\alpha = -n$, $\beta = -m$, donde $n$ y $m$ son números naturales.

Entonces $(a^{\alpha})^{\beta} = (a^{-n})^{-m} =$

por definición de potencia con exponente entero negativo $= \frac{1}{(a^{-n})^m} =$

de acuerdo con el caso 3 que acabamos de examinar $= \frac{1}{a^{-nm}} =$

por definición de potencia con exponente entero negativo $= \frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}} =$

conforme a la propiedad de las fracciones $= 1 : \frac{1}{a^{nm}} =$

de acuerdo con la regla de división de las fracciones $= a^{nm} = a^{(-n)(-m)} =$
$= a^{\alpha\beta}$.

5. Supongamos que $\alpha$ es un número entero cualquiera y $\beta = 0$, entonces, por definición de potencia con exponente nulo, $(a^{\alpha})^{\beta} = (a^{\alpha})^0 = 1 = a^0 = a^{\alpha 0} = a^{\alpha\beta}$.

6. Supongamos que $\alpha = 0$ y $\beta$ es un número entero cualquiera, entonces, por definición de potencia con exponente nulo, $(a^{\alpha})^{\beta} = (a^0)^{\beta} = (1)^{\beta} = 1 = a^0 = a^{0\beta} = a^{\alpha\beta}$.

Por consiguiente, la propiedad e) es lícita.

**Ejemplo.** Hagamos uso de la propiedad de la potencia con exponente entero para calcular la siguiente expresión numérica:

$$A = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} \cdot 2^4}{\left(\frac{8}{3}\right)^0 + 4^{-1} - 5 \cdot 10^{-1}}.$$

Puesto que $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3} = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}$, $\left(\frac{8}{3}\right)^0 = 1$, $(4)^{-1} = \frac{1}{4}$, $5 \cdot 10^{-1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, tenemos

$$A = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{27}{64} \cdot 16}{1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} = 1.$$

## § 2. Potencia con exponente racional

En el capítulo I se ha dado la siguiente definición de raíz aritmética de un número positivo.

Sea $n$ un número natural y $a$, un número positivo. Entonces el número positivo $b$ tal, que $b^n = a$ lleva el nombre de *raíz aritmética de n-ésimo grado del número a* y se designa $b = \sqrt[n]{a}$.

Hemos asumido sin demostración la afirmación de que para todo número positivo $a$ existe una, y sólo una, raíz aritmética de $n$-ésimo grado.

Por definición de $\sqrt[n]{a}$, resulta válida la afirmación:

$$\sqrt[n]{a} \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ es un número positivo,} \\ n \text{ es un número natural,} \\ \sqrt[n]{a} \text{ es un número positivo,} \\ (\sqrt[n]{a})^n = a. \end{cases}$$

Demos a conocer ahora la definición de elevación de un número entero a una potencia con exponente racional aprovechando con este fin la definición de elevación a potencia entera y la definición de raíz aritmética de un número positivo.

Sea $a$ un número positivo y $r = \frac{p}{q}$, un número racional, con la particularidad de que $q$ es un número natural ($q > 0$). El número positivo $b$ tal, que $b = \sqrt[q]{a^p}$ lleva el nombre de *r-ésima potencia del número a* y se denota $b = a^r$, es decir, $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Observemos que $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Supongamos que $a$ y $b$ son cualesquiera números positivos y $r_1$, $r_2$, cualesquauiera números racionales. Resultan válidas las siguientes propiedades, llamadas propiedades de las potencias con exponentes racionales:

a) $(ab)^{r_1} = a^{r_1}b^{r_1}$,

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{r_1} = \frac{a^{r_1}}{b^{r_1}}$,

c) $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$,

d) $a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1-r_2}$,

e) $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1r_2}$.

Demostremos la validez de estas propiedades

a) Sea $r_1 = \frac{p}{q}$ donde $q$ es un número natural.

| | |
|---|---|
| Examinemos | $\left[(ab)^{\frac{p}{q}}\right]^q =$ |
| por definición de potencia racional | $= [\sqrt[q]{(ab)^p}]^q =$ |
| por definición de raíz aritmética | $= (ab)^p =$ |
| por la propiedad de la potencia con exponente entero | $= a^pb^p =$ |

por definición de raíz aritmética $=(\sqrt[q]{a^p})^q(\sqrt[q]{b^p})^q=$

por definición de potencia racional $=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q=$

Según la propiedad de la potencia con

exponente natural $=\left(a^{\frac{p}{q}}b^{\frac{p}{q}}\right)^q.$

Así pues, $[(ab)^{r_1}]^q=[a^{r_1}b^{r_1}]^q$. Conforme al teorema 1 del § 2, cap. II, esta igualdad es equivalente a la igualdad $(ab)^{r_1}=a^{r_1}b^{r_1}$, y la propiedad a) queda demostrada.

La propiedad b) se demuestra análogamente.

c) Supongamos que $r_1=\frac{p}{q}$, $r_2=\frac{m}{n}$. Entonces, $a^{r_1}a^{r_2}=a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{m}{n}}$.

Examinemos $\left[a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{m}{n}}\right]^{qn}=$

según la propiedad de la potencia con exponente natural $=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn}\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{qn}=$

según la propiedad de la potencia con exponente natural $=\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right]^n\left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\right]^q=$

por definición de potencia racional $=[(\sqrt[q]{a^p})^q]^n[(\sqrt[n]{a^m})^n]^q=$

por definición de raíz aritmética $=(a^p)^n(a^m)^q=$

según la propiedad de la potencia con exponente entero $=a^{pn}a^{mq}=$

según la propiedad de la potencia con exponente entero $=a^{pn+mq}=$

por definición de raíz aritmética $=(\sqrt[nq]{a^{pn+mq}})^{nq}=$

por definición de potencia racional $=(a^{\frac{pn+mq}{nq}})^{nq}.$

Así pues, tomando en consideración que $\frac{(pn+mq)}{nq}=r_1+r_2$, tenemos $(a^{r_1}a^{r_2})^{qn}=(a^{r_1+r_2})^{qn}$. De acuerdo con el teorema 1 del § 2, cap. II, esta igualdad es equivalente a la igualdad: $a^{r_1}a^{r_2}=a^{r_1+r_2}$, y la propiedad c) queda demostrada.

La propiedad d) se demuestra análogamente.

e) Supongamos que $r_1=\frac{p}{q}$, $r_2=\frac{m}{n}$. Entonces $(a^{r_1})^{r_2}=\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}$.

Examinemos $\left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}\right]^{nq}=$

según la propiedad de la potencia con exponente natural $=\left(\{(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{m}{n}}]^n\}^q=\right.$

por definición de potencia con exponente racional $=\left\{\left[\sqrt[n]{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^m}\right]^n\right\}^q=$

por definición de raíz aritmética $=\left\{\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^m\right\}^q=$

según la propiedad de la potencia con exponente entero $= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{mq} =$

según la propiedad de la potencia con exponente entero $= \left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{q}\right]^{m} =$

por definición de potencia con exponente racional $= [(\sqrt[q]{a^p})^q]^m =$

por definición de raíz aritmética $= (a^p)^m =$

según la propiedad de la potencia con exponente entero $= a^{pm} =$

por definición de raíz aritmética $= (\sqrt[qn]{a^{pm}})^{qn} =$

por definición de potencia con exponente racional $= \left(a^{\frac{pm}{qn}}\right)^{qn}$.

Así pues, $[(a^{r_1})^{r_2}]^{nq} = (a^{r_1 r_2})^{nq}$. De acuerdo con el teorema 1 del § 2, cap. II, la validez de esta igualdad predetermina la validez de la propiedad e).

Demostremos una propiedad más de la potencia con exponente racional.

f) Supongamos que $a$ es un número positivo, $r_1 = \frac{p}{q}$, un número racional, mientras que $q$ y $n$ son números naturales.

En este caso $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{pn}{qn}}$.

Examinemos $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn} =$

según la propiedad de una potencia con exponente natural $= [(a^{\frac{p}{q}})^q]^n =$

por definición de una potencia con exponente racional $= [(\sqrt[q]{a^p})^q]^n =$

por definición de raíz aritmética $= (a^p)^n =$

según la propiedad de una potencia con exponente entero $= a^{pn} =$

por definición de raíz aritmética $= (\sqrt[qn]{a^{pn}})^{qn} =$

por definición de potencia con exponente racional $= \left(a^{\frac{pn}{qn}}\right)^{qn}$.

Así pues, $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{qn} = \left(a^{\frac{pn}{qn}}\right)^{qn}$, de donde precisamente proviene la validez de la propiedad f).

Para las raíces aritméticas las propiedades demostradas tienen por expresión

a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$;

b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

c) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[k]{a}=\sqrt[nk]{a^{n+k}}$;

d) $\sqrt[n]{a}:\sqrt[k]{a}=\sqrt[nk]{a^{k-n}}$;

e) $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$, $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nk]{a}$;

f) $\sqrt[nk]{a^k}=\sqrt[n]{a}$.

**Ejemplo.** Simplifíquese la expresión numérica

$$A=(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}+\sqrt{20}-4\sqrt{2}).$$

Apliquemos las propiedades estudiadas:

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2};\quad \sqrt{72}=\sqrt{2^3\cdot 3^2}=\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{3^2}=6\sqrt{2};$$
$$\sqrt{20}=\sqrt{2^2 5}=\sqrt{2^2}\sqrt{5}=2\sqrt{5}.$$

Por consiguiente,

$$A=(4\sqrt{2}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(6\sqrt{2}+2\sqrt{5})-4\sqrt{2})=$$
$$=3\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{2})\cdot 2\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{5})=6(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})=$$
$$=6\,(5-2)=18.$$

Estudiemos ahora las propiedades principales del tipo de desigualdades para la potencia con exponente racional.

g) Supongamos que $a>1$ y $r=\frac{p}{q}$ es número racional positivo ($p>0$, $q>0$). Entonces, $a^r>1$.

| | |
|---|---|
| Examinemos | $(a^{\frac{p}{q}})^q=$ |
| por definición de potencia con exponente racional | $=(\sqrt[q]{a^p})^q=$ |
| por definición de raíz aritmética | $=a^p$. |

De acuerdo con el teorema 1 del § 2, cap. II, las condiciones $a>1$ y $a^p>1^p$ son equivalentes, quiere decir, de la condición $a>1$ se desprende que $a^p>1$, mas, en este caso, $(a^{\frac{p}{q}})^q>1^q$, es decir, $(a^r)^q>1^q$, de lo cual, según la misma propiedad, resulta que $a^r>1$. La propiedad g) queda demostrada.

h) Sea $0<a<1$, y $r=\frac{p}{q}$ *un número racional positivo* ($p>0$, $q>0$). Entonces $a^r<1$.

La demostración de esta propiedad es análoga a la del caso g).

i) Supongamos que $a>1$ y $r_1$, $r_2$ son números racionales tales, que $r_1>r_2$. Entonces $a^{r_1}>a^{r_2}$.

**Demostración.** Por cuanto $(r_1-r_2)$ es un número racional positivo, entonces, conforme a la propiedad g), $a^{r_1-r_2}>1$. Al multipli-

car esta desigualdad por el número positivo $a^{r_2}$, obtenemos (en virtud de la propiedad 21 de las desigualdades (véase el § 2 cap. II) $a^{r_2}(a^{r_1-r_2}) > a^{r_2}$. Aplicando al primer miembro la propiedad c) de una potencia con exponente racional, llegamos a que $a^{r_1} > a^{r_2}$, es decir, la propiedad i) queda demostrada.

j) Supongamos que $0 < a < 1$, y sean $r_1$ y $r_2$ números racionales tales, que $r_1 > r_2$. Entonces $a^{r_1} < a^{r_2}$.

La demostración de esta propiedad es análoga a la de la propiedad i).

**Ejemplo.** Demuéstrese que para cualesquiera números positivos $a$ y $b$ se verifica la desigualdad

$$a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} > (a+b)^{\frac{2}{3}}.$$

**Demostración.** Denotemos $a+b$ con $c$ y examinemos las fracciones $\frac{a}{c}$ y $\frac{b}{c}$. Por cuanto $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$, entonces $0 < \frac{a}{c} < 1$, $0 < \frac{b}{c} < 1$.

Valiéndonos de la propiedad j), obtenemos $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}} < 1$, $\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{1}{3}} < 1$, o bien $\left(\frac{a}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}} < 1$, $\left(\frac{b}{c}\right)^{1-\frac{2}{3}} < 1$. Por consiguiente, $\left(\frac{a}{c}\right) < \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$ y $\left(\frac{b}{c}\right) < \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$. De acuerdo con la propiedad de las desigualdades numéricas se verifica tambien la desigualdad

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}} > \frac{a}{c} + \frac{b}{c},$$

de donde, teniendo en cuenta que $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$, llegamos a que se verifica la desigualdad

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}} > 1.$$

Teniendo en cuenta que $c$ es un número positivo y multiplicando esta desigualdad por $c^{\frac{2}{3}}$, concluimos que se verifica la desigualdad $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} > c^{\frac{2}{3}}$, lo que se trataba de demostrar.

## § 3. Potencia con expontente irracional

Tomemos los valores aproximados del número $\sqrt{2}$ por defecto:

$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ \ldots$$

y los valores aproximados del número $\sqrt{2}$ por exceso:

$$2,\ 1{,}5,\ 1{,}42,\ 1{,}415,\ \ldots$$

De acuerdo con la propiedad i) de la potencia con exponente racional, tenemos

$$3^1 < 3^{1,4} < 3^{1,41} < 3^{1,414} < \ldots \qquad (1)$$

y

$$3^2 > 3^{1,5} > 3^{1,42} > 3^{1,415} > \ldots \qquad (2)$$

En las desigualdades (1) y (2) hay una infinidad de términos y cualquier término de las desigualdades (1) es inferior a cualquiera de los términos de las desigualdades (2). Resulta natural entender por número $3^{\sqrt{2}}$ un número que es superior a todo término de las desigualdades (1) e inferior a todo término de las desigualdades (2). Quiere decir, por número $3^{\sqrt{2}}$ se entiende un número que es mayor que 3 a cualquier potencia racional que aproxime $\sqrt{2}$ por defecto, y que es menor que 3 a cualquier potencia racional que aproxime $\sqrt{2}$ por exceso. Admitimos (sin demostración) que tal número existe y es, además, único.

De igual modo se determina también $a^\alpha$, donde $a > 1$, y $\alpha$ es un número irracional positivo. A saber, se hallan los números racionales $r_i$ que aproximan el número $\alpha$ por defecto: $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$ $\ldots < \alpha$, y luego, los números racionales $l_k$ que aproximan el número $\alpha$ por exceso: $l_1 > l_2 > l_3 > \ldots > \alpha$, después de lo cual se forman las desigualdades $a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r_3} < \ldots$ y $a^{l_1} > a^{l_2} >$ $> a^{l_3} \ldots$ Entonces, por $a^\alpha$ se entiende un número que es superior a cualquier número $a^{r_i}$ e inferior a cualquier número $a^{l_k}$. Esta definición puede enunciarse también del modo siguiente.

Sean dados un número $a > 1$ y un *número irracional positivo* $\alpha^\alpha$. Designemos con $r_i$ los números racionales que aproximan $\alpha$ por defecto, y con $l_k$, aquellos que aproximan $\alpha$ por exceso. *Por número a* se entiende un número $\gamma$ tal, que para cualesquiera $r_i$ y $l_k$ se verifica la desigualdad $a^{r_i} < \gamma < a^{l_k}$. Se asume aquí sin demostración que *tal número existe y es, además, único.*

Sean dados un número $a$ tal, que $0 < a < 1$, y un *número irracional positivo* $\alpha$. Denotemos con $r_i$ los números racionales que aproximan $\alpha$ por defecto, y con $l_k$, por exceso. *Por número $a^\alpha$* se entiende un número $\gamma$ tal, que para cualesquiera $r_i$ y $l_k$ se verifica la desigualdad $a^{r_i} > \gamma > a^{l_k}$. Se asume aquí sin demostración que *tal número existe y es, además, único.*

Sean dados un *número positivo a* tal, que $a \neq 1$ y un *número irracional negativo* $\alpha$. *Por número $a^\alpha$* se entiende un número igual a $\frac{1}{a^{|\alpha|}}$, es decir, si $a \neq 1$ y $\alpha$ es un número irracional negativo, entonces $a^\alpha = \frac{1}{a^{|-\alpha|}}$. Por cuanto el número $a^{|\alpha|}$ es distinto de cero y en el conjunto de números reales la operación de división es siempre realizable, entonces *existe un número* (*y este número es único*) igual al cociente $\frac{1}{a^{|\alpha|}}$. Dicho número se denomina número $a^\alpha$.

**Observación.** 1. Si $a = 1$, tenemos $a^{\alpha} = 1$ para cualquier número real $\alpha$. Por eso, en las definiciones citadas más arriba el caso de $a = 1$ no se examina.

2. En virtud de las definiciones citadas anteriormente y de la definición de potencia con exponente racional, para $a > 0$ y para cualquier número real $\alpha$ el número $a^{\alpha}$ es siempre positivo.

Para las potencias con exponente irracional resultan lícitas las siguientes propiedades. Supongamos que $a > 0$, $b > 0$, $\alpha$ es un número irracional, $\beta$, un número racional o irracional, entonces:

a) $(ab)^{\alpha} = a^{\alpha}b^{\alpha}$;

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$;

c) $a^{\alpha}a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$;

d) $a^{\alpha} : a^{\beta} = a^{\alpha-\beta}$;

e) $(a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha\beta}$.

La demostración de estas propiedades se realiza con ayuda de la teoría de los límites y por esta razón no se da en la obra presente.

## § 4. Potencia de un número positivo

Todo lo expuesto en los §§ 1 . . . 3 permite dar la definición de potencia real de un número positivo. Observemos que el número $a^{\alpha}$ existe y, además, es único para cualquier número real $\alpha$.

**Definición.** *Sean dados un número positivo $a$ y un número real $\alpha$. Por número $a^{\alpha}$ se entiende un número positivo que se determina según la siguiente regla:*

I. *Si $\alpha > 0$ y:*

1. *$\alpha = m$, $m$ es un número natural, entonces*

$$a^{\alpha} = \begin{cases} a, \text{ para } m = 1, \\ \underbrace{aa \ldots a}_{m \text{ veces}}, \text{ para } m \geqslant 2. \end{cases}$$

2. *$\alpha = \frac{1}{q}$, $q$ es un número natural, entonces $a^{\alpha} = \sqrt[q]{a}$ (raíz aritmética de $q$-ésimo grado de un número positivo);*

3. *$\alpha = \frac{p}{q}$, donde $p$, $q$ son números naturales, entonces $a^{\alpha} = \sqrt[q]{a^p}$;*

4. *$\alpha$ es un número irracional, entonces:*

a) *si $a > 1$, el número $p^{\alpha}$ será mayor que $a^{r_i}$ y menor que $a^{l_k}$, donde $r_i$ es cualquier aproximación racional del número $\alpha$ por defecto y $l_k$, cualquier aproximación racional del número $\alpha$ por exceso;*

b) *si $0 < a < 1$, entonces $a^{\alpha}$ es un número menor que $a^{r_i}$ y mayor que $a^{l_k}$ ($r_i$ y $l_k$ son los mismos que más arriba);*

c) *si* $a = 1$, *entonces* $a^\alpha = 1$.

II. *Si* $\alpha = 0$, *entonces* $a^\alpha = 1$.

III. *Si* $\alpha < 0$, *entonces* $a^\alpha = \frac{1}{a^{|\alpha|}}$.

*El número* $a^\alpha$ *recibe el nombre de potencia, el número* $a$ *es la base de la potencia y* $\alpha$, *el exponente de la potencia.*

De los §§ 1 . . . 3 se deduce que la potencia de un número positivo posee las siguientes propiedades principales: si $a$ y $b$ son números positivos, y $\alpha$ y $\beta$, cualesquiera números reales, entonces:

a) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$;

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$;

c) $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$;

d) $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$;

e) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Estudiemos ahora las propiedades principales de la potencia de un número positivo del tipo de desigualdad.

**Teorema 1.** *Si* $a > 1$ *y* $\alpha > 0$, *entonces* $a^\alpha > 1$.

**Demostración.** Si $\alpha = \frac{p}{q}$ es un número racional ($p$ y $q$ son números naturales), entonces la propiedad de $a^\alpha > 1$ ya se ha demostrado en el § 2. Si $\alpha$ es un número irracional, elegimos cualquier número racional positivo $r$ que aproxima $\alpha$ por defecto, en este caso $a^\alpha > a^r$, según la definición de potencia irracional. Al mismo tiempo, de acuerdo con la propiedad demostrada en el § 2, $a^r > 1$. Conforme a la propiedad de transitividad de las desigualdades, la validez de dos igualdades $a^\alpha > a^r$ y $a^r > 1$ predetermina la validez de la desigualdad $a^\alpha > 1$. El teorema 1 queda demostrado.

**Teorema 2.** *Si* $a > 1$ *y* $\alpha < 0$, *entonces* $a^\alpha < 1$.

**Demostración.** El número $\beta = -\alpha$ es positivo, por lo cual, al aplicar el teorema 1, tenemos $a^\beta > 1$. Multipliquemos ambos miembros de esta igualdad por el número positivo $a^\alpha$. Según la propiedad de las desigualdades tenemos $a^\beta a^\alpha > a^\alpha$; según la propiedad c) y la definición de potencias concluimos que $a^\beta a^\alpha = a^{\alpha+\beta} = a^0 = 1$, por consiguiente $a^\alpha < 1$ y el teorema 2 queda demostrado.

**Teorema 3.** *Si* $a > 1$ *y* $a^\alpha > 1$, *entonces* $\alpha > 0$.

**Demostración.** Supongamos que $a^\alpha > 1$ y $a > 1$, pero $\alpha \leqslant 0$, es decir, o bien $\alpha = 0$ o bien $\alpha < 0$. Si $\alpha = 0$, entonces $a^\alpha = 1$ por definición. Si $\alpha < 0$ y $a > 1$, entonces, aplicando el teorema 2, tenemos $a^\alpha < 1$. Así pues, si $\alpha \leqslant 0$, entonces $a^\alpha \leqslant 1$, lo que contradice la suposición de que $a^\alpha > 1$. El teorema está demostrado.

**Teorema 4.** *Si* $a > 1$ *y* $a^\alpha < 1$, *entonces* $\alpha < 0$.

La demostración del teorema es análoga a la del teorema 3.

Reunamos los teoremas 1 . . . 4.

**Afirmación 1.** *Si* $a > 1$, *entonces las condiciones* $a^\alpha > 1$ *y* $\alpha > 0$ *son equivalentes; además, son equivalentes las condiciones* $a^\alpha < 1$ *y*

$\alpha < 0$, *es decir, si* $a > 1$, *entonces*

$$a^\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha > 0,$$
$$a^\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha < 0.$$

**Teorema 5.** *Si* $0 < a < 1$ *y* $\alpha > 0$, *entonces* $a^\alpha < 1$.

**Demostración.** Examinemos el número $b > \frac{1}{a}$. Por cuanto $b > 1$, entonces, aplicando el teorema 1, tendremos $b^\alpha = 1$. Multipliquemos ambos miembros de esta desigualdad por el número positivo $a^\alpha$. Según la propiedad de las desigualdades tenemos: $b^\alpha a^\alpha > a^\alpha$. Según las propiedades de las potencias tenemos $b^\alpha a^\alpha = (ab)^\alpha = (1)^\alpha = 1$, por lo cual $a^\alpha < 1$.

**Teorema 6.** *Si* $0 < a < 1$ *y* $\alpha < 0$, *entonces* $a^\alpha > 1$.

**Teorema 7.** *Si* $0 < a < 1$ *y* $a^\alpha > 1$, *entonces* $\alpha < 0$.

**Teorema 8.** *Si* $0 < a < 1$ *y* $a^\alpha < 1$, *entonces* $\alpha > 0$.

La demostración de todos estos teoremas es análoga a la del teorema 5.

Reunamos los teoremas 5 . . . 8.

**Afirmación 2.** *Si* $0 < a < 1$, *entonces las condiciones* $a^\alpha > 1$ *y* $\alpha < 0$ *son equivalentes, además, son equivalentes las condiciones* $a^\alpha < 1$ *y* $\alpha > 0$, *es decir, si* $0 < a < 1$, *entonces*

$$a^\alpha > \Leftrightarrow \alpha < 0,$$
$$a^\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

De las afirmaciones 1 y 2 se obtiene con facilidad el siguiente **corolario**:

**Afirmación 3.** *Si* $a > 0$ *y* $a \neq 1$, *entonces las condiciones* $a^\alpha = 1$ *y* $\alpha = 0$ *son equivalentes, es decir, si* $a > 0$ *y* $a \neq 1$, *se tiene*

$$a^\alpha = 1 \Leftrightarrow \quad = 0.$$

**Teorema 9.** *Si* $a > 1$ *y* $\alpha_1 > \alpha_2$, *entonces* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$.

**Demostración.** Examinemos un número $\beta = \alpha_1 - \alpha_2$. Por cuanto $\beta > 0$, tenemos que $a^\beta > 1$. Multipliquemos ambos miembros de esta desigualdad por un número positivo $a^{\alpha_2}$. De acuerdo con la propiedad de las desigualdades, $a^\beta a^{\alpha_2} > a^{\alpha_2}$, y conforme a las propiedades de las potencias tenemos $a^\beta a^{\alpha_2} = a^{\alpha_1}$, por lo cual $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$ y el teorema 9 queda demostrado.

**Teorema 10.** *Si* $a > 1$ *y* $\alpha_1 < \alpha_2$, *entonces* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$.

**Teorema 11.** *Si* $a > 1$ *y* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$, *entonces* $\alpha_1 > \alpha_2$

**Teorema 12.** *Si* $a > 1$ *y* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$, *entonces* $\alpha_1 < \alpha_2$.

La demostración de estos teoremas es análoga a la del teorema 9

Reunamos los teoremas 9 . . . 12.

**Afirmación 4.** *Si* $a > 1$, *entonces las condiciones* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$ *y* $\alpha_1 > \alpha_2$ *son equivalentes; además, son equivalentes las condiciones* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$ *y* $\alpha_1 < \alpha_2$, *es decir, si* $a > 1$, *entonces*

$$a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_2.$$
$$a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2$$

**Teorema 13.** *Si* $0 < a < 1$ *y* $\alpha_1 > \alpha_2$, *entonces* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$.

**Teorema 14.** *Si* $0 < a < 1$ *y* $\alpha_1 < \alpha_2$, *entonces* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$.

**Teorema 15.** *Si* $0 < a < 1$ *y* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$, *entonces* $\alpha_1 < \alpha_2$.

**Teorema 16.** *Si* $0 < a < 1$ *y* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$, *entonces* $\alpha_1 > \alpha_2$.

La demostración de estos teoremas es análoga a la del teorema 9.

Reunamos los teoremas 13 . . . 16

**Afirmación 5.** *Si* $0 < a < 1$, *entonces las condiciones* $a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2}$ *y* $\alpha_1 < \alpha_2$ *son equivalentes; además, son también equivalentes las condiciones* $a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2}$ *y* $\alpha_1 > \alpha_2$, *es decir, si* $0 < a < 1$, *se tiene*

$$a^{\alpha_1} > a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2,$$

$$a^{\alpha_1} < a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 > \alpha_2.$$

De las afirmaciones 4 y 5 se obtiene con facilidad el **corolario** siguiente:

**Afirmación 6.** *Si* $a > 0$ *y* $a \neq 1$, *entonces las condiciones* $a^{\alpha_1} = a^{\alpha_2}$ *y* $\alpha_1 = \alpha_2$ *son equivalentes, es decir, si* $a > 0$ *y* $a \neq 1$, *entonces*

$$a^{\alpha_1} = a^{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2.$$

Las afirmaciones 4 y 5 se enuncian verbalmente del modo siguiente:

Si la base de una potencia es mayor que la unidad, entonces al mayor exponente le corresponde mayor potencia, y viceversa, a la potencia mayor le corresponde el mayor exponente.

Si la base de una potencia es menor que 1 ($0 < a < 1$), al mayor exponente le corresponde menor potencia y, viceversa, a la menor potencia le corresponde el mayor exponente.

**Observación.** Si $\alpha > 0$, el concepto de operación de elevación a una potencia puede extenderse al conjunto de todos los números no negativos, puesto que, por definición, $0^\alpha = 0$, si $\alpha > 0$.

Veamos cómo se emplean las propiedades de las potencias de un número positivo. Supongamos que se requiere demostrar que $3^{\sqrt{3}} < 7$.

Por definición, $3^{\sqrt{3}} < 3^r$, donde $r$ es la aproximación racional del número irracional $\sqrt{3}$ por exceso. Tomemos $r = \frac{7}{4}$. Por cuanto $\sqrt{3} < \frac{7}{4}$, entonces $3^{\sqrt{3}} < 3^{\frac{7}{4}}$. Demostremos que $3^{\frac{7}{4}} < 7$.

Aplicando dos veces el teorema 5, llegamos a la equivalencia de las siguientes desigualdades:

$$\frac{3^{\frac{7}{4}}}{7} < 1 \text{ y } \left(\frac{3^{\frac{7}{4}}}{7}\right) < 1.$$

Empleando las propiedades de las potencias del tipo desigualdad, obtenemos que la desigualdad $\left(\frac{3^{7/4}}{7}\right)^4 < 1$ es equivalente a la

desigualdad $\frac{3^7}{7^4} < 1$, la cual se verifica, puesto que $3^7 = 2187$, $7^4 = 2401$.

Por consiguiente, en virtud de la equivalencia de los pasos, se verifica también la desigualdad $3^{\sqrt{3}} < 7$.

## § 5. Logaritmos

Analicemos los problemas principales que surgen al estudiar las potencias.

1. Sean dados los números reales $a$ y $\alpha$. *Hállese un número real $x$ tal, que $x = a^\alpha$.* Este es un problema de elevación de un número real a potencia. Es resoluble para cualquier número positivo $a$ y cualquier número real $\alpha$. Si $a = 0$ y $\alpha > 0$, entonces $x = 0$ (véase el § 4, cap. IV). El problema en el que $a < 0$ aquí no se analiza.

2. Sean dados los números reales $b$ y $\alpha$. *Hállese un número real $x$ tal, que se verifique $x^\alpha = b$.*

Si $b$ es número positivo cualquiera y $\alpha$ es cualquier número real distinto de cero, el problema se reduce al anterior, pues la respuesta la da el número $x = b^{\frac{1}{\alpha}}$. En efecto, $x^\alpha = \left(b^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = b^{\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha} = b^1 = b$. Si $\alpha = 0$ y $b = 1$, entonces la solución de este problema es un número real $x$ distinto de cero. Si $\alpha = 0$ y $b \neq 1$, este problema no tiene solución. El caso cuando $b < 0$ aquí no se analiza.

3. Sean dados los números reales $a$ y $b$. *Hállese un número real $x$ tal, que se verifique $a^x = b$.* Estudiaremos este problema sólo para $a$ y $b$ reales y positivos. Si $a = 1$ y $b = 1$, a título de solución de este problema interviene cualquier número real $x$. Si $a = 1$ y $b \neq 1$, el problema no tiene solución. Analicemos el caso en que $a \neq 1$.

**Teorema 1.** *Para todo par de números reales $a$ y $b$ tales, que $a > 0$, $a \neq 1$, y $b > 0$, existe un número real, y sólo uno, $x$ tal, que $a^x = b$.*

La existencia de tal número $x$ no se demuestra aquí. Demostremos la unicidad. Supongamos que existen unos números reales $x_1$ y $x_2$ tales, que $a^{x_1} = b$ y $a^{x_2} = b$. Según la propiedad de transitividad de las igualdades tenemos $a^{x_1} = a^{x_2}$. En virtud de la afirmación 6 (véase el § 4), $x_1 = x_2$, lo que se trataba de demostrar.

**Definición.** *Si $a > 0$, $a \neq 1$ y $b > 0$, un número real $\alpha$ recibe el nombre de logaritmo del número $b$ de base $a$ y se denota $\alpha = \log_a b$, si $a^\alpha = b$.*

Hemos de notar que la definición de logaritmo se puede dar sólo después de demostrar el teorema 1, puesto que sin tenerlo demostrado no esté claro si existe tal número $\alpha$ que sea $a^\alpha = b$ si es él único. Subrayamos una vez más que el logaritmo se define solamente para un número positivo de base positiva y distinta de la unidad, es decir, para cualquier $a \leqslant 0$, $a = 1$ y para todo $b \leqslant 0$ el concepto de logaritmo está privado de sentido. Por ejemplo, la afirmación de que el número 3 es el logaritmo del número (—8) de base (—2) no tiene sentido.

Así pues, en la definición de logaritmo $\log_a b$ tenemos siempre $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. De definición de logaritmo se deduce *la identidad logarítmica fundamental*

$$a^{\log_a b} = b.$$

Haciendo uso de la definición de logaritmo, obtenemos $\log_a a = 1$, y $\log_a 1 = 0$.

Teniendo en cuenta la unicidad del logaritmo podemos constatar que si $\mu > 0$ y $\mu \neq 1$, entonces siempre $\log_a \mu \neq 0$.

Procedamos a considerar las propiedades principales del logaritmo.

Supongamos que los números $M$, $N$, $a$, $b$, $\alpha$ y $\beta$ son tales que $M > 0$, $N > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, mientras que $\alpha$ y $\beta$ son números reales cualesquiera ($\beta \neq 0$). En este caso:

a) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$;

b) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;

c) $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$;

d) $\log_{a^\beta} M^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a M$;

e) $\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$ (regla que rige el paso de un logaritmo de una base a otro logaritmo de base diferente):

f) $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$;

g) si $a > 1$, entonces $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M < N$;

h) si $0 < a < 1$, entonces $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M > N$;

d') $\log_{a^\beta} M^\beta = \log_a M$;

e') $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

**Demostremos** estas propiedades.

| | |
|---|---|
| a) Examinemos | $a^{\log_a MN} =$ |
| según la identidad logarítmica fundamental | $= MN =$ |
| según la identidad logarítmica fundamental | $= a^{\log_a M} a^{\log_a N} =$ |
| según la propiedad de la potencia de un número positivo | $= a^{\log_a M + \log_a N}$. |

Así pues, $a^{\log_a MN} = a^{\log_a M + \log_a N}$. Al aplicar a la última igualdad la afirmación 6 que caracteriza las propiedades de las potencias, obtenemos $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$.

La propiedad b) se demuestra análogamente.

c) Examinemos $a^{\log_a(M^\alpha)} =$
según la identidad logarítmica fundamental $= M^\alpha = (a^{\log_a M})^\alpha =$
según la propiedad de la potencia de un número positivo $= a^{\alpha \log_a M}$.

Así pues, $a^{\log_a(M^\alpha)} = a^{\alpha \log_a M}$. Aplicando la afirmación 6 de las propiedades de las potencias, obtenemos $\log_a(M^\alpha) = \alpha \log_a M$.

d) Examinemos $(a^\beta)^{\log_{a^\beta}(M)^\alpha} =$
según la identidad logarítmica fundamental $= (M)^\alpha = (a^{\log_a M})^\alpha =$
según la propiedad de la potencia de un número positivo $= a^{\alpha \log_a M} =$
por cuanto $\beta \neq 0$, se tiene $1 = \beta \cdot \frac{1}{\beta}$,
y por eso $= [(a^\beta)^{\frac{1}{\beta}}]^{\alpha \log_a M} =$
según la propiedad de la potencia de un número positivo $= (a^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta} \log_a M}$.

Así pues, $(a^\beta)^{\log_{a^\beta}(M)^\alpha} = (a^\beta)^{\frac{\alpha}{\beta} \log_a M}$. Aplicando a la última ecuación la afirmación 6 sobre las propiedades de las potencias, obtenemos $\log_{a^\beta}(M)^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a M$.

e) Examinemos $a^{\log_a M} =$
según la identidad logarítmica fundamental $= M =$
según la identidad logarítmica fundamental $= b^{\log_b M} =$
según la identidad logarítmica fundamental $= (a^{\log_a b})^{\log_b M} =$
según la propiedad de la potencia de un número positivo $= a^{\log_a b \log_b M}$.

Así pues, $a^{\log_a M} = a^{\log_a b \log_b M}$. Aplicando a la última igualdad la afirmación 6 sobre las propiedades de las potencias, obtenemos $\log_a M = \log_a b \log_b M$. Conforme a la propiedad de las igualdades, ambos miembros de esta igualdad podemos multiplicarlos por $\frac{1}{\log_a b}$ (puesto que $b \neq 1$, tenemos $\log_a b \neq 0$) y convencernos de que es válida la igualdad

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}.$$

f) De acuerdo con la identidad logarítmica fundamental tenemos $M = a^{\log_a M}$ y $N = a^{\log_a N}$, por consiguiente,

$$M = N \Leftrightarrow a^{\log_a M} = a^{\log_a N}. \qquad (1)$$

Según la afirmación 6 sobre las propiedades de las potencias, tenemos

$$a^{\log_a M} = a^{\log_a N} \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que

$$M = N \Leftrightarrow \log_a M = \log_a N.$$

g) De acuerdo con la identidad logarítmica fundamental tenemos $M = a^{\log_a M}$ y $N = a^{\log_a N}$, por consiguiente

$$M < N \Leftrightarrow a^{\log_a M} < a^{\log_a N}. \qquad (3)$$

Según la afirmación 4 sobre las propiedades de las potencias tenemos

$$a^{\log_a M} < a^{\log_a N} \Leftrightarrow \log_a M < \log_a N. \qquad (4)$$

De (3) y (4) se deduce que

$$M < N \Leftrightarrow \log_a M < \log_a N.$$

La propiedad h) se demuestra de modo semejante.

Las propiedades g) y h) se enuncian verbalmente así:

*Si la base es mayor que la unidad, al menor de dos números positivos le corresponde el logaritmo menor y al menor logaritmo le corresponde el número menor.*

*Si la base es menor que la unidad, al menor de dos números positivos, le corresponde el logaritmo mayor y al logaritmo mayor le corresponde el número menor.*

Los logaritmos de base 10 se denominan *decimales* y en lugar de la designación $\log_{10} M$ se escribe a menudo $\lg M$.

Los logaritmos de base $e$ ($e$ es un número irracional, cuyo valor aproximado es 2,718281828459045 . . .) se denominan *naturales*, y en lugar de la designación $\log_e N$ se escribe a menudo $\ln N$.

Las propiedades de los logaritmos se utilizan para transformar diferentes expresiones logarítmicas tanto con los números, como con las letras.

**Ejemplos.** 1. Calcúlese $A = \left(\sqrt[7]{\frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3} + \log_{9\sqrt{3}} 125}$. De acuerdo con la propiedad e′) de los logaritmos, $\frac{1}{5\log_5 3} = \frac{1}{5}\log_3 5$; conforme a la propiedad e) de los logaritmos, $\log_{9\sqrt{3}} 125 =$

$= \log_{3^{\frac{5}{2}}} 5^3 = \frac{6}{5} \log_3 5$. Valiéndonos de las propiedades de las potencias y de la identidad logarítmica fundamental, obtenemos

$$A = \left(3^{-\frac{3}{7}}\right)^{\frac{1}{5}\log_3 5 + \frac{6}{5}\log_3 5} = 3^{-\frac{3}{5}\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-\frac{3}{5}} = 5^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{0{,}008}.$$

2. Demuéstrese que si $a$, $b$ y $c$ son números reales que satisfacen la condición $0 < b \leqslant c < a - 1$, entonces se verifica la desigualdad $\log_a (a + b) < \log_{a-c} a$.

**Demostración.** Por cuanto $a > 0$ y $c \geqslant b > 0$, resulta evidente la validez de la desigualdad

$$a^2 - (c - b)\, a - bc < a^2,$$

la cual puede ser escrita de la manera siguiente:

$$(a + b)(a - c) < a^2. \tag{5}$$

Como $a > 1$, podemos aprovechar la propiedad g) y obtener la desigualdad

$$\log_a (a + b)(a - c) < 2, \tag{6}$$

que es equivalente a la desigualdad (5).

Haciendo uso de la propiedad a), obtenemos la desigualdad

$$\log_a (a + b) + \log_a (a - c) < 2, \tag{7}$$

que es equivalente a la desigualdad (6).

Cada sumando en el primer miembro de la desigualdad (3) es positivo, puesto que $(a + b) > 1$ y $(a - c) > 1$. Por consiguiente, podemos valernos del teorema 1, § 2, cap. II: elevando al cuadrado los miembros primero y segundo de la desigualdad (7), obtendremos una desigualdad equivalente.

Por eso, la desigualdad (7) es equivalente a la desigualdad

$$[\log_a (a + b) + \log_a (a - c)]^2 < 4,$$

la cual es equivalente a la desigualdad siguiente

$$[\log_a (a + b) - \log_a (a - c)]^2 < 4 - 4 \log_a (a + b) \log_a (a - c). \tag{8}$$

La desigualdad (8) es equivalente a la desigualdad (5), la cual es lícita, por consiguiente, será lícita también la desigualdad (8).

Dado que, para $b > 0$, $c > 0$, se verifica la desigualdad

$$0 < [\log_a (a + b) - \log_a (a - c)]^2, \tag{9}$$

podemos valernos de la propiedad de transitividad de las desigualdades.

En este caso la validez de las desigualdades (8) y (9) predetermina la validez de la desigualdad

$$0 < 4 - 4 \log_a (a + b) \log_a (a - c),$$

que puede ser escrita en la forma

$$\log_a (a + b) \log_a (a - c) < 1$$

Al aplicar la propiedad e') y al tener presente que $a - c > 1$ y $a > 1$, concluimos que la desigualdad de partida es lícita

### *Ejercicios*

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones numéricas (1 . . . 19):

1. $(3^2)^2 - [(-2)^3]^2 - (-5^2)^2$. 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(1\frac{1}{2}\right)^2 - [(-0,5)^3]^2$.

3. $4^{-2} - 2^{-3} + [(-2)^3]^{-1}$. 4. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(-2\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{5}{2}\right)^{-2}$.

5. $(-0,75)^3 + (0,3)^{-3} - \left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}$. 6. $[(0,6)^2]^0 - [(-4,5)^{-2}]^0 + \left(3\frac{1}{2}\right)^0$.

7. $(4^{-1})^4 \cdot 2^5 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^3 \cdot (8^{-2})^5 \cdot (64^2)^3$.

8. $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (0,25)^2 \cdot [(-5)^{-3}]^2 \cdot [(0,1)^2]^{-2}$.

9. $(\sqrt{2})^4 \cdot \left[\left(2\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] : \left[(0,1)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-3}\right]$.

10. $3^{-4} : \left(2^4 : 3^2 - 2^2 : 1\frac{1}{8}\right) + \left(2\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (-0,295)^0$.

11. $(0,25)^{-1} \cdot \left(1\frac{1}{4}\right)^2 + \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3\right] : \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

12. $\left(2\frac{1}{3}\right)^0 + \left[(1,2)^{-4} \cdot \left(\frac{25}{6}\right)^2\right] : 6^{-3} - [(-33,41)^2]^0$.

13. $(-0,(3))^2 \cdot \left[\left(1\frac{1}{3}\right)^2\right]^{-2} + ((0,5)^2)^3 : [(43)^0]^2 + (-8)^3 \cdot \left(\frac{2}{3^2}\right)^{-1}$.

14. $\left[27^{10} - 5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-8} \cdot 3^{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^{-8} \cdot 3^8\right] : [41 \cdot (3^{-2})^{-12}]$.

15. $[(10^{-6})^{-2} + 5^3 \cdot (25)^4 \cdot 2^3 \cdot (2^3)^2 - 5^{13} \cdot (4^2)^2] : \left[(5^{-5})^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 10^5\right]$.

16. $\left[9\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 18^5 - (2^{-3})^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^{-5} - (3^{-3})^{-2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-6}\right] \times$
$\times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^{-1} \cdot (3^2)^4$.

17. $\left\{15 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-1} \cdot (25)^3 - 2^3 \cdot (5^3)^2 + 4 \cdot \frac{(25)^3}{5}\right\} \cdot (4)^{-1} \cdot \frac{25}{5^6}$.

18. $\dfrac{8 \cdot (4^2)^4 \cdot 3^3 \cdot 27^2 + 90 \cdot 6^3 \cdot 4^7 \cdot (3^2)^2}{24 \cdot (6^2)^4 \cdot (2^4)^2 + 144 \cdot (2^3)^4 \cdot (9^2)^2 \cdot 4^2}$.

19. $\dfrac{180 \cdot \left[2^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^6 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-2} - 72 \cdot (6^2)^3 \cdot [(36)^3 \cdot 4^2]^2}{135 \cdot 216^3 \cdot [4^2 \cdot 9]^2 \cdot 6^3 + 36 \cdot [32 \cdot 4^2 \cdot 3^4]^2}$.

Sáquense del signo de la raíz aquellos factores del número subradical que pueden sacarse (20 . . . 25):

20. $\sqrt{120}$, $\sqrt{147}$, $\sqrt{108}$, $\sqrt{245}$, $\sqrt{363}$. 21. $\sqrt[3]{32}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{512}$, $\sqrt[3]{1080}$, $\sqrt[3]{375}$.

22. $\sqrt[4]{80}$, $\sqrt[4]{405}$, $\sqrt[4]{328}$. 23. $\sqrt[5]{486}$, $\sqrt[5]{800}$, $\sqrt[5]{12500}$.

24. $\sqrt{18(4-\sqrt{17})^2}$, $\sqrt{54(2-\sqrt{3})^2}$. 25. $\sqrt[4]{48(2-\sqrt{7})^4}$, $\sqrt[4]{2(\sqrt{11}-3)^4}$.

Introdúzcanse bajo el signo de la raiz todos los factores que están delante del signo de la raíz (26 . . . 30):

26. $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$, $7\sqrt{\frac{3}{7}}$, $\frac{1}{3}\sqrt{15}$. 27. $2\sqrt[3]{5}$, $3\sqrt[3]{4}$, $12\sqrt[3]{1\frac{1}{9}}$, $6\sqrt[3]{1\frac{4}{27}}$.

28. $\frac{3}{2}\sqrt{8}$, $1\frac{1}{3}\sqrt{6}$, $1\frac{2}{3}\sqrt{2\frac{2}{5}}$. 29. $(2-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}$, $(4-\sqrt{19})\cdot\sqrt{3}$.

30. $(\sqrt{3}-2)\cdot\sqrt[4]{5}$, $(11-\sqrt{13})\cdot\sqrt[4]{7}$.

Sáquese del signo de la raíz el denominador de la fracción subradical (31 . . . 33):

31. $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\frac{28}{3}\sqrt{\frac{5}{7}}$, $\frac{21}{2}\sqrt{3\frac{1}{3}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{0{,}2}$, $6\sqrt{2\frac{1}{3}}$.

32. $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$, $\sqrt[3]{3\frac{1}{2}}$, $\frac{4}{3}\sqrt[3]{1{,}5}$, $\frac{4}{9}\sqrt[3]{20\frac{1}{4}}$, $\frac{3}{5}\sqrt[3]{13\frac{8}{9}}$.

33. $\sqrt[4]{\frac{7}{4}}$, $16\sqrt[5]{1\frac{3}{8}}$, $\sqrt[6]{\frac{5}{27}}$, $1\frac{1}{2}\sqrt[4]{7\frac{1}{9}}$.

Escríbase en forma del producto de dos números el siguiente número (34 . . . 37):

34. $7+\sqrt{7}$, $\sqrt{12}+\sqrt{45}+\sqrt{18}$, $5+\sqrt{5}+\sqrt{15}$.

35. $5-\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}$, $3-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{24}$.

36. $3\sqrt{12}-3\sqrt{6}+\sqrt{30}-\sqrt{15}$. 37. $\sqrt[3]{48}-\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{40}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones numéricas (38 . . . . . 45):

38. $2\sqrt{5\sqrt{48}}+3\sqrt{40\sqrt{12}}-2\sqrt{15\sqrt{27}}$.

39. $\sqrt{176}-2\sqrt{275}+\sqrt{1584}-\sqrt{891}$.

40. $2(\sqrt{252}-\sqrt{175})-(\sqrt{112}-\sqrt{63}-\sqrt{28})$.

41. $15\sqrt{1{,}04}-\frac{3}{5}\sqrt{5\frac{5}{9}}+6\sqrt{\frac{1}{18}}-(5\sqrt{0{,}02}-\sqrt{300})$.

42. $30\sqrt[3]{\frac{1}{12}}+3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+5\sqrt[3]{144}$. 43. $2\sqrt[3]{0{,}125}+\sqrt[4]{0{,}0016}$.

44. $\sqrt[4]{0{,}0001}-\sqrt[5]{0{,}00032}$. 45. $(\sqrt{6}-2\sqrt{15})\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{20}$.

Escríbanse en forma de raíces de un mismo orden los siguientes cuatro números (46 . . . 50):

46. $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[6]{5}$ y $\sqrt[4]{7}$. 47. $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{15}$, $\sqrt[8]{50}$ y $\sqrt[16]{171}$.

48. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{11}$ y $\sqrt[12]{1671}$. 49. $\sqrt[3]{2\cdot3^4}$, $\sqrt[6]{5\cdot64^2}$, $\sqrt[4]{3\cdot5^3}$ y $\sqrt{2^3\cdot7^5}$.

50. $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$, $\sqrt[4]{\frac{5}{9}}$, $\sqrt[6]{\frac{5}{7}}$ y $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Escríbanse en forma de potencia con exponente racional los siguientes números (51 . . . 53):

51. $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{7^2}$, $\sqrt[4]{11^3}$, $\sqrt[5]{13^2}$, $\sqrt[7]{19^3}$.

52. $\sqrt{2^{-3}}$, $\sqrt[9]{10^{-2}}$, $\sqrt[4]{3^{-3}}$, $\sqrt[8]{7^{-4}}$, $\sqrt[7]{5^{-5}}$.

53. $2\sqrt{4^{21}}$, $3\sqrt[4]{3^3}$, $7\sqrt[5]{7^3}$, $3\sqrt[6]{27^5}$, $9\sqrt[7]{3^{25}}$.

Escríbase, empleando el signo de la raíz, la siguiente potencia con exponente racional (54 . . . 57):

54. $2^{\frac{1}{3}}$, $3^{\frac{3}{4}}$, $5^{\frac{2}{5}}$, $7^{\frac{3}{7}}$, $4^{\frac{2}{3}}$. 55. $3^{0,5}$, $4^{0,25}$, $4^{0,75}$, $7^{1,25}$, $3^{2\frac{1}{2}}$.

56. $3\cdot 2^{\frac{2}{3}}$, $4\cdot 3^{\frac{1}{4}}$, $5\cdot 6^{0,25}$, $7\cdot 3^{2,25}$, $2\cdot 9^{2\frac{1}{2}}$.

57. $2\cdot 3^{-\frac{1}{2}}$, $3\cdot 2^{-3,75}$, $7\cdot 5^{-2\frac{3}{4}}$, $6\cdot 7^{-0,7}$, $8\cdot 10^{-\frac{7}{2}}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones numéricas (58 . . . . . . 64), al sustituir todos los signos de las raíces por los exponentes racionales de la potencia:

58. $\sqrt{\sqrt{5}}\cdot(\sqrt[3]{\sqrt{5}}:\sqrt{\sqrt[4]{5}})^2$.

59. $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}:(\sqrt[3]{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}})^{\frac{1}{2}}$.

60. $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt{3}}}:(\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}}:\sqrt[4]{\sqrt{3\sqrt[3]{3}}})^{\frac{3}{2}}$.

61. $(\sqrt[3]{16\sqrt[4]{8\sqrt{2}}})^2\cdot\sqrt[3]{32\sqrt[4]{2}}\cdot\sqrt{2\sqrt[4]{4\sqrt[3]{4}}}$.

62. $\sqrt{3\sqrt[3]{9\sqrt{27\sqrt{3}}}}:(\sqrt[16]{3^{15}}\cdot\sqrt[8]{3\sqrt{3}})^{\frac{1}{2}}$.

63. $(\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}}}:\sqrt[9]{4\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}})^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{3\sqrt[9]{9}}$.

64. $\dfrac{(\sqrt[6]{5\sqrt{5}})^2\cdot(\sqrt[6]{25\sqrt[3]{25}})^4}{(\sqrt[3]{5\sqrt[4]{125}})^{\frac{2}{3}}}\cdot(\sqrt[3]{5\sqrt{5\sqrt{5}}})^{\frac{1}{3}}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones numéricas (65 . . . . . . 78):

65. $(27^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{2}{3}}\cdot 32^{\frac{2}{5}}\cdot 81^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{4}}$.

66. $(100^{-\frac{1}{2}}\cdot 64^{\frac{4}{3}}\cdot 0,25^{0,5}\cdot 16^{-0,75})^{\frac{4}{3}}$.

67. $\left(6,25^{0,5}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}\cdot 100^{-\frac{1}{2}}\cdot 0,01^{-1}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

68. $[(2^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}):4^{\frac{1}{6}}]:\{[4^{-\frac{1}{2}}:(2^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}})]\cdot[(2^{-\frac{5}{6}}\cdot 4^{-\frac{2}{3}}):3^{\frac{5}{6}}]\}$.

69. $\{3^{\frac{1}{3}}[5^{-\frac{1}{2}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}\cdot(225^2)^{\frac{1}{3}}]^{-\frac{1}{2}}\}^6$

70. $\left\{[(3^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}):(3^{-\frac{3}{4}}\cdot 2^{-\frac{5}{6}})]:\left(\frac{1}{864}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}^{\frac{2}{7}}$.

71. $\{[(3^{\frac{5}{2}} \cdot 5^{\frac{4}{3}}) : 2^{-\frac{5}{4}}] : [16 : (5^2 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}})]\}^{\frac{1}{5}}$.

72. $\{3^{\frac{5}{2}} \cdot 5^{\frac{4}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{4}} \cdot [16 : (27^{-1} \cdot 5^{-\frac{5}{3}})] \cdot (25 \cdot 3^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{4}})\}^{\frac{1}{5}}$.

73. $10^3 \cdot 1000^{-\frac{2}{3}} - (100^{-\frac{1}{2}} - 0{,}027^{-\frac{1}{3}}) - \left[625^{-0{,}75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \left(\frac{11}{9}\right)^2\right]$.

74. $[(27\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} + (8\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}] - \left[\frac{2}{7} \cdot (343\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} - 10\,(0{,}001 \cdot \sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\right]$.

75. $2 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{1}{12}} - 3\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) - 3 \cdot \left(5\sqrt[3]{144} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{5\frac{1}{3}}\right)$.

76. $\left(4\sqrt{\frac{1}{2}} - 0{,}5\sqrt{12} + \sqrt{0{,}02} - 5\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)(-0{,}75\sqrt{2})$.

77. $(2\sqrt{6} - \sqrt{5} + 4\sqrt{2})(3\sqrt{5} + \sqrt{6} - 2\sqrt{2})$.

78. $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} + 4\sqrt[3]{\frac{1}{72}} - \sqrt[3]{9}\right)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{16})$.

Demuéstrese la validez de las siguientes igualdades numéricas (79 . . . 112)

79. $\sqrt{10 - 4\sqrt{6}} = \sqrt{6} - 2$. 80. $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.

81. $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$.

82. $\sqrt{\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \frac{9}{2}} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2}{2}$.

83. $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} = \sqrt{5} - 2$.

84. $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}} = 1$.

85. $\sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}} = \sqrt{3} + 1$.

86. $\sqrt{8 + \sqrt{40} + \sqrt{20} + \sqrt{8}} = \sqrt{5} + \sqrt{2} + 1$.

87. $\sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \sqrt{2}\,(1 + \sqrt{5})$.

88. $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. 89. $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7} = 2$.

90. $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

91. $\sqrt[6]{25 + 4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1 + 2\sqrt{6}} = 0$.

92. $\sqrt[3]{3 + 9\sqrt[3]{12} - 9\sqrt{18}} = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6}$.

93. $(\sqrt[6]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}})\,\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 2$.

94. $\sqrt[6]{8\sqrt{2}\,(7 + 4\sqrt{3})} \cdot \sqrt[3]{4\sqrt{2\sqrt{2}} - 2\sqrt{6\sqrt{2}}} = 2\sqrt[6]{2}$.

95. $\sqrt[4]{28 + 4\sqrt{48}} = \sqrt{3} + 1$. 96. $\sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$.

97. $\sqrt[4]{28 - 16\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$.

98. $\sqrt{6 + 2(\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2})} - \sqrt{6 - 2(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2})} = 2\sqrt{2}$.

99. $\frac{\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$.

100. $\frac{(2+\sqrt{5})(2+5\sqrt{5})-(2+2\sqrt{5})(2-2\sqrt{5})}{4+3\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$.

101. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}=(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2})(3\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}+4)$.

102. $\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1$.

103. $\frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt[4]{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}}}=\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}\,(3-\sqrt[4]{2})(3-\sqrt{2})}{7}$.

104. $\frac{3}{\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{8}}=(\sqrt[4]{11}+\sqrt[4]{8})(\sqrt{11}+\sqrt{8})$.

105. $\frac{1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}=(\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{2})(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

106. $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}$.

107. $\frac{2\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}=\frac{(20-2\sqrt{30})(\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7})}{2}$.

108. $\frac{6}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{3(3\sqrt{2}-4)(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2}$.

109. $\frac{6}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}=3-\sqrt[4]{27}$.

110. $\sqrt[4]{7}-\frac{\sqrt{7}-\frac{1}{7}}{\sqrt[4]{7}-\sqrt{\frac{1}{\sqrt{7}}}}+\frac{6}{7\left(\sqrt[4]{7}+\sqrt{\frac{1}{7}}\right)}+\frac{2}{\sqrt[4]{343}}=0$.

111. $\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{(\sqrt{3}+12)\sqrt[4]{3}-6\sqrt{3}-8}}{\sqrt{3}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt[4]{3-2\sqrt{2}}}=1$.

112. $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2=2$.

113. La diferencia $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ es un número entero. Hállese este número.

¿Cuál de dos números siguientes es mayor (114 ... 123):

114. $\sqrt[8]{10}$ ó $\sqrt[4]{3}$; 115. $(\sqrt{0,2})^{-3,5}$ ó $1$;

116. $\sqrt[8]{24}$ ó $\sqrt[3]{5}$; 117. $\sqrt[12]{623}$ ó $\sqrt[3]{5}$;

118. $(2\sqrt[3]{2})^{-6}$ ó $2^{-11}$; 119. $\sqrt[21]{9}$ ó $\sqrt[42]{81}$;

120. $\sqrt[3]{123\cdot 343}$ ó $\sqrt[5]{\frac{52}{81}}\cdot\sqrt[5]{\frac{4}{39}}\cdot\sqrt[5]{972}$;

121. $\sqrt[3]{\frac{1000}{729}}$ ó $\sqrt[5]{12}$; $\sqrt{\frac{4}{81}}$;

122. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}}$ ó $\sqrt[7]{\sqrt{13}}$; 123. $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{2^5}}}$ ó $\sqrt[7]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^8}}}$?

Demuéstrese la validez de las siguientes desigualdades numéricas 124 . . . . . . 132):

124. $3^{34} > 2^{51}$. 125. $202^{303} > 303^{202}$.

126. $\sqrt{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

127. $\sqrt[5]{\sqrt{11}-3} > \sqrt[10]{11}-\sqrt[5]{3}$.

128. $2(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{7})-(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}) < 3$.

129. $6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+5\sqrt{5} > \sqrt[4]{6}+7\sqrt[4]{10}+3\sqrt[4]{15}$.

130. $(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{7}+\sqrt[4]{9})(\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{9}) > 9\sqrt[4]{315}$.

131. $3\sqrt{2}+\sqrt{3}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) > 2\sqrt[4]{6}(1+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3})$.

132. $\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{10}+\sqrt{15} > \frac{23}{3}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones numéricas (133 . . . . . . 170):

133. $\log_2\sqrt[3]{16}+\log_8\sqrt[4]{2}-\log_3(27\sqrt{3})-\log_5\sqrt{5\sqrt{5}}$.

134. $\log_2\left(\frac{1}{4\sqrt{4}}\right)+\log_3\left(\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}{27}\right)+\log_4\left(\frac{\sqrt[3]{8}}{128\sqrt{2}}\right)-\log_7\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{49}}\right)$.

135. $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{9}+\log_{3\sqrt{\frac{1}{3}}}9\quad\log_{\frac{1}{8}}\sqrt[4]{32}+\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt[3]{128\sqrt{2}}$.

136. $\log_3 27-\log_{\sqrt{3}}27-\log_{\frac{1}{3}}27-\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{64}{27}\right)$.

137. $\log_2\left(\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2\sqrt[5]{16}}}{\sqrt{2}}\right)-\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{4}{\sqrt{2}}}+\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(9\sqrt[3]{3})$.

138. $\log_{0,4}\left(\frac{1}{5}\cdot\sqrt[3]{50}\right)+\log_{0,6}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+\log_{0,32}\left(\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{2}}{5}\right)$.

139. $\log^2_{\sqrt[5]{5}}\sqrt{5}-\log_{\sqrt[5]{5}}(5\sqrt{5})+\log_{(\sqrt{3}+1)}(4+2\sqrt{3})$.

140. $\sqrt{\log_{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}}}+\log_{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt[4]{\sqrt{2\sqrt{2}}}}$.

141. $\sqrt{\log_{\sqrt{3}}\sqrt[4]{\frac{(\sqrt{3})^{1/2}}{\sqrt{3}}}+\log_{\sqrt[4]{3}}\sqrt{\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2}}}}}$.

142. $\left(\log_{\sqrt{5}}\frac{1}{5}\right)\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}(5\sqrt{5})+\log_{\sqrt{5}}(5\sqrt{5})}$.

143. $2\cdot\log_5\sqrt[4]{5}+\frac{1}{2}\cdot\log_{\sqrt{5}}25-\log^2_5\sqrt{5}-2$.

144. $\frac{1}{2}(9^{\log_{25}5+1}-3^{2(\log_{16}2+1/4)})-\log_{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})$.

145. $\log_3\log_8\log_2 16$. 146. $\log_8\log_4\log_2 64$.

147. $\log_4\log_2\log_3 81$.

148. $\log_3\left[\log^2_2\left(\frac{1}{2}\right)+6\log_2\sqrt{2}+5\right]$.

149. $(\log_{\sqrt{5}} 125 : \log_5^2 25) \cdot (\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5} : \log_{0,2} \sqrt[3]{25})$.

150. $\left[\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{4}} + 6 \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2}\right) - 2 \log_{\frac{1}{16}} \left(\frac{1}{4}\right)\right] : \log_{\sqrt{2}} \sqrt[5]{8}$.

151. $3^{1+\log_3 4} + 2^{\log_2 3 - 2}$. 152. $4^{3 \log_4 2} - (1,5)^{\log_{\frac{3}{2}} 3 - 1}$.

153. $2^{3-\log_4 3} + 7^{2 \log_7 2 + 1}$. 154. $16^{1-\log_3 5} + 4^{\frac{1}{2} \log_2 3 + 3 \log_3 5}$.

155. $9^{2 \log_3 2 + 4 \log_{81} 2} \cdot \sqrt{3^{2+\frac{1}{2}\log_3 16}}$.

156. $(0,1)^{2 \lg 0,1 - 1,5 \lg 0,1} \cdot (0,1)^{-\left(\lg \frac{8}{3} + 2 - \lg 20\right)}$.

157. $72 \cdot (49^{\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4})$.

158. $\dfrac{\log_3 81}{\log_3 9} (36^{1-\log_6 2} + 49^{-\log_7 6})$.

159. $\dfrac{\log_{\sqrt{2}} 16}{\log_4 \sqrt{2}} [\log_{\sqrt{2}} (2 \sqrt[4]{2}) + 100^{\frac{1}{2}\lg 8 - 2\lg 2}]$.

160. $10^{\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 5 + \lg 2} \cdot 7^{\log_{3\sqrt{3}} 27}$.

161. $\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36 + \log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$.

162. $72 \log_2 \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2} + 10 \log_2 \left(\frac{\sqrt[5]{8}}{2}\right)$.

163. $3^{\frac{2}{5}\log_3 32 - \frac{1}{3}\log_3 64 + \log_3 10}$.

164. $(0,2)^{\frac{1}{2}(9 \log_{0,2} 2 - 3 \log_{0,2} 4)}$.

165. $(\sqrt{2})^{3 \log_{\sqrt{2}} 5 - 2 \log_{\sqrt{2}} 25 - \log_{\sqrt{2}} 10 + 2 \log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}}$.

166. $(\lg 2 + \lg 5 + \lg 300 - \lg 3) \cdot 3^{\frac{1}{5 \log_5 3}}$.

167. $\left(\log_8 27 - \log_{0,5} \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\dfrac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \dfrac{\log_3 4}{\log_{108} 3}\right)$.

168. $\dfrac{\log_2 \sqrt[3]{\frac{2}{3}}}{\log_2^2 \sqrt{7}} - \dfrac{2 \log_{\sqrt{7}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}}{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{7}} - \log_{6\sqrt{7}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \log_{\sqrt{7}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

169. $2^{\log_5 3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1-\log_5 2,5} \cdot \log_9 2 \cdot \log_4 81$.

170. $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$.

¿Tendrán sentido las siguientes expresiones (171 . . . 173):

171. $\sqrt{\log_2 1,4 + \log_2 0,7}$; 172. $\sqrt{\lg 15 + \lg 0,07}$;

173. $\lg \lg \lg 11$?

¿ Cuál de los números es mayor (174 . . . 188):

**174.** $\log 0{,}245$ ó 0; **175.** $\lg\left(\frac{\sqrt{71}}{4}\right)$ ó 0;

**176.** $\lg \sqrt[6]{10}$ ó $\log_2 \sqrt{2}$; **177.** $\log_4 5$ ó $\log_6 5$;

**178.** $\log_9 10$ ó $\log_{10} 11$; **179.** $\log_3 2$ ó $\log_2 3$;

**180.** $\log_4 2$ ó $\log_{0,0625} 0{,}25$; **181.** $\log_{189} 1323$ ó $\log_{63} 147$;

**182.** $\log_5 11$ ó $\log_5 \sqrt{74}$; **183.** $\frac{1}{2}+\lg 3$ ó $\lg 19-\lg 2$;

**184.** $\log_{0,2} 0{,}8+\log_{0,2} 5$ ó 0. **185.** $\frac{\lg 5+\lg\sqrt{7}}{2}$ ó $\lg\frac{5+\sqrt{7}}{2}$;

**186.** $3(\lg 7-\lg 5)$ ó $2\left(\frac{1}{2}\lg 9-\frac{1}{3}\lg 8\right)$; **187.** $\lg\lg\lg 5$ ó $\lg^3 5$;

**188.** $\log_{\frac{1}{2}} \log_{\sqrt{2}} 5$ ó $\log_{\sqrt{5}} \log_{\sqrt{5}} 7$?

Demuéstrese la validez de las siguientes desigualdades numéricas (**189 . . . . . 205**):

**189.** $\log_5 32<\log_2 5$. **190.** $\log_5 14>\log_7 18$.

**191.** $\log_{16} 729<\log_3 16$. **192.** $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3}<\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$.

**193.** $\log_{\log_3 2} \frac{1}{2}>0$. **194.** $\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_{4,5}\pi}<2$.

**195.** $(1+\log_2 5)(\log^2_{2\sqrt{3}} 5+1)>2\log_2 5$.

**196.** $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{35}\left(1+\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 7\cdot\log_{\sqrt{3}} 5}\right)>4$.

**197.** $\log^3_{30} 2\log_2 3\log_2 5<\frac{1}{27}$.

**198.** $3\log_5 7+\log_7 5+\log_{49} 5>4$.

**199.** $\log_7 \sqrt[4]{45}\cdot\log_7 (45\sqrt{3})>24\log_7 \sqrt[4]{5}\log_7 \sqrt{3}$.

**200.** $\frac{\lg 1+\lg 2+\lg 3+\lg 4}{4}>\frac{\lg 1+\lg 2+\lg 3}{3}$.

**201.** $\lg\frac{7}{2}>\frac{\lg 1+\lg 2+\lg 3+\lg 4+\lg 5+\lg 6}{6}$.

**202.** $\log_2 \log_3 \frac{7}{6}<\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{6}{7}$.

**203.** $\log_{\frac{6}{5}} 2\cdot\log_{\frac{12}{5}} 2\cdot\log_2 \frac{24}{5}>1$. **204.** $\log_{\frac{1}{3}} 7>\log_7 3-\frac{5}{2}$.

**205.** $\log_{11}\left(\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}\right)<\log_7(2\sqrt[3]{3})$.

**206.** Hállese $\log_{24} 72$, sabiendo que $\log_6 2=a$.

**207.** Hállese $\log_{36} 9$, sabiendo que $\log_{36} 8=b$.

**208.** Hállese $\log_{10} 64$, sabiendo que $\log_4 125=c$.

**209.** Hállese $\log_5 6$, si se sabe que $\log_{100} 3=\alpha$ y $\log_{100} 2=\beta$.

**210.** Hállese $\log_{25} 24$, si se sabe que $\log_6 15=m$ y $\log_{12} 18=n$.

CAPÍTULO

# V

# TRIGONOMETRÍA

## § 1. Angulos y medición de los mismos

**Concepto de ángulo.** Sean dados dos rayos coincidentes: el rayo $OA$ y el $OB$ (fig. 37).

Supongamos que el rayo $OA$ realiza cierto giro, dando vueltas en un plano en torno al punto $O$. Entonces para cualquier giro semejante el rayo $OB$ se considera como rayo *inmóvil* (inicial) de giro, mientras que el rayo $OA$, el rayo *móvil*, que realiza el giro dado.

Cualquier giro del rayo móvil $OA$ con relación al rayo inmóvil $OB$ puede realizarse en dos direcciones opuestas (en el sentido de las agujas del reloj y en el sentido contrario). Si en el rayo móvil $OA$




Fig. 37

montamos un dispositivo trazador que se aleje uniformemente del punto $O$, desplazándose a lo largo del rayo $OA$, entonces, a medida que gira el rayo $OA$, el dispositivo dejará en el plano cierta huella. Al realizar el rayo $OA$ cierto giro, la huella representará una curva en desenrollamiento en torno del punto de giro $O$. Dicha curva tiene por origen el rayo inmóvil $OB$ y termina junto al rayo móvil $OA$. Con ayuda de tal curva se muestran en los dibujos los giros, con la particularidad de que junto al rayo móvil la curva termina con una flecha que indica el sentido del giro realizado.

En la figura 38 se muestra uno de los giros en el sentido de las agujas del reloj.

En la figura 39 se muestra uno de los giros en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza semejante giro en el sentido de las agujas del reloj de modo tal, que el rayo $OA$ ha coincidido por primera vez con el rayo inmóvil $OB$. Este giro suele llamarse *vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj* (fig. 40).

Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza tal giro en el sentido contrario a las agujas del reloj, que el rayo $OA$ coincide por primera vez con el rayo inicial $OB$. Este giro suele llamarse *vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj* (fig. 41).

En la fig. 42 se muestra un giro igual a tres vueltas completas en el sentido contrario a las agujas del reloj.

En la fig. 43 se muestra un giro igual a dos vueltas completas en el sentido de las agujas del reloj.

Así pues, de los ejemplos examinados está claro como se debe mostrar en el dibujo cualquier giro.

Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza un giro en el plano en torno del punto $O$ respecto del rayo inmóvil $OB$. En este caso

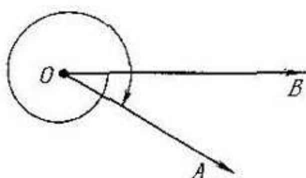


Fig. 38

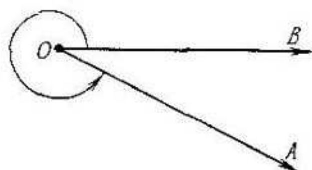


Fig. 39

suele considerarse que de esta manera se forma un ángulo $\alpha$ y se dice que el rayo móvil $OA$ prefija el ángulo $\alpha$, correspondiente al giro citado. El punto $O$ se denomina vértice del ángulo $\alpha$, el rayo inmóvil $OB$ es el rayo de referencia del ángulo $\alpha$, y $OA$, el rayo móvil



Fig. 40

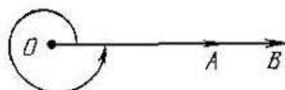


Fig. 41

que prefija el ángulo $\alpha$. El rayo inmóvil $OB$ (comienzo de referencia para cualquier ángulo) suele disponerse en los dibujos horizontalmente orientado a la derecha. Se ha convenido en considerar que si el rayo móvil realiza cierto giro en el sentido contrario a las agujas del reloj, se prefija de este modo el correspondiente *ángulo positivo*; si el rayo móvil realiza cierto giro en el sentido de las agujas del reloj, él prefija el correspondiente *ángulo negativo*; si el rayo móvil no realiza ningún giro, él prefija *el ángulo nulo*.

Por ejemplo, si el rayo móvil $OA$ da una vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj, dicho rayo prefija el *ángulo positivo completo*; si el rayo $OA$ da una vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj, él prefija el *ángulo negativo completo*.

**Medición del ángulo en grados.** Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza un giro igual a $\frac{1}{360}$ parte de vuelta completa en el sen-

tido contrario a las agujas del reloj. En este caso se dice que el rayo móvil $OA$ prefija un ángulo cuya medida en grados es igual a *un grado*, o, en forma más breve, un ángulo *de un grado* (1°). Por consiguiente, el ángulo positivo completo y el de 360° es el mismo ángulo, prefijado por el rayo móvil $OA$ que realiza una vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj (véase la fig. 41).

Para las partes del ángulo de un grado se han aceptado denominaciones especiales que son *minuto* y *segundo*.

Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj un giro igual a $\frac{1}{60}$ parte de vuelta, correspon-

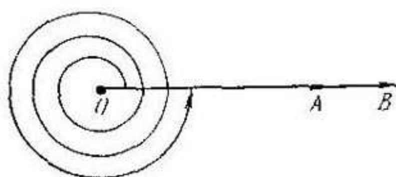



Fig. 42

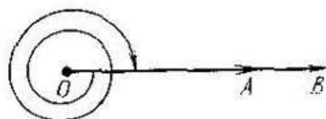



Fig. 43

diente al ángulo de un grado. En este caso se dice que el rayo móvil $OA$ prefija un ángulo de *un minuto* (1′). Por consiguiente, un ángulo de 60′ y un ángulo de 1° son un mismo ángulo.

Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj un giro igual a $\frac{1}{60}$ parte de vuelta, correspondiente al ángulo de un minuto. En este caso se dice que el rayo móvil $OA$ prefija un ángulo de *un segundo* (1″). Por consiguiente, un ángulo de 60″ y un ángulo de 1′ son un mismo ángulo.

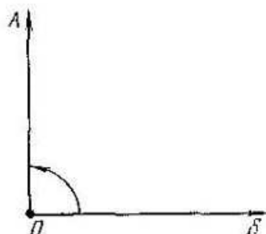



Fig. 44

Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj un giro igual a $\frac{1}{4}$ parte de una vuelta completa. En este caso se dice que el rayo móvil $OA$ prefija un *ángulo recto positivo* o bien un ángulo de 90° (fig. 44).

Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj un giro igual a $\frac{1}{2}$ parte de una vuelta completa. En este caso se dice que el rayo móvil $OA$ prefija un *ángulo llano positivo*, o bien un ángulo de 180° (fig. 45).

Supongamos que el rayo móvil $OA$ no realiza ningún giro, en este caso se dice que el rayo móvil $OA$ prefija un *ángulo nulo*, o bien un ángulo de 0° (véase la fig. 37).

En los casos como el citado suele decirse a veces que el rayo móvil $OA$ ha realizado una *vuelta nula*.

Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza un giro igual a $\frac{1}{2}$ parte de una vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj. En este caso se dice que el rayo móvil $OA$ prefija un *ángulo llano negativo*, o bien un ángulo de $(-180°)$ (véase la fig. 45).

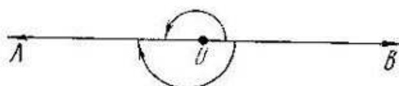



Fig. 45

Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza un giro igual a $\frac{1}{4}$ parte de una vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj. Entonces, el rayo móvil $OA$ prefija un *ángulo recto negativo*, o bien un ángulo de $(-90°)$ (fig. 46).

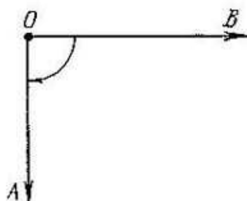



Fig. 46

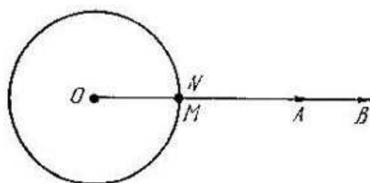



Fig. 47

**Medida radial del ángulo.** Supongamos que el rayo móvil $OA$ coincide con el rayo inmóvil $OB$ sin dar ninguna vuelta. Elijamos arbitrariamente un punto $M$ en el rayo inmóvil $OB$ y un punto $N$ del rayo móvil $OA$ que coincide con el punto $M$. Tracemos una circunferencia con centro en el punto $O$ y de radio $R$, igual a la longitud del segmento $ON$ (fig. 47).

Si el rayo móvil $OA$ empieza a girar alrededor del punto $O$, el punto $N$ se desplazará a lo largo de esta circunferencia.

Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza tal giro en el sentido contrario a las agujas del reloj que el punto $N$, desplazándose por la circunferencia, pase una distancia igual al radio de ésta. En este caso se dice que el rayo móvil $OA$ prefija un ángulo cuya medida radial es igual a un radián, o, más brevemente, un *ángulo de un radián* (fig. 48).

Sea dado un número positivo $\beta$. Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza tal giro en el sentido contrario a las agujas del reloj que el punto $N$, desplazándose por la circunferencia, pase una distancia $S$, igual a $\beta R$; entonces se dice que el rayo móvil $OA$ prefija un *ángulo de* $\beta$ *radianes*.

Sea dado un número negativo β, y supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza tal giro en el sentido de las agujas del reloj, que el punto $N$, desplazándose por la circunferencia, pase una distancia $S$, igual a $|\beta| R$; entonces se dice que el rayo móvil $OA$ prefija un *ángulo de* β *radianes*.

Así pues, la medida radial de cualquier ángulo se define del modo siguiente. Sea dado cierto ángulo α, prefijado por el rayo móvil $OA$. Se denomina *medida radial del ángulo* α tal número, cuyo valor absoluto es igual a la razón entre la distancia $S$, recorrida a lo largo de la circunferencia de radio $R$ por el punto $N$ del rayo móvil $OA$, y el radio $R$, y cuyo signo se define por el sentido del giro realizado, en otras palabras, se llama medida radial del ángulo α un número positivo $\frac{S}{R}$, si el giro se realiza en el sentido contrario a las agujas del reloj o bien un número negativo $\left(-\frac{S}{R}\right)$, si el giro se realiza en el sentido de las agujas del reloj.

Fig. 48

Si el ángulo viene prefijado por el rayo móvil $OA$ que no realiza ningún giro, entonces el ángulo α será nulo y la medida radial de este ángulo se considera igual a cero.

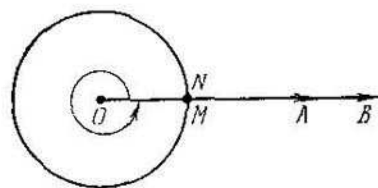



**Fig. 49**

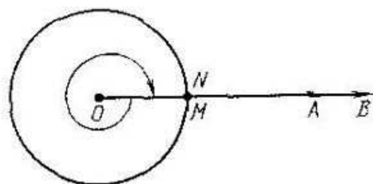



Fig. 50

Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza una vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj, entonces, el punto $N$ del rayo móvil $OA$, desplazándose por la circunferencia de radio $R$, recorre una distancia igual a $2\pi R$. Quiere decir, en este caso el rayo móvil $OA$ prefija un ángulo, cuya medida radial es igual a $2\pi$ radianes, o, más brevemente, un ángulo de $2\pi$ radianes (fig. 49), es decir, el ángulo de 360° y el de $2\pi$ radianes son un mismo ángulo (véanse las figs. 41 y 49).

Si el rayo móvil $OA$ da una vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj, se prefija un ángulo de $(-2\pi)$ radianes (fig. 50),

es decir, el ángulo de $(-360°)$ y el ángulo de $(-2\pi)$ radianes son un mismo ángulo (véanse las figs. 40 y 50).

Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza $\frac{1}{4}$ parte de vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj. En este caso el punto $N$ del rayo móvil, desplazándose por la circunferencia de radio $R$, recorre una destancia igual a $\frac{\pi R}{2}$. Por consiguiente, si el

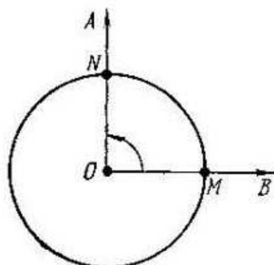


Fig. 51

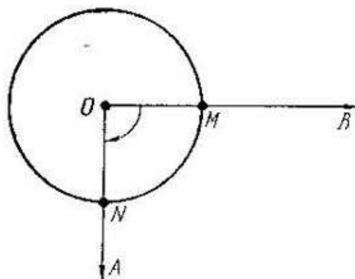


Fig. 52

rayo móvil $OA$ realiza $\frac{1}{4}$ parte de vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj, él prefija un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes (fig. 51), es decir, un ángulo de $90°$ y un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes son un mismo ángulo (véanse las figs. 44 y 51).

Si el rayo móvil $OA$ realiza $\frac{1}{4}$ parte de vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj, él prefija un ángulo de $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ radianes (fig. 52), es decir, un ángulo de $(-90°)$ y un ángulo de $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ radianes son un mismo ángulo (véanse las figs. 46 y 52).

Supongamos que el rayo móvil $OA$ realiza $\frac{1}{2}$ parte de vuelta completa en el sentido contrario a las agujas del reloj. Entonces, el punto $N$ del rayo móvil $OA$, desplazándose a lo largo de la circunferencia de radio $R$, recorre una distancia igual a $\pi R$, por consiguiente, en este caso, el ángulo que se prefija por el rayo móvil $OA$ medirá $\pi$ radianes (fig. 53), es decir, el ángulo de $180°$ y el ángulo de $\pi$ radianes representan un mismo ángulo (véanse las figs. 45 y 53).

Análogamente, el ángulo de $(-180°)$ y el ángulo de $(-\pi)$ radianes representan un mismo ángulo que se prefija por el rayo móvil $OA$ que realiza $\frac{1}{2}$ parte de vuelta completa en el sentido de las agujas del reloj (véanse las figs. 45 y 53).

Si la medida radial de cierto ángulo constituye $\beta$ radianes, mientras que la medida por grados del mismo ángulo es igual a $\alpha$ grados,

los números mencionados estarán ligados entre sí mediante la siguiente proporción:

$$\alpha^\circ : 360^\circ = \beta : 2\pi.$$

Haciendo uso de esta proporción, se puede convertir la medida radial en medida en grados, y viceversa, la medida en grados a la radial. Los ejemplos aducidos más arriba representan un caso particular de dicha proporción. He aquí unos ejemplos más.

El ángulo de 30° y el de $\frac{\pi}{6}$ radianes representan un mismo ángulo, lo que se deduce de la validez de la proporción $30^\circ : 360^\circ = \frac{\pi}{6} : 2\pi$.

El ángulo de 45° y el de $\frac{\pi}{4}$ radianes representan un mismo ángulo, lo que se deduce de la validez de la proporción $45^\circ : 360^\circ =$

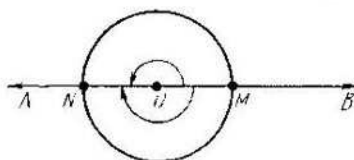



Fig. 53

$= \frac{\pi}{4} : 2\pi$. El ángulo de 60° y el de $\frac{\pi}{3}$ radianes representan un mismo ángulo, lo que se deduce de la validez de la proporción $60^\circ : 360^\circ = \frac{\pi}{3} : 2\pi$.

**Observación.** En lo sucesivo siempre se empleará sólo la medida radial del ángulo. En las designaciones las medidas de un ángulo en radianes casi siempre se omite la palabra «radián». Por esta razón, en adelante

— por ángulo $\pi$ se entiende un ángulo de $\pi$ radianes, es decir, un ángulo cuya medida radial es igual a $\pi$ radianes:

— por ángulo $\frac{7}{9}$ se entiende un ángulo de $\frac{7}{9}$ radianes, es decir, un ángulo cuya medida radial es igual a $\frac{7}{9}$ radianes;

— por ángulo $\alpha$ (donde $\alpha$ es cierto número fijo) se entiende un ángulo de $\alpha$ radianes, es decir, un ángulo cuya medida radial es igual a $\alpha$ radianes;

— por ángulo $(\alpha + \beta)$ se entiene un ángulo, cuya medida radial es igual a $(\alpha + \beta)$ radianes;

— por ángulo $(\alpha - \beta)$ se entiende un ángulo cuya medida radial es igual a $(\alpha - \beta)$ radianes.

Notemos, además, que por las palabras «un ángulo $\alpha$ tal que $\alpha \neq \beta + k\gamma$, $k \in Z$ se entiende que $\alpha$ es un ángulo tal que su medida radial no es igual al número $(\beta + k\gamma)$, cualquiera que sea el número entero $k$.

**Circunferencia unidad.** Supongamos que en un plano se ha introducido un sistema rectangular de coordenadas $xOy$ con el semieje positivo de abscisas $Ox$ orientado a la derecha y el semieje positivo de ordenadas $Oy$, hacia arriba. Sea dada una circunferencia cuyo

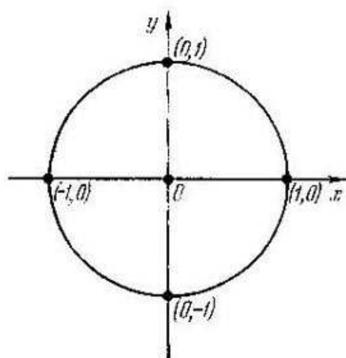



Fig. 54

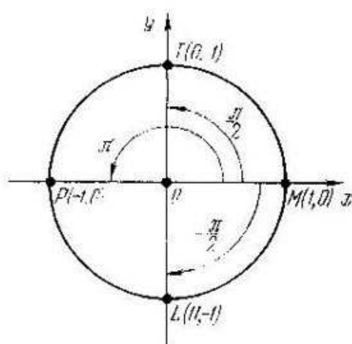



Fig. 55

radio es igual a la unidad de medición de longitudes con centro en el origen de coordenadas (fig. 54). Tal circunferencia suele llamarse *circunferencia unidad*.

Tomemos como vértice de cualquier ángulo el origen de coordenadas, es decir, el punto $O$ (0, 0). Consideramos como rayo inmóvil el semieje positivo de abscisas, es decir, como punto de referencia para cualquier ángulo $\alpha$.

Sea dado un ángulo cualquiera $\alpha$: es obvio que el rayo móvil $OA$, que prefija este ángulo $\alpha$, cortará sin falta la circunferencia unidad en cierto punto $Q$ $(a, b)$. No es menos evidente que para cualquier punto $R$ $(c, d)$ de la circunferencia unidad existe obligatoriamente un ángulo $\beta$ tal, que el rayo móvil $OA$, que prefija dicho ángulo $\beta$, corte la circunferencia unidad precisamente en este punto $R$ $(c, d)$.

Determinemos las coordenadas de algunos puntos de la circunferencia unidad.

Queda claro, ante todo que (fig. 55): el rayo móvil $OA$, que prefija el ángulo nulo, corta la circunferencia unidad en el punto $M$ (1; 0); el rayo móvil $OA$ que prefija el ángulo $\pi$, corta la circunferencia unidad en el punto $P$ (—1; 0); el rayo móvil $OA$ que prefija el ángulo $\frac{\pi}{2}$ interseca la circunferencia unidad en el punto $T$ (0; 1); el rayo móvil $OA$ que prefija el ángulo $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ interseca la circunferencia unidad en el punto $L$ (0, —1).

Supongamos que el rayo móvil $OA$, que prefija el ángulo $\frac{\pi}{4}$, corta la circunferencia unidad en un punto $K$ (fig. 56). Calculemos las coordenadas de este punto. Tracemos por el punto $K$ una recta paralela al eje $Oy$, y supongamos que corta el eje $Ox$ en el punto $K_1$. Por cuanto ambas coordenadas del punto $K$ son positivas, serán iguales, respectivamente, a las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo isósceles $OK_1K$. Conforme al teorema de Pitágoras, $|OK|^2 = |OK_1|^2 + |KK_1|^2$; como $|OK_1| = |K_1K|$, obtenemos de aquí que $|OK_1| = |KK_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Por eso, la abscisa del punto $K$ es igual a

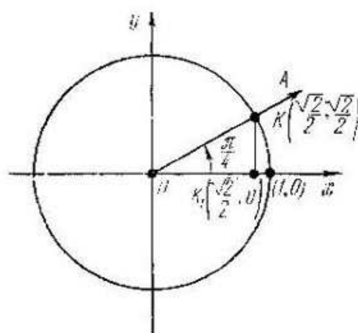


Fig. 56

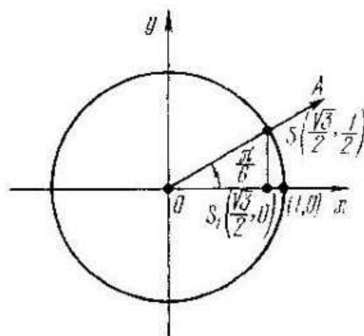


Fig. 57

la ordenada del punto $K$ e igual al número $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quiere decir, el rayo móvil $OA$ que prefija el ángulo $\frac{\pi}{4}$ corta la circunferencia unidad en el punto $K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$[4].

Supongamos que el rayo móvil $OA$, que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{6}$, corta la circunferencia unidad en el punto $S$ (fig. 57). Calculemos las coordenadas de este punto. Tracemos por el punto $S$ una recta paralela al eje $Oy$ que corte el eje $Ox$ en el punto $S_1$. Por cuanto ambas coordenadas del punto $S$ son positivas, serán iguales, respectivamente, a las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo $OS_1S$. Del curso de geometría se sabe que en un triángulo rectángulo la longitud del cateto opuesto al ángulo de $\frac{\pi}{6}$, es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa. Por consiguiente, $|SS_1| = \frac{1}{2}$. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, $|OS_1|^2 = |OS|^2 - |SS_1|^2$. De aquí tenemos $|OS_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por eso la abscisa del punto $S$ es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$, y su ordenada, a $\frac{1}{2}$.

Quiere decir el rayo móvil $OA$, que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{6}$, corta la circunferencia unidad en el punto $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Supongamos que el rayo móvil $OA$, que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{3}$, corta la circunferencia unidad en el punto $F$ (fig. 58). Calculemos

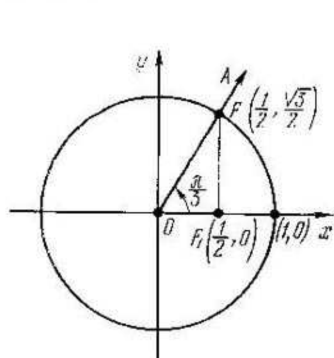


Fig. 58

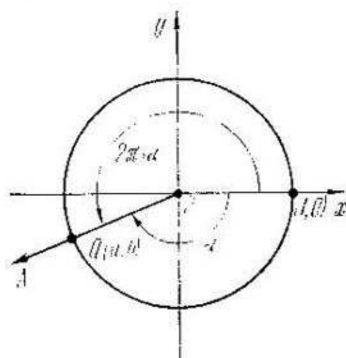


Fig. 59

las coordenadas de dicho punto. Tracemos por el punto $F$ una recta paralela al eje $Oy$, que corta el eje $Ox$ en el punto $F_1$. Por cuanto ambas coordenadas del punto $F$ son positivas, serán iguales, respectivamente, a las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo.

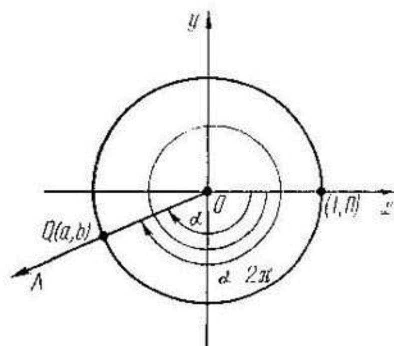


Fig. 60

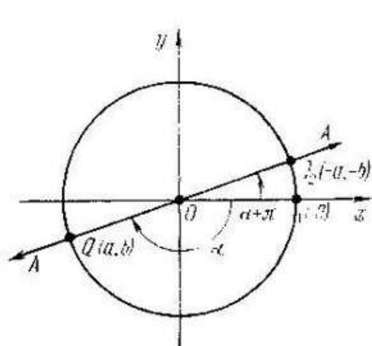


Fig. 61

Empleando la afirmación enunciada más arriba sobre la longitud del cateto opuesto al ángulo de $\frac{\pi}{6}$, llegamos a que $|OF_1| = \frac{1}{2}$, mas, en este caso, al aplicar el teorema de Pitágoras, encontramos que $|F_1F| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Por eso, la abscisa del punto $F$ es igual a $\frac{1}{2}$,

y su ordenada, a $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Quiere decir, el rayo móvil $OA$ que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{3}$ corta la circunferencia unidad en el punto $F\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Supongamos que el rayo móvil $OA$, que prefija el ángulo $\alpha$, corta la circunferencia unidad en cierto punto $Q(a, b)$. En este caso es fácil ver la validez de las siguientes **afirmaciones**:

1. *El rayo móvil $OA$, que prefija el ángulo $(\alpha + 2\pi)$, corta la circunferencia unidad en el mismo punto $Q(a, b)$* (fig. 59).

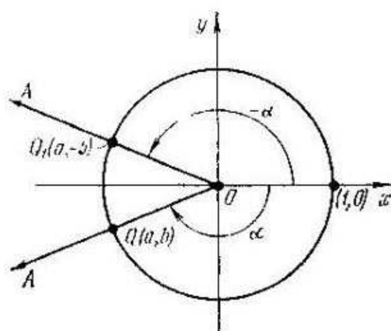



Fig. 62

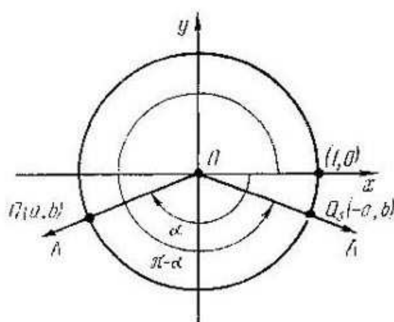



Fig. 63

2. *El rayo móvil $OA$ que prefija el ángulo $(\alpha - 2\pi)$ corta la circunferencia unidad en el mismo punto $Q(a, b)$* (fig. 60).

3. *El rayo móvil que prefija el ángulo $(\alpha + \pi)$ corta la circunferencia unidad en el punto $Q_2(-a, -b)$, simétrico al punto $Q(a, b)$ con relación al origen de coordenadas, es decir, al punto $O(0, 0)$* (**fig. 61**).

4. *El rayo móvil que prefija el ángulo $(-\alpha)$ corta la circunferencia unidad en un punto $Q_1(a, -b)$, simétrico al punto $Q(a, b)$ respecto del eje $Ox$* (fig. 62).

5. *El rayo móvil que prefija el ángulo $(\pi - \alpha)$ corta la circunferencia unidad en un punto $Q_3(-a, b)$, simétrico al punto $Q(a, b)$ respecto al eje $Oy$* (fig. 63).

## § 2. Seno y coseno de un ángulo

Sea introducido en un plano el sistema rectangular de coordenadas $xOy$ con el semieje positivo de abscisas $Ox$ orientado a la derecha y el semieje positivo de ordenadas $Oy$, orientado hacia arriba (fig. 64). Sea dada, además una circunferencia unidad.

Elijamos como vértice de cualquier ángulo el origen de coordenadas, es decir, el punto $O(0, 0)$. El semieje positivo de abscisas se considera como el rayo inmóvil $OB$, es decir, como el punto de referencia en la medición de cualquier ángulo $\alpha$.

Supongamos que el punto $M$ es un punto común del rayo inmóvil $OB$ y de la circunferencia unidad. Entonces, una parte del rayo inmóvil $OB$, a saber, el segmento $OM$ se denominará *radio unidad inmóvil*, o bien punto de referencia de los ángulos.

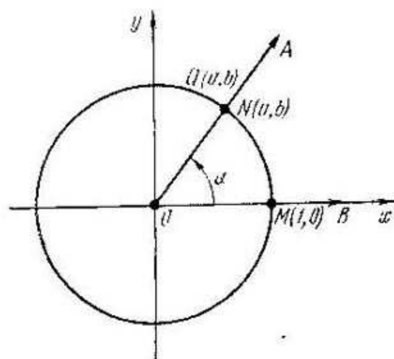


Fig. 64

Supongamos que el rayo móvil $OA$ coincide con el inmóvil $OB$ sin realizar ninguna vuelta. Denotemos con $N$ el punto del rayo móvil $OA$ que conincide con el punto $M$ del rayo inmóvil $OB$. Entonces, una parte del rayo móvil $OA$, es decir, el segmento $ON$ se denominará *radio unidad móvil*, y el punto $N$, extremo del radio unidad móvil.

Si el rayo móvil $OA$ realiza cierto giro, entonces junto con él realizará también el mismo giro el radio unidad móvil $ON$. Por eso se puede considerar que el ángulo $\alpha$ lo prefija no sólo el rayo móvil $OA$, sino también el radio unidad móvil $ON$.

Convengamos en decir en lo sucesivo: el radio unidad móvil $ON$ prefija un ángulo $\alpha$, sobreentendiendo por ello que el rayo móvil correspondiente $OA$ prefija el mismo ángulo $\alpha$.

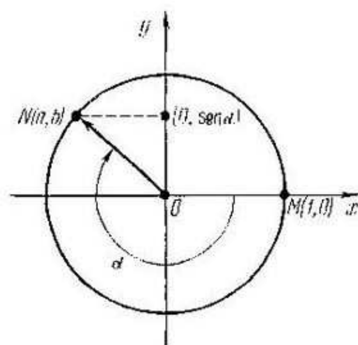


Fig. 65

Supongamos que el extremo del radio unidad móvil $ON$, que prefija el ángulo $\alpha$, coincide con el punto $Q$ $(a, b)$ de la circunferencia unidad; entonces, las coordenadas del punto $Q$ se llamarán coordenadas del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $\alpha$ y se notará: $N$ $(a, b)$.

**Seno de un ángulo.** Sea dado un ángulo cualquiera $\alpha$. El número igual a la ordenada del extremo del radio unidad móvil que prefija dicho ángulo $\alpha$ lleva el nombre de *seno* del ángulo $\alpha$ y se designa sen $\alpha$ (fig. 65).

De la definición proviene que para cualquier ángulo $\alpha$ existe el seno de este ángulo y, además, único.

**Ejemplos.**

La ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo nulo, es igual a cero (fig. 66), por consiguiente, sen $0 = 0$.

La ordenada del extremo del radio unidad móvil que prefija el

ángulo $\pi$ es igual a cero (véase la fig. 66). Por consiguiente, sen $\pi = 0$.

La ordenada del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{2}$, es igual a la unidad (fig. 67), por consiguiente sen $\frac{\pi}{2} = 1$.

La ordenada del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ es igual a $(-1)$ (véase la fig. 67), por consiguiente,

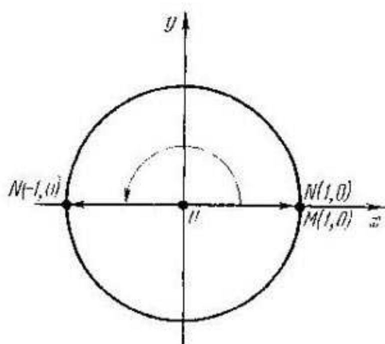


Fig. 66

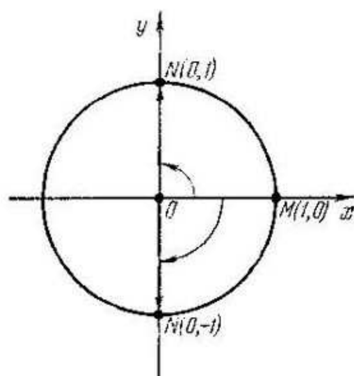


Fig. 67

sen $\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

La ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{6}$, es igual a $\frac{1}{2}$ (fig. 68), por consiguiente, sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

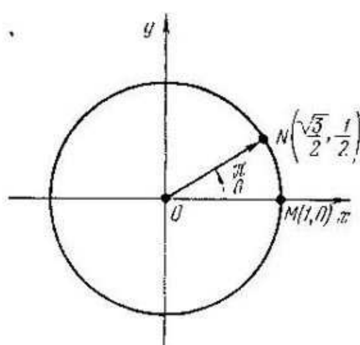


Fig. 68

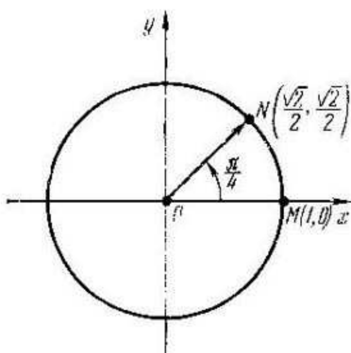


Fig. 69

La ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo de $\frac{\pi}{4}$, es igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (fig. 69), por consiguiente, sen $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el

ángulo de $\frac{\pi}{3}$, es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (fig. 70), por consiguiente, sen $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Demos a conocer algunas propiedades del seno de un ángulo. Por cuanto, para cualquier ángulo $\alpha$, la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija dicho ángulo $\alpha$, no puede ser menor de $(-1)$ y mayor de 1, encontrándose encerrada entre los valores adu-

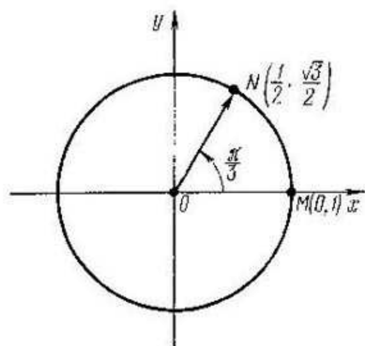



Fig. 70

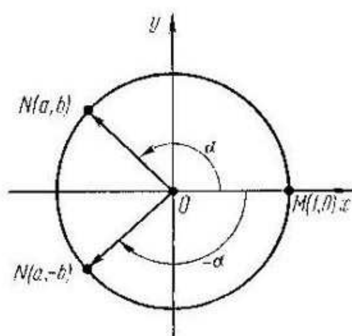



Fig. 71

cidos, incluidos $(-1)$ y 1, entonces, cualquiera que sea el ángulo $\alpha$, se verifica la desigualdad doble $-1 \leqslant \text{sen}\ \alpha \leqslant 1$.

Supongamos que la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\alpha$, es el número $b$, entonces, según lo expuesto más arriba, la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $(-\alpha)$, será el número $(-b)$ (fig. 71). Por eso, para cualquier ángulo $\alpha$ se verifica la igualdad

$$\text{sen}\ (-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha.$$

Esta propiedad del seno de un ángulo puede enunciarse así: el signo menos puede sacarse del signo del seno o introducirse bajo el signo del seno, es decir:

$$\text{sen}\ (-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ (-\alpha).$$

**Ejemplos.**

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Según lo indicado anteriormente, la ordenada del extremo del radio unidad, que prefija el ángulo $\alpha$, es igual a la ordenada del extremo del radio unidad que prefija el ángulo $(\pi - \alpha)$ (fig. 72).

Por eso, para cualquier ángulo $\alpha$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha.$$

**Ejemplos.** $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Supongamos que la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\alpha$, es el número $b$, entonces, según lo expuesto

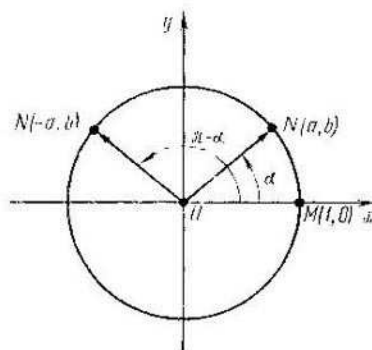



Fig. 72

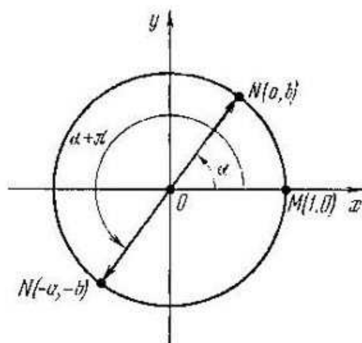



Fig. 73

más arriba, la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $(\pi + \alpha)$, será el número $(-b)$ (fig. 73). Por eso, para cualquier ángulo $\alpha$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha.$$

**Ejemplos.** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Según lo indicado más arriba, la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\alpha$, es igual a la ordenada del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $(\alpha + 2\pi)$ e igual a la ordenada del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $(\alpha - 2\pi)$. Por eso, para cualquier ángulo $\alpha$ se verifican las siguien-

tes igualdades:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\alpha + 2\pi),$$
$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\alpha - 2\pi).$$

Haciendo uso de estas igualdades y aplicando el método de inducción matemática, se puede mostrar que para cualquier número entero $n$ y todo ángulo $\alpha$ se verifican las igualdades

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\alpha + 2\pi n) = \operatorname{sen} (\alpha - 2\pi n).$$

Esta propiedad del seno de un ángulo puede enunciarse así: el seno de cualquier ángulo $\alpha$ se repite. al variar el ángulo en la magnitud de $2\pi n$, donde $n$ es un número entero cualquiera.

**Ejemplos.** $\operatorname{sen} \frac{13\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

$$\operatorname{sen} \frac{9\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{sen} \frac{7\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} = \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} = \operatorname{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 10\pi\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} - 24\pi\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Sea dado un número $\beta \in (0, \pi)$. Examinemos un ángulo cuya medida radial es el número $\beta$. El extremo del radio unidad móvil, que prefija dicho ángulo, coincide con cierto punto de la circunferencia unidad dispuesto en el primero o en el segundo cuadrantes, o bien en el semieje positivo de ordenadas. Por eso, la ordenada del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo mencionado, es positiva, con otras palabras, el seno de este ángulo es positivo.

Tomando en consideración que $\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} (\beta + 2\pi n)$ para cualquier número entero $n$, se puede afirmar que $\operatorname{sen} \alpha$ es positivo para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que su medida radial (el número $\alpha$) pertenece, para cierto $n$ entero, al intervalo correspondiente $(2\pi n, \pi + 2\pi n)$. En la recta numérica (fig. 74) se muestran tales intervalos, que para cada número $\alpha$, perteneciente a cualquiera de estos intervalos, $\operatorname{sen} \alpha$ es positivo.

De modo análogo se muestra que es también válida la siguiente afirmación: $\operatorname{sen} \alpha$ es negativo para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que su

medida radial (el número $\alpha$) pertenece, con cierto $n$ entero, al intervalo $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$. En la recta numérica (fig. 75) están mostrados tales intervalos, que para cada número $\alpha$, perteneciente a cualquiera de ellos, sen $\alpha$ es negativo.

En fin, teniendo presente que sen $\alpha$ = sen $(\alpha + 2\pi n)$ para todo número $n$ entero y que sen 0 = sen $\pi$ = 0, resulta que sen $\alpha$ es igual

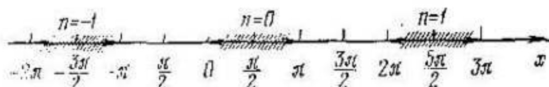



Fig. 74

a cero para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que su medida radial (el número $\alpha$) es igual al número $\pi m$, siendo $m$ entero. En la recta numérica (fig. 76) se muestran aquellos números $\alpha$, para cada uno de los cuales sen $\alpha$ es igual a cero.

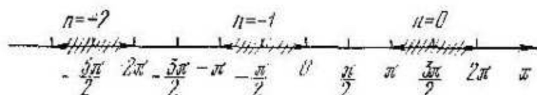



Fig. 75

**Arco seno de un número.** Surge con frecuencia el problema en el que se requiere hallar, para cualquier número real $a$, tal ángulo $\alpha$ que el seno de éste sea igual al número $a$.

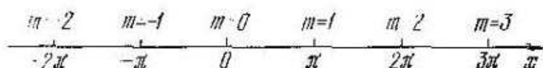



Fig. 76

Observemos que si $a > 1$ y si $a < -1$, entonces este problema no tiene solución, pues, por definición de seno de un ángulo, no existe tal ángulo cuyo seno sea mayor del 1, o menor que $(-1)$.

En cambio, si $a \in [-1; 1]$, se puede mostrar que existe una infinidad de ángulos tales, que el seno de cada uno de ellos es igual al número $a$. En efecto, la recta $y = a$ ($a \in [-1, 1]$) corta la circunferencia unidad o bien en dos puntos (fig. 77) o bien en un solo punto (fig. 78). Mas, según lo expuesto más arriba, para todo punto de este tipo en la circunferencia unidad existe un ángulo $\alpha$ tal, que el seno de dicho ángulo es igual a la ordenada del punto citado, es decir, igual a $a$. Ahora, de acuerdo con la propiedad del seno tenemos

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } (\alpha + 2\pi n)$$

para cualquier ángulo $\alpha$ y para todo número entero $n$. Por eso, el seno del ángulo $(\alpha + 2\pi n)$ es igual al número $a$, cualquiera que sea el número entero $n$.

Se ha convenido en lo siguiente: el ángulo cuyo seno es igual al número $a$ y que forma parte del segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, recibe el nombre de *ángulo principal* y se designa arcsen $a$ (se lee: arco seno del

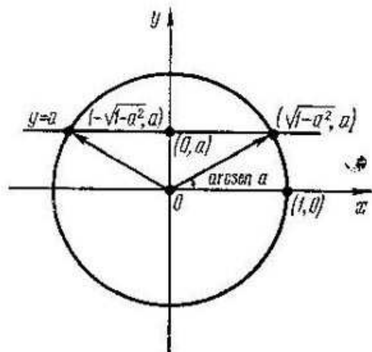



Fig. 77

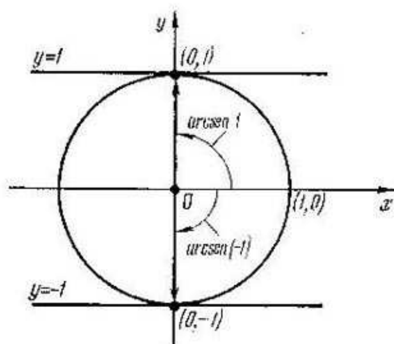



Fig. 78

número $a$). De este modo, por definición, arcsen $a$ es el ángulo que satisface simultáneamente dos condiciones:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arcsen} a \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} a) = a.$$

Es fácil ver que para cualquier número $a \in [-1; 1]$ el arco seno de este número existe y es, además, único. Para todo número $a \in \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ el arco seno de él no existe.

**Ejemplos.** 1. arcsen 0 es un ángulo $\alpha$ tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ y sen $\alpha = 0$; está claro que éste es un ángulo cero, por consiguiente,

$$\operatorname{arcsen} 0 = 0.$$

2. arsen 1 es un ángulo $\alpha$ tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ y sen $\alpha = 1$; está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{2}$ (véase la fig. 78), por consiguiente

$$\operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}.$$

3. arcsen $(-1)$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ y sen $\alpha = -1$; está claro que éste es el ángulo $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (véase la

fig. 78), por consiguiente,

$$\operatorname{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

4. $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$; está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{6}$, por consiguiente.

$$\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

5. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; está claro que éste es el ángulo $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, por consiguiente,

$$\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

6. $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{3}$, por consiguiente,

$$\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Indiquemos algunas propiedades del arco seno de un número, que se desprenden de su definición. Para todo número $a$, mayor que 1, y también para todo número $a$ menor que $(-1)$, la notación $\operatorname{arcsen} a$ está privada de sentido. Por ejemplo, no tienen sentido las notaciones

$$\operatorname{arcsen} 2,\ \operatorname{arcsen}(-3),\ \operatorname{arcsen}(-\sqrt{5}),$$
$$\operatorname{arcsen}\pi,\ \operatorname{arcsen}(-3\pi),\ \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

Para cualquier número $a \in [-1; 1]$ se verifica la siguiente desigualdad doble

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arcsen} a \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Para todo número $a \in [-1; 1]$ es válida la igualdad

$$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} a) = a.$$

Para todo número $a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ es válida la igualdad

$$\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\alpha) = \alpha.$$

**Ejemplos.** 1. Calcúlese $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right)$. Por cuanto $\frac{1}{3} \in [-1, 1]$, entonces $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

2. Calcúlese $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$. Por cuanto $\sqrt{\frac{\pi}{3}}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, entonces $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

3. Calcúlese $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{13\pi}{6}\right)$. Por cuanto $\frac{13\pi}{6}\notin\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, no podemos escribir que $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{13\pi}{6}\right)=\frac{13\pi}{6}$. No obstante, es fácil ver que $\operatorname{sen}\frac{13\pi}{6}=\operatorname{sen}\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$. Por eso, $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{13\pi}{6}\right)=\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$. Por cuanto $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, entonces $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$. Así pues, $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{13\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$.

4. Calcúlese $\operatorname{arcsen}[\operatorname{sen}(-5)]$. Es fácil ver que $\operatorname{sen}(-5)=\operatorname{sen}(2\pi-5)$ y $(2\pi-5)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Por eso $\operatorname{arcsen}[\operatorname{sen}(-5)]=\operatorname{arcsen}[\operatorname{sen}(2\pi-5)]=2\pi-5$. Así pues, $\operatorname{arcsen}[\operatorname{sen}(-5)]=2\pi-5$. Por fin, demos a conocer una propiedad más del arco seno del número $a$: para cualquier número $a\in[-1;1]$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{arcsen}(-a)=-\operatorname{arcsen} a.$$

Efectivamente, por definición, $\operatorname{arcsen} a=\alpha$, con la particularidad de que $\operatorname{sen}\alpha=a$ y $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\operatorname{arcsen}(-a)=\beta$, con la particularidad de que $\operatorname{sen}\beta=-a$ y $\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. De aquí se hace evidente que $\beta=-\alpha$, es decir,

$$\operatorname{arcsen}(-a)=-\operatorname{arcsen} a.$$

**Ejemplos.**

1. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$.

2. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\pi}{4}$.

3. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}$.

**Coseno de un ángulo.** Sea dado un ángulo $\alpha$ cualquiera. El número igual a la abscisa del radio unidad movil, que prefija dicho ángulo $\alpha$, se denomina *coseno* del ángulo $\alpha$ y se designa $\cos\alpha$ (fig. 79).

De la definición se deduce que para cualquier ángulo $\alpha$ existe el coseno de este ángulo y es, además, único.

La abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\frac{\pi}{2}$, es igual a cero (véase la fig. 67), por consiguiente, $\cos\frac{\pi}{2}=0$.

La abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, es igual a cero (véase la fig. 67), por consiguiente, $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$.

La abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo nulo, es igual a la unidad (véase la fig. 66), por consiguiente $\cos 0 = 1$.

La abscisa de los extremos del radio unidad móvil, que prefija el el ángulo $\pi$, es igual a $(-1)$ (véase la fig. 66), por consiguiente, $\cos \pi = -1$.

La abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el angulo $\frac{\pi}{6}$, es igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (véase la fig. 68), por consiguiente, $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

La abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\frac{\pi}{4}$ es igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (véase la fig. 69), por consiguiente, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

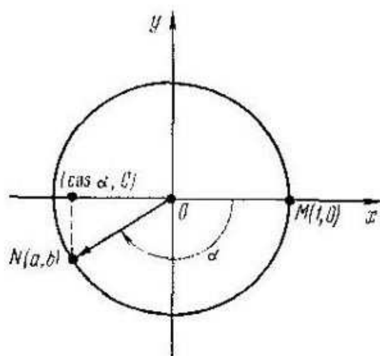



Fig. 79

La abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\frac{\pi}{3}$, es igual a $\frac{1}{2}$ (véase la fig. 70), por consiguiente, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

He aquí algunas propiedades del coseno de un ángulo.

Por cuanto para cualquier ángulo $\alpha$ la abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\alpha$, no puede ser menor que $(-1)$ y mayor que 1, encontrándose encerrada entre dichos valores, incluidos $(-1)$ y 1, entonces para todo ángulo $\alpha$ se verifica la siguiente desigualdad doble

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Según lo mostrado anteriormente, la abscisa correspondiente al extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\alpha$, es igual a la abscisa del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $(-\alpha)$. Por eso, para todo ángulo $\alpha$ se verifica la igualdad

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Esta propiedad del coseno de un ángulo puede enunciarse así: el signo delante de un ángulo que está bajo el signo del coseno se puede

cambiar sin variar el valor del coseno del ángulo, es decir,

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha = \cos(-\alpha).$$

**Ejemplos.** $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Supongamos que la abscisa correspondiente al extremo del radio unidad móvil, que prefija un ángulo $\alpha$, es el número $a$; entonces, de acuerdo con lo mostrado anteriormente, la abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $(\pi - \alpha)$, es el número $(-a)$ (véase la fig. 72). Por eso, para todo ángulo $\alpha$ se verifica la igualdad

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

**Ejemplos.** $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Sea el número $a$ la abscisa correspondiente al extremo del vector unidad móvil que prefija el ángulo $\alpha$; entonces, según lo mostrado anteriormente, la abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $(\pi + \alpha)$, es el número $(-a)$ (véase la fig. 73). Por eso, para cualquier ángulo $\alpha$ se verifica la igualdad

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$

**Ejemplos.** $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Como se ha indicado más arriba, la abscisa del extremo del radio unidad móvil, que prefija un ángulo $\alpha$, es igual a la abscisa del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $(\alpha + 2\pi)$ y es igual a la abscisa del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $(\alpha - 2\pi)$. Por eso, para cualquier ángulo $\alpha$ se verifican las igualdades

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi),$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha - 2\pi).$$

Haciendo uso de estas igualdades y aplicando el método de inducción matemática, podemos mostrar que para todo número entero $n$ y para cualquier ángulo $\alpha$ se verifican las igualdades

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n) = \cos(\alpha - 2\pi n).$$

Esta propiedad del coseno puede enunciarse así: el coseno de cualquier ángulo $\alpha$ se repite, al cambiar el ángulo en la magnitud de $2\pi n$, donde $n$ es un número entero cualquiera.

**Ejemplos.** $\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\cos\frac{9\pi}{4} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 10\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2} - 102\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 12\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Sea dado un número $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Examinemos un ángulo cuya medida radial es el número $\beta$. El extremo del radio unidad

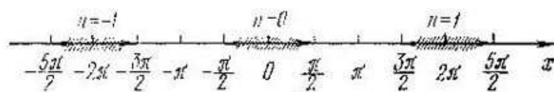



Fig. 80

móvil que prefija este ángulo coincide con cierto punto de la circunferencia unidad dispuesto o bien en el cuadrante I o bien en el cuadrante IV, o bien en el semieje positivo de abscisas. Por eso, la abscisa correspondiente al extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo dado, es positiva. Con otras palabras, el coseno de este ángulo es positivo. Teniendo presente que $\cos\beta = \cos(\beta + 2\pi n)$ para cualquier número $n$ positivo, podemos afirmar que $\cos\alpha$ es positivo para todo ángulo $\alpha$ tal, que la medida radial de éste (el número $\alpha$)

pertenece, para cierto $n$ entero, al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$. En la recta numérica (fig. 80) se muestran los intervalos de tal género, que para todo número $\alpha$, perteneciente a cualquiera de ellos, $\cos\alpha$ es positivo.

Análogamente se muestra que $\cos\gamma$ es negativo para cualquier ángulo $\gamma$ tal, que la medida radial de éste (el número $\gamma$) pertenece,

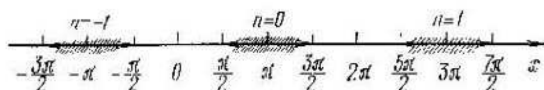



Fig. 81

con cierto $n$ entero, al intervalo $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$. En la recta numérica (fig. 81) se muestran los intervalos de tal género, que para todo ángulo $\gamma$, perteneciente a cualquiera de ellos, $\cos\gamma$ es negativo.

Por fin, tomando en consideración que $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n)$ para todo $n$ entero y que $\cos\frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, resulta que $\cos\alpha$ es

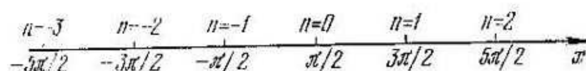



Fig. 82

igual a cero para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que la medida radial de éste (el número $\alpha$) es igual, con cierto $n$ entero, al número $\left(\pi n+\frac{\pi}{2}\right)$. En la recta numérica (fig. 82) se muestran tales números $\alpha$, que para cada uno de ellos $\cos\alpha$ es igual a cero.

**Arco coseno de un número.** Surge con frecuencia el problema en el que se requiere hallar, para cualquier número real $a$, tal ángulo $\alpha$ que el coseno de éste es igual al número $a$.

Notemos aquí mismo que si $a > 1$, y también si $a < -1$, este problema no tiene solución, puesto que, por definición de coseno de un ángulo, no existe un ángulo, cuyo coseno sea mayor que 1, o menor que $(-1)$.

En cambio, si $a \in [-1; 1]$, podemos mostrar que existe una infinidad de tales ángulos que el coseno de cada uno de ellos es igual al número $a$.

En efecto, la recta $x = a$ interseca, para $a \in [-1; 1]$, la circunferencia unidad o bien en dos puntos (fig. 83), o bien en un punto (fig. 84). Mas, según lo expuesto anteriormente, para cada tal punto

existe un ángulo $\alpha$ tal, que el coseno de él es igual a la abscisa del punto citado, es decir, igual a $a$. Ahora, de acuerdo con la propiedad del coseno,

$$\cos \alpha = \cos (\alpha + 2\pi n)$$

para cualquier ángulo $\alpha$ y cualquier número $n$ entero. Por eso, para cualquier número entero $n$ el coseno del ángulo $(\alpha + 2\pi n)$ es igual al número $a$.

Se ha convenido en lo siguiente: el ángulo cuyo coseno es igual al número $a$ y que forma parte del segmento $[0, \pi$ recibe el nombre de

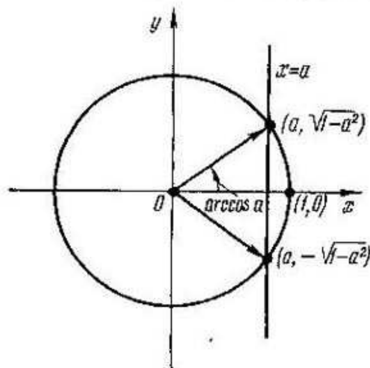


Fig. 83

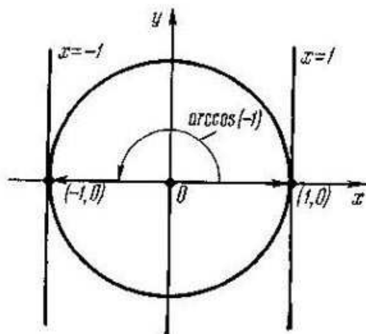


Fig. 84

*ángulo principal* y se designa arccos $a$ (se lee: arco coseno del número $a$). De este modo, por definición, arccos $a$ es un ángulo que satisface simultáneamente dos condiciones:

$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi, \quad \cos (\arccos a) = a.$$

Es fácil ver que para cualquier número $a \in [-1, 1]$ el arco coseno de este número existe y es, además, único. Para todo número $a \in \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ el arco coseno de éste no existe.

**Ejemplos.** 1. arccos 1 es un ángulo $\alpha$ tal, que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, y $\cos \alpha = 1$. Es obvio que éste es un ángulo cero (véase la fig. 84), por consiguiente, arccos $1 = 0$.

2. arccos 0 es un ángulo $\alpha$ tal, que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, y $\cos \alpha = 0$. Es obvio que éste es el ángulo $\frac{\pi}{2}$, y, por consiguiente, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$.

3. arccos $(-1)$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, y $\cos \alpha = -1$. Es obvio que éste es el ángulo $\pi$ (véase la fig. 84) y, por consiguiente $\arccos (-1) = \pi$.

4. $\arccos \frac{1}{2}$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, y $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{3}$ y, por consiguiente, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

5. $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, y $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{4}$ y, por consiguiente, $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

6. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, y $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{6}$, y, por consiguiente, $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Demos a conocer algunas propiedades del arco coseno de un número, que se deducen de su definición.

Para cualquier número $a$ inferior a $(-1)$ y también para cualquier número $a$ superior a 1, la notación $\arccos a$ está privada de sentido. Por ejemplo, no tienen sentido las notaciones

$$\arccos \sqrt{3},\ \arccos\left(-\frac{5}{4}\right),\ \arccos \pi$$

$$\arccos\left(-\frac{11}{10}\right),\ \arccos \sqrt{\frac{10}{\pi}},\ \arccos\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Para cualquier número $a \in [-1; 1]$ es válida la desigualdad doble

$$0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi.$$

Para cualquier número $a \in [-1; 1]$ es válida la igualdad

$$\cos(\arccos a) = a.$$

Para cualquier ángulo $\alpha \in [0; \pi]$ es válida la igualdad

$$\arccos(\cos \alpha) = \alpha.$$

**Ejemplos. 1**. Calcúlese $\cos(\arccos 0)$. Por cuanto $0 \in [-1; 1]$, se tiene $\cos(\arccos 0) = 0$.

2. Calcúlese $\cos\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$. Por cuanto $\frac{1}{3} \in [-1; 1]$, se tiene $\left(\arccos \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

3. Calcúlese $\arccos(\cos \sqrt{\pi})$. Por cuanto $\sqrt{\pi} \in [0, \pi, ]$ se tiene $\arccos(\cos \sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}$.

4. Calcúlese $\arccos[\cos(-6)]$. Por cuanto $(-6) \notin [0, \pi]$, entonces no se puede escribir que $\arccos[\cos(-6)] = -6$. No obstante, es fácil ver que $\cos(-6) = \cos(2\pi - 6)$ y $(2\pi - 6) \in [0, \pi]$. Por eso, $\arccos[\cos(-6)] = \arccos[\cos(2\pi - 6)] = 2\pi - 6$.

Por fin, indiquemos una propiedad más del arco coseno de un número: para todo número $a \in [-1; 1]$ se verifica la igualdad

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

En efecto, por definición,
arccos $a = \alpha$, con la particularidad de que $\cos\alpha = a$ y $\alpha \in [0, \pi]$,
arccos $(-a) = \beta$, con la particularidad de que $\cos\beta = -a$ y $\beta \in [0, \pi]$.
De aquí se ve que $\beta = \pi - \alpha$, es decir, $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

**Ejemplos.**

1. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
2. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.
3. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

## § 3. Tangente y cotangente de un ángulo

**Tangente de un ángulo.** Sea dado un ángulo cualquiera $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Se denomina *tangente* de dicho ángulo $\alpha$ un número igual a la razón entre el seno del ángulo $\alpha$ y el coseno del mismo y se designa $\operatorname{tg}\alpha$, es decir,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

De la definición se deduce que para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, la tangente de este ángulo $\alpha$ existe y es, además, única.

**Ejemplos.** $\operatorname{tg} 0 = \frac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0} = 0$, $\quad \operatorname{tg}\pi = \frac{\operatorname{sen}\pi}{\cos\pi} = 0$,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}.$$

Demos a conocer algunas propiedades de la tangente de un ángulo.

Para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in z$, se verifica la igualdad

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

En efecto, para cualquier ángulo $\alpha$ se verifican las igualdades $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, por lo cual para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, tendremos, de acuerdo con

la definición de tangente:

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Esta propiedad de la tangente puede enunciarse así: para todo ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, el signo menos puede sacarse del signo de la tangente o introducirse bajo el signo de la tangente, es decir, si $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, entonces

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(-\alpha).$$

**Ejemplos.** $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1,$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}.$$

Haciendo uso de las propiedades del seno y del coseno de un ángulo, podemos mostrar que para todo ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha\neq$ $\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, se verifican las igualdades

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}(\alpha-\pi).$$

En efecto, para todo ángulo de esta índole resultan lícitas las cadenas de igualdades

$$\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\pi)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\pi)}{\cos(\alpha-\pi)}=\frac{-\operatorname{sen}\alpha}{-\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

**Ejemplos.** $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,$

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}.$$

Aprovechando las igualdades

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\pi)=\operatorname{tg}(\alpha-\pi)$$

y aplicando el método de inducción matemática, se puede mostrar que para todo número entero $n$ y para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, se verifican las igualdades

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \pi n) = \operatorname{tg} (\alpha - \pi n).$$

Esta propiedad de la tangente de un ángulo puede enunciarse así: la tangente de cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, se repite al cambiar el ángulo en magnitud de $\pi n$, donde $n$ es un número entero cualquiera.

**Ejemplos.** $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{6} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{6} + 2\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\operatorname{tg} \left( -\frac{11\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{6} - 2\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg} \left( -\frac{9\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{4} - 2\pi \right) = \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{4} \right) = -1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{4} + 2\pi \right) = \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{4} \right) = -1,$$

$$\operatorname{tg} \frac{9\pi}{4} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + 2\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{tg} \left( -\frac{4\pi}{3} \right) = \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{3} - \pi \right) = \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{3} \right) = -\sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + 13\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} - 15\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} + 10\pi \right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Para cualquier ángulo $\alpha$ cuyos seno y coseno son de un mismo signo, la tangente del ángulo $\alpha$ es positiva, es decir, tg $\alpha$ es positiva

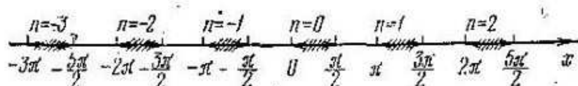



Fig. 85

para todo ángulo $\alpha$ que se prefija por el radio unidad móvil, cuyo extremo coincide con un punto de la circunferencia unidad dispuesto en los cuadrantes I ó III (es decir, para todo número $\alpha$ que interviene como medida radial del ángulo correspondiente $\alpha$, perteneciente, para cierto $n$ entero, al intervalo $\left( \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$). En la recta numérica (fig. 85) los intervalos que se muestran son tales que para todo número $\alpha$, perteneciente a cualquiera de ellos, tg $\alpha$ es positiva.

Para cualquier ángulo $\alpha$, cuyos seno y coseno son de signos opuestos, la tangente del ángulo $\alpha$ es negativa, es decir, tg $\alpha$ es negativa para cualquier ángulo $\alpha$ que se prefija por el radio unidad móvil cuyo extremo coincide con un punto de la circunferencia unidad dispuesto en los cuadrantes II ó IV (es decir, para cualquier número $\alpha$ que interviene como medida radial del ángulo correspondiente $\alpha$, perteneciente, para cierto $n$ entero, al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \pi n\right)$).

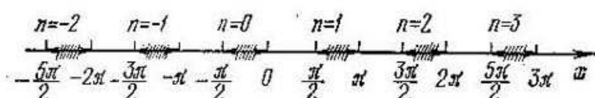



Fig. 86

En la recta numérica (fig. 86) están expuestos tales intervalos que para todo número $\alpha$, perteneciente a cualquiera de ellos, tg $\alpha$ es negativa.

Para cualquier ángulo $\alpha$, cuyo seno es igual a cero, la tangente del ángulo $\alpha$ es también nula, es decir, tg $\alpha = 0$ para todo ángulo $\alpha$ prefijado por el radio unidad móvil cuyo extremo coincide o bien con el punto $M$ (1; 0) o bien con el punto $P$ (−1; 0) (es decir, para cualquier número $\alpha$ que interviene como medida radial del ángulo correspondiente $\alpha$, igual, para cierto $n$ entero, al número $\pi n$). En la recta numérica (fig. 76) se indican los números $\alpha$, para cada uno de los cuales tg $\alpha$ es igual a cero.

La definición de tangente de un ángulo, aducida más arriba, puede ser enunciada así:

sea dado (fig. 87) un ángulo cualquiera $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$, y supongamos que el extremo del radio unidad móvil, que prefija dicho ángulo $\alpha$, es el punto $N$ $(a, b)$ (con la particularidad de que $a \neq 0$ a consecuencia de que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$); se denomina *tangente* del ángulo citado el número igual a la razón de la ordenada del punto $N$ a la abscisa del mismo punto $N$, es decir,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Es fácil ver (fig. 87) que la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto $N$ $(a, b)$ corta la recta $x = 1$ en el punto $K\left(1, \frac{b}{a}\right)$. Con otras palabras, la recta que pasa por el origen de coordenadas y el extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\alpha$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z\right)$, corta la recta $x = 1$ en el punto $K$ (1, tg $\alpha$). Por eso la recta $x = 1$ se llama a menudo *línea de las tangentes*.

**Arco tangente de un número.** Surge con frecuencia el problema en el que se requiere hallar, para cualquier número real $k$, un ángulo $\alpha$ tal, que su tangente sea igual al número citado $k$.

Se puede mostrar que existe una infinidad de ángulos tales, que la tangente de cada uno de ellos es igual a $k$. Efectivamente, en

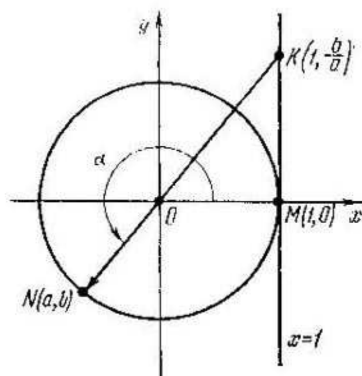


Fig. 87

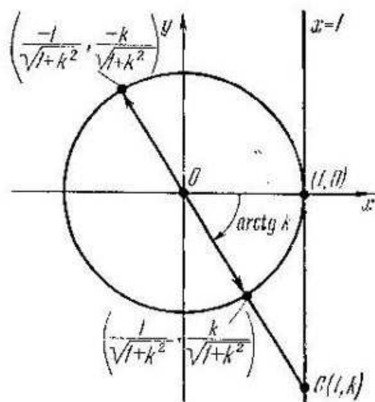


Fig. 88

la fig. 88 se ve que la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto $C$ (1; $k$), dispuesto en la línea de tangente, interseca la circunferencia unidad en dos puntos:
$\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ y $\left(\frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{-k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$. Pero, según lo indicado más arriba, para cada uno de estos puntos de la circunferencia unidad existe un ángulo $\alpha$ tal, que la tangente de dicho ángulo es igual a la razón de la ordenada de este punto a la abscisa del mismo, es decir, a $k$. Ahora, de acuerdo con la propiedad de la tangente tenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \pi l),$$

para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$, y para todo número entero $l$. Por eso, para todo número entero $l$ la tangente del ángulo $(\alpha + \pi l)$ es igual al número $k$. Se ha convenido en lo siguiente: el ángulo cuya tangente es igual al número $k$ y que pertenece al intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ recibe el nombre de *ángulo principal* y se designa arctg $k$ (se lee arco tangente del número $k$).

De este modo, por definición, arctg $k$ es un ángulo que satisface simultáneamente dos condiciones:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} k < \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} k) = k.$$

Es fácil ver que para cualquier número real $k$ existe el arco tangente de este número y es, además, único.

**Ejemplos.** 1. $\operatorname{arctg} 0$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{tg} \alpha = 0$. Está claro que éste es el ángulo nulo, por consiguiente, $\operatorname{arctg} 0 = 0$.

2. $\operatorname{arctg} 1$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{4}$, por consiguiente $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

3. $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{3}$. Por consiguiente $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$.

4. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{6}$. Por consiguiente, $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$.

5. $\operatorname{arctg}(-1)$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{tg} \alpha = -1$. Está claro que éste es el ángulo $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Por consiguiente, $\operatorname{arctg}(-1) = \left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Demos a concocer algunas propiedades del arco tangente de un número, que se deducen de su definición.

Para cualquier número real $k$ se verifica la siguiente desigualdad doble:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} k < \frac{\pi}{2}.$$

Para cualquier número real $k$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} k) = k.$$

Para cualquier ángulo $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha.$$

**Ejemplos.** 1. Calcúlese $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 10)$. Obtenemos $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 10) = 10$.

2. Calcúlese $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)$. Por cuanto $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

3. Calcúlese arctg (tg $3\pi$). Por cuanto $3\pi \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces no se puede escribir arctg (tg $3\pi$) $= 3\pi$. No obstante, tg $3\pi$ = = tg 0. Por consiguiente, arctg (tg $3\pi$) = arctg (tg 0) = 0.

4. Calcúlese arctg (tg 10). Por cuanto $10 \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces no se puede escribir arctg (tg 10) = 10. No obstante tg 10 = tg $(10-3\pi)$. Por cuanto $(10-3\pi) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, resulta arctg (tg 10) = arctg [tg $(10-3\pi)$] $= 10-3\pi$.

Por fin, indiquemos una propiedad más del arco tangente de un número: para cualquier número real $k$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{arctg}(-k) = -\operatorname{arctg} k.$$

En efecto, por definición,

arctg $k = \alpha$, con la particularidad de que $\operatorname{tg}\alpha = k$ y $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

arctg $(-k) = \beta$, con la particularidad de que $\operatorname{tg}\beta = -k$ y $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

de aquí es evidente que $\beta = -\alpha$, es decir,

$$\operatorname{arctg}(-k) = -\operatorname{arctg} k.$$

**Ejemplos.**

1. $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

2. $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

3. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

**Cotangente de un ángulo.** Sea dado un ángulo cualquiera $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$. Se denomina *cotangente* del ángulo $\alpha$ el número igual a la razón entre el coseno de este ángulo $\alpha$ y el seno del mismo y se designa ctg $\alpha$, es decir,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

De la definición se desprende que para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, la cotangente de dicho ángulo $\alpha$ existe y, además, es única.

**Ejemplos.**

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0, \quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0}{-1} = 0,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1,\qquad \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Demos a conocer algunas de las propiedades de la cotangente de un ángulo.

Para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, se verifica la igualdad

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Efectivamente, para todo ángulo de este género es válida la cadena de igualdades

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{\cos(-\alpha)}{\operatorname{sen}(-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha}=-\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Esta propiedad de la cotangente de un ángulo puede enunciarse así: para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, el signo menos puede sacarse del signo de la cotangente o introducirse bajo el mismo, es decir, si $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, entonces

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(-\alpha).$$

**Ejemplos.**

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=-1;\quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3},$$

Haciendo uso de las propiedades del seno y del coseno de un ángulo, se puede mostrar que para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, son válidas las igualdades

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha+\pi) = \operatorname{ctg}(\alpha-\pi).$$

En efecto, para cualquier ángulo de éste género son válidas las cadenas de igualdades

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\pi)=\frac{\cos(\alpha+\pi)}{\operatorname{sen}(\alpha+\pi)}=\frac{-\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)=\frac{\cos(\alpha-\pi)}{\operatorname{sen}(\alpha-\pi)}=\frac{-\cos\alpha}{-\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

**Ejemplos.** $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}=\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1,$

$$\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}+\pi\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1.$$

Aprovechando las igualdades

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha + \pi) = \operatorname{ctg} (\alpha - \pi)$$

y aplicando el método de inducción matemática, se puede mostrar que para todo número entero $n$ y todo ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, se verifican las igualdades

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha + n\pi) = \operatorname{ctg} (\alpha - n\pi).$$

Esta propiedad de la cotangente de un ángulo puede enunciarse así: la cotangente de cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \pi m, m \in Z$, se repite cuando el ángulo varía en la magnitud $\pi n$, donde $n$ es un número entero cualquiera.

**Ejemplos.**

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 2\pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + 11\pi\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3} - 13\pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2} + 15\pi\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Para cualquier ángulo $\alpha$, cuyos coseno y seno son de un mismo signo, la cotangente del ángulo $\alpha$ es positiva, es decir, ctg $\alpha$ es positiva para cualquier ángulo $\alpha$ prefijado por el radio unidad móvil cuyo extremo coincide con el punto de la circunferencia unidad dispuesto en los cuadrantes I ó III (es decir, para cualquier número $\alpha$ que interviene como medida radial del ángulo correspondiente $\alpha$, perteneciente, para cierto $l$ entero, al intervalo $\left(\pi l, \frac{\pi}{2} + \pi l\right)$.

En la recta numérica (véase la fig. 85) se muestran tales intervalos, que para cada número $\alpha$, perteneciente a cualquiera de ellos, ctg $\alpha$ es positiva.

Para cualquier ángulo $\alpha$, cuyos coseno y seno son de signos opuestos, la cotangente del ángulo $\alpha$ es negativa, es decir, ctg $\alpha$ es negativa para cualquier ángulo $\alpha$ prefijado por el radio unidad móvil cuyo extremo coincide con el punto de la circunferencia unidad dispuesto en los cuadrantes II o IV (es decir, para cualquier número $\alpha$ que interviene como medida radial del ángulo correspondiente $\alpha$, perteneciente, para cierto $k$ entero, al intervalo $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + \pi k\right)$).

En la recta numérica (fig. 86) se muestran tales intervalos, que para cada número $\alpha$, perteneciente a cualquiera de ellos, ctg $\alpha$ es negativa.

Para cualquier ángulo $\alpha$, cuyo coseno es igual a cero, la cotangente del ángulo $\alpha$ es también nula, es decir, $\operatorname{ctg} \alpha = 0$ para todo ángulo $\alpha$ prefijado por el radio unidad móvil cuyo extremo coincide o bien con el punto $T$ (0; 1), o bien con el punto $L$ (0; —1) $\Big($es decir, para todo número $\alpha$ que interviene como medida radial del ángulo correspondiente $\alpha$ igual, para cierto número $n$ entero, al número $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\Big)$.

En la recta numérica (fig. 82) se indican los números $\alpha$, para cada uno de los cuales ctg $\alpha$ es igual a cero.

La definición de cotangente de un ángulo, aducida más arriba, puede enunciarse con otras palabras del modo siguiente:

sea dado un ángulo $\alpha$ cualquiera (fig. 89) tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, y supongamos que el extremo del radio unidad móvil, que prefija este ángulo, es el punto $N$ $(a, b)$ (con la particularidad de que $b \neq 0$, a consecuencia de que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$); se denomina cotangente del ángulo $\alpha$ un número igual a la razón de la abscisa del punto $N$ a la ordenada del mismo punto $N$, es decir, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b}$.

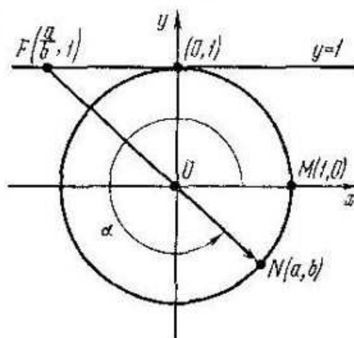



Fig. 89

Es fácil ver (fig. 89) que la recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto $N$ $(a, b)$ interseca la recta $y = 1$ en el punto $F\left(\frac{a}{b}, 1\right)$. Con otras palabras, la recta que pasa por el origen de coordenadas y el extremo del radio unidad móvil, que prefija el ángulo $\alpha$ ($\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$), interseca la recta $y = 1$ en el punto $F$ (ctg $\alpha$, 1). Por eso, la recta $y = 1$ se denomina a menudo línea de cotangentes.

**Arco cotangente de un número.** Surge frecuentemente el problema en el que se requiere hallar, para cualquier número real $d$, un ángulo $\alpha$ tal, que la cotangente de él es igual al número $d$. Se puede mostrar que existe una infinidad de ángulos tales que la cotangente de cada uno de ellos es igual al número $d$.

Efectivamente, es fácil ver (fig. 90) que una recta que pasa por el origen de coordenadas y el punto $D$ $(d; 1)$ dispuesto en la línea de cotangentes interseca la circunferencia unidad en dos puntos: $\left(\frac{d}{\sqrt{1+d^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+d^3}}\right)$, $\left(\frac{-a}{\sqrt{1+d^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+d^2}}\right)$. Pero según lo indi-

cado más arriba, para cada punto de esta índole existe un ángulo tal que la cotangente de él es igual a la razón de la abscisa de dicho punto a su ordenada, es decir, igual a $d$. Luego, de acuerdo con la propiedad de la cotangente,

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} (\alpha + \pi n)$$

para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \pi m$, $m \in Z$, y para cada número entero $n$. Por eso, para cualquier número entero $n$ la cotangente del ángulo $(\alpha + \pi n)$ es igual al número $d$.

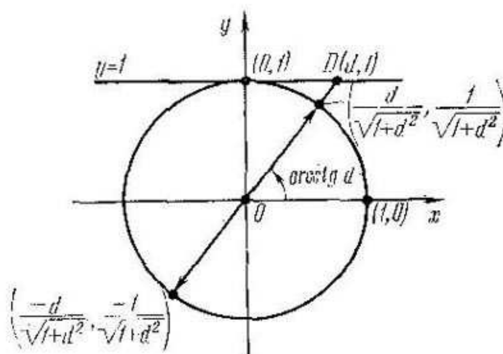


Fig. 90

Se ha convenido en lo siguiente: un ángulo cuya cotangente es igual al número $d$ y que pertenece al intervalo $(0, \pi)$ recibe el nombre de *ángulo principal* y se designa arcctg $d$ (se lee: arco cotangente del número $d$).

De este modo, arcctg $d$ es, por definición, un ángulo que satisface simultáneamente dos condiciones

$$0 < \operatorname{arcctg} d < \pi, \quad \operatorname{ctg} (\operatorname{arcctg} d) = d.$$

Es fácil ver que para todo número real $d$ el arco cotangente de dicho número existe y es, además, único.

**Ejemplos** 1. $\operatorname{arcctg} 0$ es un ángulo $\alpha$ tal que $0 < \alpha < \pi$ y $\operatorname{ctg} \alpha = 0$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{2}$, por consiguiente. $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$.

2. $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $0 < \alpha < \pi$ y $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$ Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{6}$. Por consiguiente, $\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$.

3. arcctg 1 es un ángulo $\alpha$ tal, que $0<\alpha<\pi$ y $\operatorname{ctg}\alpha=1$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{4}$. Por consiguiente, arcctg $1=$ $=\frac{\pi}{4}$.

4. $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $0<\alpha<\pi$ y $\operatorname{ctg}\alpha=$ $=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Está claro que éste es el ángulo $\frac{\pi}{3}$. Por consiguiente, $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$.

5. arctg $(-1)$ es un ángulo $\alpha$ tal, que $0<\alpha<\pi$ y $\operatorname{ctg}\alpha=$ $=(-1)$. Está claro que éste es el ángulo$\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Por consiguiente, $\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$.

Demos a conocer algunas de las propiedades del arco cotangente de un número que se desprenden de su definición.

Para cualquier número real $d$ se verifica la desigualdad doble

$$0<\operatorname{arcctg} d<\pi.$$

Para cualquier número real $d$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} d)=d.$$

Para todo ángulo $\alpha\in(0,\ \pi)$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha)=\alpha.$$

**Ejemplos.** 1. Calcúlese ctg (arcctg 10). Obtenemos

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 10)=10.$$

2. Calcúlese $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)$. Por cuanto $\frac{\pi}{3}\in(0,\ \pi)$, se tiene $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$.

3. Calcúlese $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$. Por cuanto $\left(-\frac{\pi}{3}\right)\notin(0,\ \pi)$, no se puede escribir $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\frac{\pi}{3}$. No obstante, es fácil ver que $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}+\pi\right)=\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}\in(0,\ \pi)$. Por consiguiente, $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$.

Indiquemos, por fin, una propiedad más del arco cotangente de un número: para cualquier número real $d$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{arcctg}(-d)=\pi-\operatorname{arcctg} d.$$

Efectivamente, por definición, tenemos

$\operatorname{arcctg} d = \alpha$, con la particularidad de que $\operatorname{ctg} \alpha = d$ y $\alpha \in (0, \pi)$,
$\operatorname{arcctg} (-d) = \beta$, con la particularidad de que $\operatorname{ctg} \beta = -d$
y $\beta \in (0, \pi)$.

De aquí se deduce que $\beta = \pi - \alpha$, es decir,

$$\operatorname{arcctg} (-d) = \pi - \operatorname{arcctg} d.$$

**Ejemplos.** 1. $\operatorname{arcctg} (-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

2. $\operatorname{arcctg} (-\sqrt{3}) = \pi - \operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

3. $\operatorname{arcctg} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

## § 4. Identidad trigonométrica fundamental

**Teorema.** *Para cualquier ángulo $\alpha$ se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \qquad (1)$$

*que se denomina identidad trigonométrica fundamental.*

Este teorema puede enunciarse así: *el cuadrado del seno de cualquier ángulo más el cuadrado del coseno del mismo ángulo es igual a la unidad.*

**Demostración.** Sea dado cierto ángulo $\alpha$. Entonces las coordenadas del extremo del radio unidad móvil que prefija el ángulo $\alpha$ serán ($\cos \alpha$, $\operatorname{sen} \alpha$) (fig. 91). Por cuanto el cuadrado de la distancia entre dos puntos cualesquiera de un plano prefijados por sus coordenadas es igual a la suma de los cuadrados de la diferencia entre las coordenadas ohmónimas, entonces para los puntos ($\cos \alpha$, $\operatorname{sen} \alpha$) y (0, 0) tenemos

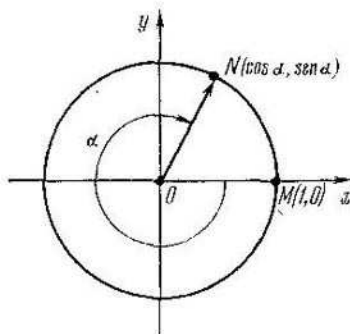


Fig. 91

$$(\cos \alpha - 0)^2 + (\operatorname{sen} \alpha - 0)^2 = 1^2,$$

o bien

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

y el teorema queda demostrado.

La identidad trigonométrica fundamental muestra en qué dependencia se encuentran el seno y el coseno de un mismo ángulo. Conociendo una de las magnitudes que figuran en la identidad trigonométrica fundamental para cierto ángulo $\alpha$, se puede hallar la otra magnitud del mismo ángulo $\alpha$. En efecto, la identidad trigonométrica fundamental es equivalente a la igualdad $\cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$,

la cual es equivalente, a su vez, a la siguiente:

$$|\cos\alpha| = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}. \qquad (2)$$

De la igualdad (2) tenemos

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \qquad (2a)$$

para cualquier ángulo $\alpha$ con el que $\cos\alpha$ es no negativo (es decir, para cualquier $\alpha$ perteneciente, con cierto $k \in Z$, al intervalo $\left[2\pi k - \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$).

$$\operatorname{coc}\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \qquad (2b)$$

para cualquier ángulo $\alpha$ con el que $\cos\alpha$ es no positivo (es decir, para cualquier $\alpha$, perteneciente, con cierto $k \in Z$, al intervalo $\left[2\pi k + \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$].

Luego, la identidad trigonométrica fundamental es equivalente a la igualdad

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,$$

la cual es equivalente a la siguiente:

$$|\operatorname{sen}\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha}. \qquad (3)$$

De la igualdad (3) tenemos

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad (3a)$$

para cualquier ángulo $\alpha$ con el que $\operatorname{sen}\alpha$ es no negativo (es decir, para cualquier $\alpha$ perteneciente, con cierto $m \in Z$, al intervalo $[2\pi m;\ \pi + 2\pi m]$).

$$\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad (3b)$$

para cualquier ángulo $\alpha$ con el que $\operatorname{sen}\alpha$ es no positivo (es decir, para cualquier $\alpha$ perteneciente, con cierto $m \in Z$, al intervalo $[\pi + 2\pi m;\ 2\pi + 2\pi m]$).

**Observación.** Para los valores de frontera del ángulo $\alpha$ (es decir, cuando $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, donde $k \in Z$) las fórmulas (2a) y (2b) dan un mismo valor de $\cos\alpha = 0$; las fórmulas (3a) y (3b) dan en las mismas condiciones (cuando $\alpha = \pi m$, donde $m \in Z$) un mismo valor de $\operatorname{sen}\alpha = 0$.

**Ejemplos.** 1. Calcúlese $\operatorname{sen}\alpha$, si $\cos\alpha = -\frac{9}{11}$ y $\alpha \in \left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Para cualquier ángulo $\alpha$ del intervalo citado $\operatorname{sen}\alpha$ es negativo, y por esta razón $\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{9}{11}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{10}}{11}$.

2. Calcúlese $\cos\alpha$, si $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{3}$ y $\alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2}\right)$.

Para cualquier ángulo $\alpha$ del intervalo citado $\cos\alpha$ es negativo,

y por esta razón $\cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

**Corolario 1**. *Para cualquier ángulo* $\alpha$ *tal que* $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \tag{4}$$

**Demostración.** Por cuanto $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, entonces $\cos\alpha \neq 0$, y por esta razón la identidad trigonométrica fundamental (1) puede dividirse término a término por $\cos^2\alpha$. En este caso para cualquier $\alpha$ tenemos

$$\frac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$
$$\Updownarrow$$
$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

La igualdad (4) está demostrada.

La igualdad (4) muestra en qué dependencia se encuentran la tangente y el coseno de un mismo ángulo $\alpha\ \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z\right)$. Si se conoce una de las magnitudes que figuran en la igualdad (4), se puede hallar, para cierto ángulo $\alpha$ de esta índole, la otra magnitud del mismo ángulo. Efectivamente, por cuanto $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, la igualdad (4) es equivalente a la igualdad $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, la cual es equivalente a su vez a la siguiente:

$$|\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}. \tag{5}$$

De la igualdad (5) tenemos

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \tag{5a}$$

para cualquier ángulo $\alpha$ con el que $\cos\alpha$ es positivo $\left(\text{es decir, para cualquier } \alpha \text{ perteneciente, con cierto } k \in Z, \text{ al intervalo } \left(2\pi k - \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)$.

$$\cos\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \tag{5b}$$

para cualquier ángulo $\alpha$ con el que $\cos\alpha$ es negativo $\left(\text{es decir, para cualquier } \alpha \text{ perteneciente, con cierto } k \in Z, \text{ al intervalo } \left(2\pi k + \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)\right)$.

Luego, la igualdad (4) es equivalente a la igualdad $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$, la cual es equivalente a la siguiente

$$|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{|\cos\alpha|}. \qquad (6)$$

De la igualdad (6) tenemos

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \qquad (6a)$$

para cualquier ángulo $\alpha$ con el que tg $\alpha$ y cos $\alpha$ son de un mismo signo (es decir, para cualquier $\alpha$, perteneciente, con cierto $m \in Z$, al conjunto

$$\left[2\pi m, \frac{\pi}{2}+2\pi m\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi m; \pi+2\pi m\right]\Big).$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \qquad (6b)$$

para cualquier ángulo $\alpha$ con el que tg $\alpha$ y cos $\alpha$ son de signos opuestos (es decir, para cualquier $\alpha$, perteneciente, con cierto $m \in Z$, al conjunto

$$\left[2\pi m-\pi; -\frac{\pi}{2}+2\pi m\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi m, 2\pi m\right]\Big).$$

**Observación.** Para los valores de frontera del ángulo $\alpha$ (es decir, cuando $\alpha = \pi m$, donde $m \in Z$), las fórmulas (6a) y (6b) dan el mismo valor de $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

**Ejemplos.** 1. Calcúlese $\operatorname{tg}\alpha$, si $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ y $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Para cualquier ángulo $\alpha$ del intervalo citado $\operatorname{tg}\alpha$ es positivo, mientras que $\cos\alpha$ es negativo, razón por la cual $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = 2$.

2. Calcúlese $\cos\alpha$, si $\operatorname{tg}\alpha = -3$ y $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}: 0\right)$.

Para cualquier ángulo $\alpha$ del intervalo citado $\cos\alpha$ es positivo y por eso $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

**Corolario 2.** *Para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, se verifica la igualdad*

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \qquad (7)$$

**Demostración.** Por cuanto $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, entonces $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$, y, por eso, la identidad trigonométrica fundamental (1) puede dividirse término a término por $\operatorname{sen}^2\alpha$. En este caso, para todo $\alpha$ de esta

índole tenemos

$$\frac{\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha},$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha},$$

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}.$$

La igualdad (7) está demostrada.

La igualdad (7) muestra en qué dependencia se encuentran la cotangente y el seno de un mismo ángulo $\alpha$ ($\alpha\neq\pi k,\ k\in Z$). Al conocer una de las magnitudes que figuran en la igualdad (7), para cierto ángulo $\alpha$, se puede hallar la otra magnitud del mismo ángulo $\alpha$. En efecto, puesto que $\alpha\neq\pi k,\ k\in Z$, entonces la igualdad (7) es equivalente a la igualdad

$$\operatorname{sen}^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha},$$

la cual es equivalente, a su vez, a la siguiente:

$$|\operatorname{sen}\alpha|=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}. \qquad (8)$$

De la igualdad (8) tenemos

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} \qquad (8a)$$

para cualquier ángulo $\alpha$ con el que sen $\alpha$ es positivo (es decir, para cualquier $\alpha$ perteneciente, con cierto $n\in Z$, al intervalo $(2\pi n;\ \pi+2\pi n)$).

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} \qquad (8b)$$

para cualquier ángulo $\alpha$ con el que sen $\alpha$ es negativo (es decir, para cualquier $\alpha$ perteneciente, con cierto $n\in Z$, al intervalo $(\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$).

Luego, por cuanto $\alpha\neq\pi k,\ k\in Z$, entonces la igualdad (7) es equivalente a la igualdad

$$\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha},$$

la cual es equivalente, a su vez, a la siguiente

$$|\operatorname{ctg}\alpha|=\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{|\operatorname{sen}\alpha|}. \qquad (9)$$

De la igualdad (9) tenemos

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha} \quad (9a)$$

para cualquier ángulo $\alpha$ con el que ctg $\alpha$ y sen $\alpha$ son de un mismo signo (es decir, para cualquier $\alpha$ perteneciente, con cierto $k \in Z$, al conjunto

$$\left[2\pi k-\frac{\pi}{2};\ 2\pi k\right) \cup \left(2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]\right).$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha} \quad (9b)$$

para cualquier ángulo $\alpha$ con el que ctg $\alpha$ y sen $\alpha$ son de signos diferentes (es decir, para cualquier $\alpha$ perteneciente, con cierto $k \in Z$, al conjunto

$$\left[2\pi k+\frac{\pi}{2};\ 2\pi k+\pi\right) \cup \left(\pi+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]\right).$$

**Observación.** Para los valores de frontera del ángulo $\alpha$ (es decir, cuando $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$) las fórmulas (9a) y (9b) dan el mismo valor de ctg $\alpha = 0$.

**Ejemplos. 1.** Calcúlese ctg $\alpha$, si sen $\alpha = -\frac{24}{25}$ y $\alpha \in \left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$.

Para todo ángulo $\alpha$ del intervalo citado ctg $\alpha$ es positivo, mientras que sen $\alpha$ es negativo, por lo cual

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{7}{24}.$$

2. Calcúlese sen $\alpha$, si ctg $\alpha = 4$ y $\alpha \in \left(\pi,\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Para todo ángulo $\alpha$ del intervalo citado sen $\alpha$ es negativo, por lo cual

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{-\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=-\frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Las definiciones de tangente y cotangente de un mismo ángulo predeterminan la validez de la siguiente **afirmación**:

*para cualquier ángulo* $\alpha$ *tal que* $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, *se verifican las igualdades*

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad (10)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \quad (11)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \quad (12)$$

Las igualdades (11) y (12) muestran en qué dependencia se encuentran la tangente y la cotangente de un mismo ángulo $\alpha$ $\left(\alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ n \in Z\right)$. Si se conoce una de las magnitudes que figuran en las igualdades (11) y (12), para cierto ángulo $\alpha$, se puede hallar la otra magnitud del mismo ángulo $\alpha$.

**Ejemplos.** 1. Calcúlense cos $\alpha$, tg $\alpha$ y ctg $\alpha$, si sen $\alpha = -\frac{3}{5}$ y $\alpha \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Para cualquier ángulo $\alpha$ del intervalo citado cos $\alpha$ es negativo y por esta razón

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\frac{4}{5}.$$

Por cuanto cos $\alpha \neq 0$, entonces

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}.$$

Análogamente, por cuanto sen $\alpha \neq 0$, entonces

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{4}{3}.$$

2. Calcúlense cos $\alpha$, sen $\alpha$ y tg $\alpha$, si ctg $\alpha = -7$ y $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Por cuanto ctg $\alpha \neq 0$, entonces $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = -\frac{1}{7}$.

Para cualquier ángulo $\alpha$ del intervalo citado sen $\alpha$ es positivo, mientras que cos $\alpha$ es negativo, por consiguiente,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{10}, \quad \cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

## § 5. Fórmulas de adición

Sean dados un ángulo $\alpha$ y otro ángulo $\beta$, es decir, supongamos que están dados un número $\alpha$, que representa la medida radial del ángulo $\alpha$, y otro número $\beta$ que representa la medida radial del ángulo $\beta$. Entonces, por ángulo $(\alpha - \beta)$ se entiende un ángulo cuya medida radial es el número $(\alpha - \beta)$; el ángulo $(\alpha - \beta)$ recibe el nombre de *diferencia* de dos ángulos dados. Por ángulo $(\alpha + \beta)$ se entiende un ángulo cuya medida radial es el número $(\alpha + \beta)$; el ángulo $(\alpha + \beta)$ se denomina *suma* de dos ángulos dados.

### Coseno de la diferencia y coseno de la suma

**Teorema.** *Para cualesquiera ángulos $\alpha$ y $\beta$ se verifica la igualdad*

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta, \tag{1}$$

*que lleva el nombre de fórmula del coseno de la diferencia de dos ángulos.*

Este teorema puede enunciarse del modo siguiente: *el coseno de la diferencia entre dos ángulos cualesquiera es igual al producto del coseno del primer ángulo por el coseno del segundo ángulo más el producto del seno del primer ángulo por el seno del segundo ángulo.*

**Demostración.** Sean dados en un plano el sistema rectangular de coordenadas $xOy$ y una circunferencia unidad. Convengamos en

considerar que el radio unidad inmóvil $OM$ de dicha circunferencia (donde $M$ (1, 0)) es el punto de referencia.

Supongamos que el ángulo $\alpha$ se prefija mediante el radio unidad móvil cuyo extremo coincide con el punto $N$ (cos $\alpha$, sen $\alpha$) de la circunferencia unidad, y el ángulo $\beta$, mediante el radio unidad móvil cuyo extremo coincide con el punto $P$ (cos $\beta$, sen $\beta$) de la circunferencia unidad.

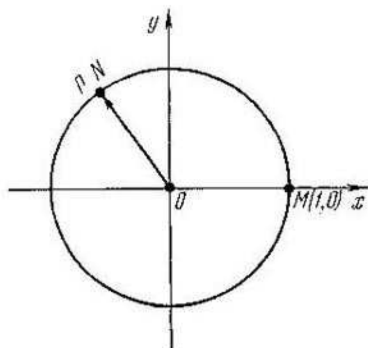



Fig. 92

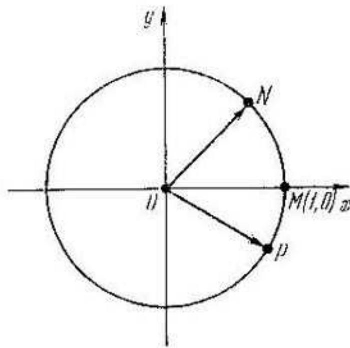



Fig. 93

Son posibles dos casos de disposición relativa de los puntos $N$ y $P$: éstos o bien coinciden (fig. 92) o bien no coinciden (fig. 93).

Demostremos el teorema separadamente para cada uno de los casos aducidos.

1. Supongamos que los puntos $N$ y $P$ coinciden. En este caso los ángulos $\alpha$ y $\beta$ son de tal índole que $\alpha = \beta + 2\pi k$, es decir, $(\alpha - \beta) = 2\pi k$ para cierto número entero fijo $k$, y la igualdad (1) puede ser escrita en la forma

$$\cos 2\pi k = \cos \beta \cos (\beta + 2\pi k) + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} (\beta + 2\pi k)$$

o, por cuanto

$$\cos 2\pi k = 1$$

$$\cos (\beta + 2\pi k) = \cos \beta,$$

$$\operatorname{sen} (\beta + 2\pi k) = \operatorname{sen} \beta,$$

en la forma

$$1 = \cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta,$$

es decir, en el caso que se considera la igualdad (1) es una forma equivalente de la notación para la identidad trigonométrica fundamental, por consiguiente, la igualdad (1) es válida.

2. Supongamos que $\alpha$ y $\beta$ son tales que $\alpha \neq \beta + 2\pi k$, cualquiera que sea el número entero $k$. Cualculemos la longitud del segmento $PN$, empleando con este fin dos procedimientos.

En el sistema de coordenadas dado las coordenadas de los puntos $N$ y $P$ son conocidas, por lo cual, de acuerdo con el teorema sobre la longitud de un segmento cuyos extremos están bien definidos por las coordenadas prefijadas, tenemos

$$d_{NP}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2. \tag{2}$$

Introduzcamos ahora otro sistema rectangular de coordenadas $x'Oy'$ de tal modo que la unidad de escala coincida con la unidad de longitud elegida anteriormente; el semieje positivo de abscisas $(Ox')$ sería en este caso la prolongación del radio $OP$, el semieje positivo de ordenadas $(Oy')$ formaría con el semieje positivo de abscisas $(Ox')$ el ángulo positivo $\frac{\pi}{2}$ (fig. 94).

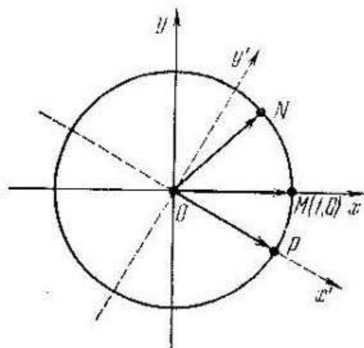


Fig. 94

En el nuevo sistema de coordenadas el punto $P$ tendrá las coordenadas $P$ (1, 0). El radio $OP$ se toma ahora por el radio unidad inmóvil, es decir, por el nuevo punto de referencia para medir los ángulos. El sistema de coordenadas $x'Oy'$ se introduce de tal modo que el nuevo punto de referencia para medir los ángulos (el radio unidad inmóvil $OP$) sea desplazado a un ángulo $\beta$ con relación al punto de referencia anterior (el radio unidad inmóvil $OM$). Entonces, el radio unidad móvil $ON$ prefijará (con relación al nuevo punto de referencia para medir los ángulos, un ángulo $(\alpha - \beta)$ y en el sistema de coordenadas $x'Oy'$ las coordenadas del punto $N$ serán $N(\cos(\alpha - \beta), \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$. De acuerdo con el teorema sobre la longitud de un segmento cuyos extremos están bien definidos por las coordenadas prefijadas (§ 3, cap. III) tendremos

$$d_{NP}'^2 = [1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + [0 - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]^2. \tag{3}$$

Por cuanto el cuadrado de la distancia entre dos puntos fijos de un plano, determinado en dos diferentes sistemas rectangulares de coordenadas con una misma unidad de longitud, es un mismo número, entonces $d_{NP}'^2 = d_{NP}^2$.

Empleando la propiedad de transitividad de las igualdades, tendremos, a partir de las igualdades (2) y (3):

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2 = [1 - \cos(\alpha - \beta)]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha - \beta)]^2.$$

Suprimiendo los paréntesis y agrupando, obtenemos

$$(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) + (\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) - 2(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) = 1 + [\cos^2(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta)] - 2\cos(\alpha - \beta).$$

Aplicando tres veces consecutivas la identidad trigonométrica fundamental, escribamos esta igualdad en la forma

$$2 - 2\,[\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta] = 2 - 2\cos(\alpha - \beta).$$

De aquí proviene la validez del teorema en el segundo caso. El teorema está demostrado.

**Ejemplo.** Calcúlese $\cos\frac{\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, entonces

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}.$$

Por consiguiente, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

Demos a conocer algunos corolarios del teorema demostrado.

**Corolario 1.** *Para cualesquiera ángulos $\alpha$ y $\beta$ se verifica la igualdad*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

*la cual se denomina fórmula del coseno de la suma de dos ángulos.*

Este corolario puede enunciarse del modo siguiente: *el coseno de la suma de dos ángulos es igual al producto del coseno del primer ángulo por el coseno del segundo ángulo menos el producto del seno del primer ángulo por el seno del segundo ángulo.*

**Demostración.** Representemos $(\alpha + \beta)$ en la forma $[\alpha - (-\beta)]$ y apliquemos el teorema. A continuación, aprovechando el hecho de que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ y $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ para cualquier ángulo $\alpha$, tenemos

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) +$$
$$+ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

lo que se trataba de demostrar.

**Ejemplos.** 1. Calcúlese $\cos\frac{5\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$, resulta

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Así pues, $\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

2. Calcúlese $\cos\frac{7\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, resulta

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\,(1-\sqrt{3})}{4}$$

Así pues, $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}\,(1-\sqrt{3})}{4}$.

**Fórmulas para los ángulos complementarios.** Dos ángulos $\alpha$ y $\beta$, cuya suma es igual a $\frac{\pi}{2}$, es decir, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, se denominan *complementarios uno de otro*. Por ejemplo, el ángulo $\alpha$ es complementario del ángulo $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ y viceversa.

**Corolario** 2. *Para cualquier ángulo $\alpha$ se verifican las igualdades*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha,\quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,$$

*que se llaman fórmulas para los ángulos complementarios.*

En efecto, al aplicar la igualdad (1), tenemos $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$ $=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\alpha=0\cdot\cos\alpha+1\cdot\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\alpha$, es decir, queda demostrada la validez de la primera fórmula.

Al designar $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\beta$, obtenemos de la primera fórmula ya demostrada que $\operatorname{sen}\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$. Por cuanto $\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\alpha$, entonces

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha.$$

El corolario 2 puede enunciarse del modo siguiente:

— *el seno de cualquier ángulo es igual al coseno del ángulo complementario,*

— *el coseno de cualquier ángulo es igual al seno del ángulo complementario.*

**Ejemplo.** Calcúlese $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$, entonces $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=$ $=\cos\frac{\pi}{12}$. El valor de $\cos\frac{\pi}{12}$ se ha hallado más arriba y es igual a $\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}$. Por consiguiente, $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3})}{4}$.

**Corolario 3.** a) *Para cualquier ángulo* $\alpha$ *tal que* $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$$

b) *Para cualquier ángulo* $\alpha$ *tal que* $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi m$, $m \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$$

Las igualdades aducidas se denominan también *fórmulas para los ángulos complementarios.* La validez de estas fórmulas se predetermina por las definiciones de tangente y cotangente y por el corolario 2.

**Ejemplo.** Calcúlese $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$. Por cuanto $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}$, entonces $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}=\dfrac{\cos\frac{5\pi}{12}}{\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}}$. Los valores de $\cos\frac{5\pi}{12}$ y de $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$ fueron hallados anteriormente y son iguales a $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ y a $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$, respectivamente. Por consiguiente, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ ó $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

### Seno de la suma y seno de la diferencia

**Corolario 4.** *Para cualesquiera ángulos* $\alpha$ y $\beta$ *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

*la cual se llama fórmula del seno de la suma de dos ángulos.*

Este corolario puede enunciarse del modo siguiente: *el seno de la suma de dos ángulos cualesquiera es igual al producto del seno del primer ángulo por el coseno del segundo más el producto del coseno del primer ángulo por el seno del segundo.*

**Demostración.** Haciendo uso del corolario 2, luego de la igualdad (1) y, una vez más, del corolario 2, tenemos $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=$ $=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+$ $+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$, la que se trataba de demostrar

**Ejemplos 1.** Calcúlese $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}.$$

Así pues, $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

2. Calcúlese $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$. Por cuanto $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Así pues, $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.

**Corolario 5.** *Para cualesquiera ángulos $\alpha$ y $\beta$ se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

*la cual se llama fórmula del seno de una diferencia de dos ángulos.*

Este corolario puede enunciarse del modo siguiente: *el seno de la diferencia entre dos ángulos es igual al producto del seno del primer ángulo por el coseno del segundo ángulo menos el producto del coseno del primer ángulo por el seno del segundo ángulo.*

**Demostración.** Representemos $(\alpha-\beta)$ en la forma $[\alpha+(-\beta)]$ y apliquemos el corolario 4. Luego, aprovechando el hecho de que $\cos(-\beta)=\cos\beta$ y $\operatorname{sen}(-\beta)=-\operatorname{sen}\beta$, cualquiera que sea $\beta$, tendremos

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}[\alpha+(-\beta)]=\operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta)+$$
$$+\cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

lo que se trataba de demostrar.

**Ejemplo.** Calcúlese $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}.$$

Así pues, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$.

## Tangente de una suma y tangente de una diferencia

**Corolario 6.** *Para cualesquiera ángulos $\alpha$ y $\beta$ tales que*

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,\ y\ \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m,$$

*$m \in Z$, se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

*la cual se llama fórmula de la tangente de la suma de dos ángulos.*

**Demostración.** Para cualesquiera dos ángulos del tipo mencionado resulta válida la cadena de igualdades

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

la cual demuestra precisamente el corolario 6.

**Ejemplos.** 1. Calcúlese $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, entonces

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2 + \sqrt{3}.$$

Así pues, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$.

2. Calcúlese $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$. Tenemos

$$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = -(2+\sqrt{3}).$$

Así pues, $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12} = -(2+\sqrt{3})$.

**Corolario 7.** *Para cualesquiera dos ángulos* $\alpha$ *y* $\beta$ *tales que* $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in Z,\ \beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in Z,\ y\, \alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi m,\ m \in Z,$ *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

*la cual se llama fórmula de la tangente de una diferencia entre dos ángulos.*

**Demostración.** Para cualesquiera dos ángulos del tipo mencionado resulta válida la cadena de igualdades

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}[\alpha+(-\beta)]=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

la cual demuestra precisamente el corolario 7.

**Ejemplo.** Calcúlese $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, entonces

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}.$$

Así pues, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

## Cotangente de una suma y cotangente de una diferencia

**Corolario 8.** *Para cualesquiera ángulos* $\alpha$ *y* $\beta$ *tales que* $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, $\beta \neq \pi n$, $n \in Z$, *y* $(\alpha+\beta) \neq \pi m$, $m \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha},$$

*la cual se llama fórmula de la cotangente de una suma de dos ángulos.*

**Corolario 9.** *Para cualesquiera dos ángulos* $\alpha$ *y* $\beta$ *tales que* $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, $\beta \neq \pi n$, $n \in Z$, *y* $(\alpha-\beta) \neq \pi m$, $m \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha},$$

*la cual se llama fórmula de la cotangente de una diferencia entre dos ángulos.*

La demostración de estos corolarios es análoga a la que se emplea para los corolarios 6 y 7, razón por la cual aquí se omite.

**Ejemplos.** Calcúlese $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$, entonces

$$\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}-1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{1\cdot\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=2-\sqrt{3}.$$

Así pues, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

2. Calcúlese $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$.

Por cuanto $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, entonces

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=2+\sqrt{3}.$$

Así pues, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}=2+\sqrt{3}$.

## Fórmulas para calcular productos

**Corolario 10.** *Para cualesquiera dos ángulos $\alpha$ y $\beta$ se verifica la igualdad*

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

*la cual se llama fórmula para calcular el producto de cosenos.*

El corolario 10 puede enunciarse del modo siguiente: *el producto del coseno de cualquier ángulo $\alpha$ por el coseno de cualquier ángulo $\beta$ es igual a la semisuma del coseno de la diferencia entre estos ángulos con el coseno de la suma de los mismos.*

**Corolario 11.** *Para cualesquiera dos ángulos $\alpha$ y $\beta$ se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},$$

*la cual se llama fórmula para calcular el producto de los senos.*

El corolario 11 puede enunciarse del modo siguiente: *el producto del seno de cualquier ángulo $\alpha$ por el seno de cualquier ángulo $\beta$ es igual a la semidiferencia entre el coseno de la diferencia de estos ángulos y el coseno de la suma de los mismos.*

**Demostración.** Se ha mostrado más arriba que para cualesquiera ángulos $\alpha$ y $\beta$ se verifican las siguientes igualdades:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

Al sumar y restar estas igualdades, obtenemos las fórmulas para calcular los productos de cosenos y los de senos:

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2}, \qquad (4)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}, \qquad (5)$$

**Observación.** En virtud de que $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ para cualquier ángulo $\alpha$, al determinar el coseno de la diferencia entre dos ángulos, podemos tomar en las fórmulas (4) y (5) tanto el coseno del ángulo $(\alpha - \beta)$ como el del ángulo $(\beta - \alpha)$.

**Ejemplos.** 1. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right) =$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\cos\alpha + \frac{1}{2}}{2} = \frac{2\cos\alpha + 1}{4}.$$

2. $2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta - \frac{\pi}{4} - \beta\right) -$

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta + \frac{\pi}{4} + \beta\right) = \cos(-2\beta) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\beta.$$

3. $\cos 4 \cos 3 = \frac{\cos(4-3) + \cos(4+3)}{2} = \frac{\cos 1 + \cos 7}{2}.$

4. $\frac{4 \operatorname{sen} 7 \operatorname{sen} 8}{5} = \frac{4[\cos(7-8) - \cos(7+8)]}{5 \cdot 2} = \frac{2[\cos 1 - \cos 15]}{2}.$

**Corolario 12.** *Para cualesquiera ángulos $\alpha$ y $\beta$ se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2},$$

*la cual se llama fórmula para calcular el producto del seno de un ángulo por el coseno de otro ángulo.*

El corolario 12 puede enunciarse del modo siguiente: *el producto del seno de cualquier ángulo $\alpha$ por el coseno de cualquier ángulo $\beta$ es igual a la semisuma del seno de la suma de los ángulos $\alpha$ y $\beta$ con el seno de la diferencia entre los ángulos $\alpha$ y $\beta$, con la particularidad de que la diferencia se toma de tal modo que del ángulo que se encuentra bajo el signo del seno se resta el ángulo que se encuentra bajo el signo del coseno.*

**Demostración.** Hemos mostrado anteriormente que para cualesquiera ángulos $\alpha$ y $\beta$ resultan válidas las siguientes igualdades:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Al sumar estas igualdades, obtenemos la fórmula para calcular el producto del seno de un ángulo por el coseno de otro ángulo:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2} \qquad (6)$$

**Ejemplos.** Calcúlese $4\operatorname{sen}\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)$.

Aplicando la fórmula (6), tenemos

$$4\operatorname{sen}\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)=2\left[\operatorname{sen}\left(1+\frac{\pi}{6}+1+\frac{\pi}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sen}\left(1+\frac{\pi}{6}-1-\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\left[\operatorname{sen}\left(2+\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-(-2)\right)-\frac{1}{2}\right]=2\cos(-2)-1=2\cos 2-1.$$

Así pues, $4\operatorname{sen}\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos 2-1$.

2. Calcúlese $2\cos\frac{5\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

Aplicando la fórmula (6), tenemos

$$2\cos\frac{5\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\left[\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right]=$$

$$=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Así pues, $2\cos\frac{5\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

3. $\frac{3\operatorname{sen}4\cos 5}{7}=\frac{3[\operatorname{sen}(4+5)+\operatorname{sen}(4-5)]}{7\cdot 2}=\frac{3(\operatorname{sen}9-\operatorname{sen}1)}{14}$

## Fórmulas para la suma y la diferencia de los senos y cosenos

**Corolario 13.** *Para cualesquiera dos ángulos $\alpha$ y $\beta$ se verifica la igualdad*

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

*que se llama fórmula de la suma de cosenos.*

El corolario 13 puede enunciarse del modo siguiente: *la suma de los cosenos de dos ángulos cualesquiera es igual al producto duplicado del coseno de la semisuma de dichos ángulos por el coseno de la semidiferencia de los mismos.*

**Corolario 14.** *Para cualesquiera dos ángulos* $\alpha$ *y* $\beta$ *se verifica la igualdad*

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\beta-\alpha}{2},$$

*la cual se llama fórmula de la diferencia de cosenos.*

El corolario 14 puede enunciarse del modo siguiente: *la diferencia entre los cosenos de dos ángulos cualesquiera es igual al producto duplicado del seno de la semisuma de dichos ángulos por el seno de la diferencia inversa de estos ángulos* (por diferencia inversa entre los ángulos se entiende la diferencia que se forma al sustraer el ángulo que se encuentra bajo el signo del coseno minuendo del ángulo que se encuentra bajo el signo de coseno sustrayendo).

**Corolario 15.** *Para cualesquiera dos ángulos* $\alpha$ *y* $\beta$ *se verifica la igualdad*

$$\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

*la cual se llama fórmula de la suma de los senos.*

El corolario 15 puede enunciarse del modo siguiente: *la suma de los senos de dos ángulos cualesquiera es igual al producto duplicado del seno de la semisuma de dichos ángulos por el coseno de la semidiferencia entre los mismos.*

**Corolario 16.** *Para cualesquiera dos ángulos* $\alpha$ *y* $\beta$ *se verifica la igualdad*

$$\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

*a cual se llama fórmula de la diferencia entre senos.*

El corolario 16 puede enunciarse del modo siguiente: *la diferencia entre los senos de dos ángulos cualesquiera es igual al producto duplicado del seno de la semidiferencia de dichos ángulos por el coseno de la semisuma de estos ángulos, con la particularidad de que el seno de la semidiferencia se toma de tal modo que el ángulo que se encuentra bajo el signo del seno sustrayendo se resta del ángulo que se encuentra bajo el signo de seno minuendo.*

**Demostración.** Al designar

$$\begin{cases} \alpha+\beta = x, \\ \alpha-\beta = y, \end{cases} \tag{7}$$

y al sumar estas igualdades, obtendremos

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{x+y}{2}, \\ \beta = \dfrac{x-y}{2}. \end{cases} \tag{8}$$

De la igualdad (8) se deduce que para todo par $x$ e $y$ siempre existe un par $\alpha$ y $\beta$ tal, que se verifican las igualdades (7).

Si en las fórmulas (4), (5) y (6) sustituimos $\alpha$ y $\beta$ por $x$ e $y$, entonces según las fórmulas (7) y (8) obtendremos, como resultado, la validez de las siguientes fórmulas:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \tag{9}$$

$$\cos x - \cos y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{y-x}{2}, \tag{10}$$

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}. \tag{11}$$

Haciendo uso de que $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$ para cualquier ángulo $y$, de la fórmula (11) obtenemos

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(-y) = 2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

es decir, es válida la siguiente fórmula:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}. \tag{12}$$

La validez de las fórmulas (9), (10), (11) y (12) predetermina la validez de los corolarios 13, 14, 15 y 16.

**Ejemplos.** 1. $\cos 4\alpha + \cos 6\alpha = 2 \cos \frac{4\alpha + 6\alpha}{2} \cos \frac{4\alpha - 6\alpha}{2} =$

$$= 2 \cos 5\alpha \cos(-\alpha) = 2 \cos 5\alpha \cos \alpha.$$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) =$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{\frac{\pi}{3} - \beta + \frac{\pi}{6} + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\frac{\pi}{6} + \beta - \frac{\pi}{3} + \beta}{2} =$$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen}\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right).$$

3. $\operatorname{sen} \gamma + \frac{1}{2} = \operatorname{sen} \gamma + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{12}\right).$

4. $\operatorname{sen} \alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5\alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 5\alpha =$

$$= 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha - 5\alpha}{2} \cos \frac{\alpha + 5\alpha}{2} = 2 \operatorname{sen}(-2\alpha) \cos 3\alpha = -2 \operatorname{sen} 2\alpha \cos 3\alpha.$$

## § 6. Fórmulas de arcos dobles y de los arcos mitad

**Fórmulas de los arcos dobles.** Sea dado un ángulo $\alpha$, es decir, cierto número $\alpha$ que representa la medida radial del ángulo citado. Entonces, por ángulo $2\alpha$ se entiende aquel cuya medida radial es el número $2\alpha$; el ángulo $2\alpha$ se denomina con frecuencia *ángulo de arco doble*.

1. *Para cualquier ángulo α se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha, \tag{1}$$

*que se llama fórmula para el seno del ángulo de arco doble.*

Esta afirmación puede enunciarse del modo siguiente: *el seno de un ángulo de arco doble 2α es igual al producto duplicado del seno del ángulo α por el coseno del* ángulo α.

**Demostración.** Suponiendo que $\alpha = \beta$ en la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha,$$

obtenemos la validez de la afirmación 1.

2. *Para cualquier ángulo 2α se verifica la igualdad*

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha, \tag{2}$$

*la cual se denomina fórmula del coseno de un ángulo de arco doble.*

Esta afirmación puede enunciarse del modo siguiente: *el coseno de un ángulo de arco doble 2α es igual al cuadrado del coseno del ángulo α menos el cuadrado del seno del ángulo α.*

**Demostración.** Suponiendo que $\beta = \alpha$ en la fórmula para el coseno de la suma de dos ángulos

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

llegamos a que la afirmación 2 es lícita.

3. *Para cualquier ángulo α tal que* $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, *y* $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \tag{3}$$

*a cual se llama fórmula de la tangente de un ángulo de arco doble.*

**Demostración.** Representando 2α como $(\alpha + \alpha)$ y aplicando la fórmula de tangentes de la suma de dos ángulos, tenemos

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

lo que se trataba de demostrar.

4. *Para cualquier ángulo α tal, que* $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} \tag{4}$$

*la cual se llama fórmula de cotangente de un ángulo de arco doble.*

**Demostración.** Representando 2α como $(\alpha + \alpha)$ y aplicando la

fórmula de cotangente de la suma de dos ángulos, tenemos

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha},$$

lo que se trataba de demostrar.

**Ejemplos.** 1. Calcúlense $\operatorname{sen} 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$, si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ y $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Para todo ángulo $\alpha$, perteneciente al intervalo mencionado, $\cos\alpha$ es negativo, por lo cual

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\frac{4}{5}$$

Al aplicar las fórmulas (1) y (2), obtenemos

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = -\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{7}{25}.$$

2. Calcúlese $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, si $\operatorname{tg} 2\alpha = 3$. Al aplicar las fórmulas para la tangente de la suma de dos ángulos y, a continuación, para la tangente de un ángulo de arco doble, obtenemos

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha} - \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = 2\operatorname{tg} 2\alpha = 6.$$

Examinemos un ángulo $n\alpha$, donde $n$ es un número natural cualquiera. Por ángulo $n\alpha$ se entiende aquel cuya medida radial es el número $n\alpha$. Se pueden deducir las fórmulas que expresan $\operatorname{sen} n\alpha$ y $\cos n\alpha$ $(n \in N)$ en términos de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. A título de ejemplo aduzcamos las fórmulas para $\operatorname{sen} 3\alpha$ y $\cos 3\alpha$:

$$\operatorname{sen} 3\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha+\alpha) = \operatorname{sen} 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{sen}\alpha =$$
$$= 2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}\alpha =$$
$$= 3\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha.$$

Así pues, $\operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$;

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen}\alpha =$$
$$= (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\cos\alpha - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha =$$
$$= \cos^3\alpha - (1-\cos^2\alpha)\cos\alpha - 2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha =$$
$$= \cos^3\alpha - \cos\alpha + \cos^3\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha =$$
$$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Así pues, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

**Ejemplos.** 1. Calcúlese sen $3\alpha$, si sen $\alpha = \frac{3}{4}$. Haciendo uso de la fórmula para sen $3\alpha$, obtendremos

$$\text{sen}\, 3\alpha = 3 \cdot \frac{3}{4} - 4\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{36-27}{16} = \frac{9}{16}.$$

2. Calcúlese (sen $3\alpha$ + cos $3\alpha$), si sen $\alpha$ — cos $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Empleando las fórmulas para sen $3\alpha$ y cos $3\alpha$, tenemos

$$\text{sen}\, 3\alpha + \cos 3\alpha = 3\,(\text{sen}\, \alpha - \cos \alpha) - 4\,(\text{sen}^3 \alpha - \cos^3 \alpha).$$

Apliquemos la fórmula de multiplicación reducida:

$$\text{sen}^3 \alpha - \cos^3 \alpha = (\text{sen}\, \alpha - \cos \alpha)(\cos^2 \alpha + \text{sen}\, \alpha \cos \alpha + \text{sen}^2 \alpha).$$

De este modo, para sen $\alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tenemos

$$\text{sen}\, 3\alpha + \cos 3\alpha = \frac{3}{\sqrt{2}} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \text{sen}\, \alpha \cos \alpha) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 - 4\, \text{sen}\, \alpha \cos \alpha).$$

Completemos la expresión obtenida hasta que se forme el cuadrado perfecto:

$$-1 - 4\, \text{sen}\, \alpha \cos \alpha = -3 + 2\,(1 - 2\, \text{sen}\, \alpha \cos \alpha) = -3 + 2\,(\cos^2 \alpha +$$

$$+ \text{sen}^2 \alpha - 2\, \text{sen}\, \alpha \cos \alpha) = -3 + 2\,(\text{sen}\, \alpha - \cos \alpha)^2 = -3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -2.$$

Obtenemos en definitiva que sen $3\alpha + \cos 3\alpha = -\sqrt{2}$.

**Fórmulas para los ángulos de arco mitad.** Sea dado un ángulo $\alpha$, es decir, cierto número $\alpha$ que representa la medida radial de dicho ángulo. Entonces, por ángulo $\frac{\alpha}{2}$ se entiende aquel cuya medida radial es el número $\frac{\alpha}{2}$; el ángulo $\frac{\alpha}{2}$ se denomina a menudo, *ángulo de arco mitad.*

5. *Para cualquier ángulo $\alpha$ se verifica la igualdad*

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \tag{5}$$

*la cual se llama fórmula del cuadrado del coseno de un ángulo de arco mitad.*

**Demostración.** Es evidente que el ángulo $\alpha$ puede considerarse como un ángulo de arco doble con relación al ángulo $\frac{\alpha}{2}$. Por eso, para cualquier ángulo $\alpha$ se verifica la siguiente igualdad:

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2};$$

además, para todo ángulo $\alpha$ resulta válida la identidad trigonométrica fundamental:

$$1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Sumando estas dos igualdades, obtenemos la igualdad (5).

La igualdad (5) es equivalente a la igualdad

$$\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

De la última igualdad tenemos:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (5a)$$

para todo ángulo $\alpha$, para el cual $\cos \frac{\alpha}{2}$ es no negativo (es decir, para todo $\alpha$, perteneciente, con cierto $k \in Z$, al intervalo $[-\pi + 4\pi k;\ \pi + 4\pi k]$).

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (5b)$$

para todo ángulo $\alpha$, para el cual $\cos \frac{\alpha}{2}$ es no positivo (es decir, para todo $\alpha$, perteneciente, con cierto $k \in Z$, al intervalo $[\pi + 4\pi k;\ 3\pi + 4\pi k]$).

**Observación.** Para los valores de frontera del ángulo $\alpha$ (es decir, cuando $\alpha = \pi + 2\pi m$, donde $m \in Z$) las fórmulas (5a) y (5b) dan un mismo valor, a saber: $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$.

**Ejemplos.** Calcúlese $\cos \frac{\pi}{8}$. Por cuanto $\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, entonces $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

2. Calcúlese $\cos \frac{\alpha}{2}$, si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2},\ -\pi\right)$.

Hallemos, ante todo, $\cos \alpha$. Por cuanto para todo ángulo $\alpha$, perteneciente al intervalo indicado, $\cos \alpha$ es negativo, entonces

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\frac{3}{5}.$$

Como $\alpha \in \left(-\frac{3\pi}{2},\ -\pi\right)$, resulta que $\frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{3\pi}{4},\ -\frac{\pi}{2}\right)$. Para todo ángulo $\frac{\alpha}{2}$, perteneciente al intervalo indicado, $\cos \frac{\alpha}{2}$ es también negativo y por eso

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Así pues, $\cos \frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

6. *Para cualquier ángulo $\alpha$ se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad (6)$$

*la cual se llama fórmula para el cuadrado del seno de un ángulo de arco mitad.*

**Demostración.** Se ha observado anteriormente que para todo ángulo $\alpha$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{1} = 1, \quad -\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos\alpha.$$

Al restar la segunda igualdad de la primera, obtenemos la igualdad (6).

La igualdad (6) es equivalente a la igualdad

$$\left|\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

De la última igualdad tenemos

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (6a)$$

para todo ángulo $\alpha$ para el cual $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ es no negativo (es decir, para todo $\alpha$, perteneciente, con cierto $m \in Z$, al intervalo $[4\pi m;\ 2\pi + 4\pi m]$).

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (6b)$$

para todo ángulo $\alpha$ para el cual $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ es no positivo (es decir, para todo $\alpha$ perteneciente, con cierto $m \in Z$, al intervalo $[-2\pi + 4\pi m;\ 4\pi m]$).

**Observación.** Para los valores de frontera del ángulo $\alpha$ (es decir, cuando $\alpha = 2\pi k$, donde $k \in Z$) las fórmulas (6a) y (6b) dan un mismo valor, a saber, $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = 0$.

**Ejemplos.** 1. Calcúlese $\operatorname{sen} \frac{\pi}{8}$. Por cuanto $\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$, entonces $\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2. Calcúlese $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$, si $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$, y $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Como para cualquier ángulo $\alpha$, perteneciente al intervalo indicado, $\cos\alpha$ es negativo, resulta pues que

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\frac{7}{9}.$$

Por cuanto $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, entonces $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$. Para todo ángulo $\frac{\alpha}{2}$, perteneciente a este intervalo, $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$ es positivo y

por eso

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Por consiguiente, $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7. *Para cualquier ángulo $\alpha$ tal que $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in Z$, se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \qquad (7)$$

*la cual se llama fórmula para el cuadrado de la tangente de un ángulo de arco mitad.*

**Demostración.** Haciendo uso de la definición de tangente de un ángulo y las igualdades (5) y (6), obtenemos la igualdad (7). La igualdad (7) es equivalente a la siguiente

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

De la última igualdad tenemos:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad (7a)$$

para todo ángulo $\alpha$ para el cual $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ es no negativo (es decir, para todo $\alpha$ que pertenece, con cierto $n\in Z$ al intervalo $[2\pi n;\ \pi+2\pi n)$).

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad (7b)$$

para todo ángulo $\alpha$ para el cual $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ es no positivo (es decir, para todo $\alpha$ que pertenece, con cierto $n\in Z$, al intervalo $(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$).

**Observación.** Para los valores de frontera del ángulo $\alpha$ (es decir, cuando $\alpha=2\pi n$, donde $n\in Z$) las fórmulas (7a) y (7b) dan un mismo valor, a saber $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=0$.

**Ejemplos.** 1. Calcúlese $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$. Por cuanto

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}=3-2\sqrt{2},$$

entonces

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

2. Calcúlese $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, si $\cos 2\alpha=\frac{7}{32}$ y $\alpha\in\left(-\pi,\ -\frac{3\pi}{4}\right)$.

Por cuanto, para cualquier ángulo $\alpha$, perteneciente al intervalo indicado, $\cos\alpha$ es negativo, entonces

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = -\frac{\sqrt{39}}{8}.$$

Dado que $\alpha \in \left(-\pi;\ -\frac{3\pi}{4}\right)$, resulta que $\frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{8}\right)$. Para cualquier ángulo $\frac{\alpha}{2}$, perteneciente al intervalo citado, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ es negativa y por eso

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\frac{8+\sqrt{39}}{5}.$$

Así pues, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{8+\sqrt{39}}{5}$.

Para la tangente de un ángulo de arco mitad pueden deducirse también otras fórmulas.

8. *Para cualquier ángulo $\alpha$ tal que $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}. \tag{8}$$

**Demostración.** Por cuanto $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, entonces $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \neq 0$ y $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$. Quiere decir, se verifica la cadena de igualdades

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Aplicando ahora las fórmulas (6) y (1), obtenemos la validez de la igualdad (8).

9. *Para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} \tag{9}$$

La demostración de esta fórmula es análoga a la de la fórmula (8) y por esta razón no se da aquí.

**Ejemplos.** 1. Para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, y $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, simplifíquese la expresión

$$A = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{1+\cos\alpha}\ \frac{\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

Por cuanto para el ángulo en consideración $\alpha$

$$\cos\alpha \neq 0, \quad \cos\alpha \neq -1, \quad \cos 2\alpha \neq -1,$$

entonces

$$A=\frac{2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha},$$

En el caso dado es aplicable la fórmula (9), por eso

$$A=\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

2. Calcúlese $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, si $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ y $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$.

Para cualquier ángulo $\alpha$ del intervalo mencionado sen $\alpha$ es negativo, por lo cual

$$\mathrm{sen}\,\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{3}{5}.$$

Ahora, al aplicar la fórmula (9), tenemos

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{1+\cos\alpha}=-\frac{1}{3}.$$

Por consiguiente, $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{3}$.

Demos a conocer algunas fórmulas más que expresan el seno, el coseno, la tangente y la cotangente de un ángulo en términos de la tangente del ángulo de arco mitad.

10. *Para cualquier ángulo $\alpha$ tal que $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in Z$, se verifica la igualdad*

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}} \qquad (10)$$

**Demostración.** Para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in Z$, se verifica la cadena de igualdades

$$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\mathrm{sen}^2\,\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{sen}^2\,\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\mathrm{sen}^2\,\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\mathrm{sen}^2\,\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\mathrm{sen}^2\,\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\mathrm{sen}^2\,\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\left(\dfrac{\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}=\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}},$$

de la cual se deduce que la igualdad (10) es válida.

11. *Para cualquier ángulo* $\alpha$ *tal, que* $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{11}$$

**Demostración.** Para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, se verifica la cadena de igualdades

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{2\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\left(\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

de la cual se deduce que la igualdad (11) es válida.

12. *Para cualquier ángulo* $\alpha$ *tal*, que $\alpha \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, y $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{12}$$

Esta igualdad representa un corolario de la fórmula para la tangente de un ángulo de arco doble.

13. *Para cualquier ángulo* $\alpha$ *tal, que* $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, *se verifica la igualdad*

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}. \tag{13}$$

**Demostración.** Para cualquier ángulo $\alpha$ tal, que $\alpha \neq \pi k$, $k \in Z$, se verifica la cadena de igualdades

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{2\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 - \left(\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},$$

de la cual se desprende que la igualdad (13) es válida.

**Ejemplo.** Calcúlese $\dfrac{1}{2+\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}$, si $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$.

Según la fórmula (10) tenemos $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{-3}{5}$.

Según la fórmula (11), $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{4}{5}$.

Quiere decir, $\dfrac{1}{2+\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{5}{11}$.

### *Ejercicios*

Determínese el signo de los siguientes números (1 . . . 21)

1. $\operatorname{sen}2\cdot\operatorname{sen}4\cdot\operatorname{sen}6$. 2. $\cos5\cdot\cos7\cdot\cos8$.

3. $\operatorname{tg}(-1)\cdot\operatorname{tg}3\cdot\operatorname{tg}6\cdot\operatorname{tg}(-3)$. 4. $\operatorname{ctg}1\cdot\operatorname{ctg}(-2)\cdot\operatorname{ctg}9\cdot\operatorname{ctg}(-12)$.

5. $\dfrac{\operatorname{sen}(-3)\cdot\cos4\cdot\operatorname{tg}(-5)}{\operatorname{ctg}6}$. 6. $\dfrac{\operatorname{sen}7\cdot\cos(-8)}{\operatorname{tg}6\cdot\operatorname{ctg}(-5)}$.

7. $\dfrac{\operatorname{sen}6+\cos(-4)}{\operatorname{tg}(-2)+\operatorname{ctg}(-10)}$. 8. $\dfrac{\operatorname{sen}(-8)+\cos9}{\cos11\cdot\operatorname{tg}(-9)}$.

9. $\dfrac{\cos10\cdot\operatorname{sen}7-\operatorname{tg}10}{\cos(-\sqrt{2})\cdot\operatorname{ctg}(-4)}$. 10. $\dfrac{\operatorname{tg}7\cdot\operatorname{sen}\frac{10}{11}-\cos\frac{17}{2}\cdot\operatorname{ctg}\sqrt{26}}{\cos(-2)\cdot\operatorname{sen}\sqrt{17}-\operatorname{tg}\sqrt{70}}$.

11. $\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{9}{2}-\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}}{\operatorname{tg}1+\operatorname{ctg}(-2{,}5)}$.

12. $\frac{\cos 5}{\operatorname{sen} 6}+\operatorname{tg} 11-\operatorname{ctg}\sqrt{49{,}5}$.

13. $\operatorname{arcsen}\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(-10)+\arccos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

14. $\arccos\frac{1}{10}\cdot\operatorname{arcctg}(-11{,}5)-\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

15. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)}{\operatorname{arcctg}\left(-\frac{112}{5}\right)}$.

16. $\operatorname{arcsen}\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+\operatorname{arctg}[\cos(-4)]$.

17. $\frac{\operatorname{arcctg}(\operatorname{sen} 10)-\operatorname{arctg}(\cos 10)}{\operatorname{arcsen}[\cos(-8)]\cdot\arccos(\operatorname{sen} 5)}$.

18. $\frac{\operatorname{arcsen}(\cos 12)+\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} 7)}{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(-\frac{14}{5}\right)}+\operatorname{ctg}(-7)$.

19. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)-\frac{\operatorname{arctg}(\cos 4)}{\operatorname{arcctg} 115}+\frac{\operatorname{sen}(-10)}{\operatorname{tg} 12}$.

20. $\frac{\operatorname{arcsen}[\operatorname{ctg}(-0{,}3)]\cdot\operatorname{sen}(-9)}{\operatorname{arcsen}[\operatorname{tg}(-0{,}4)]\cdot\cos(5{,}8)}+\frac{\operatorname{ctg}(-1)}{\operatorname{sen}\sqrt{3}}-\cos\frac{13}{2}$.

21. $\frac{\operatorname{arctg}(\operatorname{sen} 10)+\operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{4}\right)\right]}{\operatorname{ctg}\left[\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]}-\frac{\operatorname{tg}(-11)\cdot\operatorname{sen}\frac{31}{4}}{\cos(-3{,}5)}$.

Hállese el valor numérico de las siguientes expresiones numéricas (22 . . . . . . 101):

22. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\frac{3\pi}{4}\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. 23. $\frac{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}+\frac{2}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}$

24. $\frac{\cos\frac{2\pi}{3}+\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}$.

25. $\frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}+\frac{\cos\frac{5\pi}{6}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$.

26. $\frac{\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{\operatorname{sen}(-\pi)+\cos\pi}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$.

27. $\cos\left(-100\pi+\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\left(20\pi-\frac{5\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(11\pi+\frac{\pi}{4}\right)$.

28. $\frac{\operatorname{sen}\left(112\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{17\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$.

29. $\left[\operatorname{tg}\left(13\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(15\pi-\frac{5\pi}{6}\right)\right]\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$.

30. $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\left[\cos\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\left(-120\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right]}{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}$.

31. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[\operatorname{tg}(-\pi)-\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}-10\pi\right)\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+10\pi\right)}$.

32. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{113\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\cos\frac{3\pi}{4}}$.

33. $\operatorname{sen}\frac{13\pi}{2}\cos(113\pi)+\operatorname{tg}\frac{18\pi}{4}\cos\left(-\frac{15\pi}{2}\right)$.

34. $\operatorname{sen}\left(-\frac{49\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{51\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{113\pi}{4}\right)$.

35. $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{44\pi}{3}\cos\left(-\frac{15\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(-\frac{19\pi}{6}\right)\operatorname{ctg}\frac{21\pi}{4}}$.

36. $\operatorname{sen}\frac{63\pi}{4}\cos\left(-\frac{85\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\frac{49\pi}{6}$.

37. $\cos\frac{181\pi}{3}\operatorname{sen}\left(-\frac{31\pi}{4}\right)\operatorname{tg}^2\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$.

38. $\cos\frac{37\pi}{4}\operatorname{sen}\left(-\frac{89\pi}{6}\right)\cos^2\left(\frac{13\pi}{3}\right)$.

39. $\dfrac{\cos\frac{57\pi}{6}\operatorname{sen}\left(-\frac{17\pi}{3}\right)}{2\operatorname{tg}\left(-\frac{115\pi}{4}\right)-\operatorname{ctg}^2\left(-\frac{117\pi}{2}\right)}$.

40. $\dfrac{\operatorname{tg}^3(-112\pi)-\cos^2(115\pi)}{\operatorname{sen}^2\frac{119\pi}{3}+\operatorname{ctg}\frac{53\pi}{2}}$.

41. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(-\frac{37\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{44\pi}{3}\right)\operatorname{sen}\frac{51\pi}{6}}{\cos^2\frac{33\pi}{4}+\operatorname{sen}(-10\pi)}$.

42. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

43. $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\operatorname{arcctg}(-1)-\pi$.

44. $3\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)-2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\pi}{2}$.

45. $4\operatorname{arctg}(-1)+\operatorname{arctg}1-\frac{5\pi}{2}$.

46. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}\right)+\cos[\pi-\operatorname{arctg}(-1)]$.

47. $\operatorname{sen}\left[-\frac{137\pi}{2}-2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

48. $\operatorname{sen}\left[-\frac{149\pi}{2}+2\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})\right]$.

49. $\operatorname{sen}\left[3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{11\pi}{2}\right]$.

50. $\operatorname{sen}\left[4\arccos(-1)-\frac{117\pi}{6}\right]$.

51. $\operatorname{tg}\left[6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{23\pi}{3}\right]$ 52. $\operatorname{tg}\left(8\arccos 0-\frac{9\pi}{4}\right)$.

53. $\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{2}-2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

54. $\operatorname{tg}\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos 0\right]$.

55. $\operatorname{ctg}\left[2\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2}\right]$.

56. $\operatorname{ctg}\left[3\operatorname{arcsen}(-1)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

57. $\operatorname{ctg}\left[\frac{\operatorname{arcsen} 0}{3}-2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$.

58. $\operatorname{ctg}\left[\frac{\operatorname{arcsen} 1}{2}+\operatorname{arctg} 1\right]$.

59. $\cos\left[4\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}-3\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right]$.

60. $\cos\left[5\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}-2\operatorname{arctg}(-1)\right]$.

61. $\cos\left[-3\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}\right]+\cos(-2\operatorname{arctg} 0)$.

62. $\dfrac{\cos(\pi-\operatorname{arcsen} 0)-\cos[6\operatorname{arcctg}(-1)]}{\operatorname{sen}(2\pi-\operatorname{arcctg} 1)}$.

63. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{15\pi}{2}-\operatorname{arcctg} 3\right)+\cos\left(2\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\operatorname{tg}(-115\pi-\operatorname{arcctg} 1)}$.

64. $\dfrac{\operatorname{sen}\left[-2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]+\cos(-5\operatorname{arcctg} 0)}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(-10\pi+\frac{\pi}{4}\right)}$.

65. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{arcsen}\frac{11}{12}\right)-\cos\left(\arccos\frac{1}{6}\right)$.

66. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 31)+\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)$.

67. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen}\frac{21}{29}\right)$. 68. $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$. 69. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 7)$.

70. $\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)-\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$.

71. $\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}12)+\cos[\operatorname{arcctg}(-2)]$.

72. $\cos[\operatorname{arctg}(-5)]-\operatorname{sen}(\operatorname{arcctg}3)$.

73. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arcsen}\frac{3}{4}\right)$. 74. $\cos(\pi-\operatorname{arctg}17)$.

75. $\cos\left[\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg}(-4)\right]$.

76. $\cos\left[2\pi-2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$. 77. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{10}\right)$.

78. $\operatorname{sen}\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$. 79. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\operatorname{arcctg}81\right)$.

80. $\operatorname{sen}\left(2\pi-3\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 81. $\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{2}-\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right]$.

82. $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 83. $\operatorname{tg}\left[\pi+\operatorname{arcsen}\left(-\frac{2}{17}\right)\right]$.

84. $\operatorname{tg}[2\pi-\operatorname{arcctg}(-5)]$. 85. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)$.

86. $\operatorname{ctg}\left[\pi+\arccos\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\right]$. 87. $\operatorname{ctg}\left[\frac{3\pi}{2}-5\operatorname{arcctg}(-1)\right]$.

88. $\operatorname{ctg}[2\pi+\operatorname{arctg}(-11)]$. 89. $\arccos(\cos 2)+\operatorname{arcsen}[\operatorname{sen}(-1)]$.

90. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}3)-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}1)$. 91. $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\right)$.

92. $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)+2\operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$.

93. $$\frac{\operatorname{arcsen}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]+\pi}{\pi-\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)}.$$

94. $$\frac{\arccos(\cos\pi)-\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)}{2\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right)+\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]}.$$

95. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}2)+\arccos(\cos 10)$.

96. $\arccos[\cos(-9)]-\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}7)$.

97. $\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-6)]-\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}8)$.

98. $\arccos\left(\cos\frac{13\pi}{4}\right)+\operatorname{arcsen}[\operatorname{sen}(-7)]$.

99. $$\frac{\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\sqrt{26})+2\pi}{\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(-8)]-3\pi}.$$

100. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{10}{3}\right)-2\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{24}{5}\right)$.

101. $\arccos[\cos(-5)]+\arccos[\cos(-8)]$.

Demuéstrese la validez de las siguientes igualdades numéricas (**102 . . . 197**):

102. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. 103. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

**104.** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. **105.** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-2}{4}$.

**106.** $\cos\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. **107.** $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-2}{4}$.

**108.** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{18}=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

**109.** $8\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{7\pi}{18}=\sqrt{3}$.

**110.** $\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{11\pi}{30}\cos\frac{7\pi}{30}\operatorname{sen}\frac{\pi}{15}=\frac{1}{16}$.

**111.** $\cos\frac{\pi}{36}\cos\frac{11\pi}{36}\cos\frac{13\pi}{36}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}$.

**112.** $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{128}$.

**113.** $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{5}=5$. **114.** $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{8}$.

**115.** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{18}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{18}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{18}=\frac{1}{8}$. **116.** $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{9}\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{9}\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{9}\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{3}$.

**117.** $\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{2}$. **118.** $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{10}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}$.

**119.** $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{18}+4\cos\frac{7\pi}{18}=\sqrt{3}$.

**120.** $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}$.

**121.** $\cos\frac{2\pi}{15}+\cos\frac{4\pi}{15}-\cos\frac{7\pi}{15}-\cos\frac{\pi}{15}=\frac{1}{2}$.

**122.** $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{24}+\operatorname{tg}\frac{9\pi}{12}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}-\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{24}=6+2\sqrt{3}$.

**123.** $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}+\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}+\operatorname{tg}\frac{4\pi}{9}-8\operatorname{sen}\frac{2\pi}{9}=\sqrt{3}$.

**124.** $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$.

**125.** $\operatorname{sen}^4\frac{\pi}{16}+\operatorname{sen}^4\frac{3\pi}{16}+\operatorname{sen}^4\frac{5\pi}{16}+\operatorname{sen}^4\frac{7\pi}{16}=\frac{3}{2}$.

**126.** $\frac{\operatorname{sen}^8 10}{8}-\frac{\cos^8 10}{8}-\frac{\operatorname{sen}^6 10}{3}+\frac{\cos^6 10}{6}+\frac{\operatorname{sen}^4 10}{4}=\frac{1}{24}$.

**127.** $\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}}$. **128.** $\operatorname{arcsen}\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

**129.** $\operatorname{arcsen}(\cos 1)=\frac{\pi-2}{2}$. **130.** $\operatorname{arcsen}\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right)=-\frac{\pi}{6}$.

**131.** $\arccos\left(\operatorname{sen}\frac{7\pi}{10}\right)=\frac{\pi}{5}$. **132.** $\arccos\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)=\frac{5\pi}{8}$.

**133.** $\arccos\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\right)=\frac{3\pi}{7}$. **134.** $\operatorname{sen}\left(2\arccos\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

135. $\operatorname{sen}\left(\arccos\frac{2}{3}+\arccos\frac{1}{3}\right)=\frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}$.

136. $\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{4}{5}$.

137. $\cos\left(\arccos\frac{5}{13}-\operatorname{arcsen}\frac{3}{5}\right)=\frac{56}{65}$.

138. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3)=-1$.

139. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}6)=6-2\pi$. 140. $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(-5))=-5+2\pi$.

141. $\arccos(\cos 9)=9-2\pi$. 142. $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$.

143. $\operatorname{arctg}(-2)+\operatorname{arctg}(-3)=-\frac{3\pi}{4}$.

144. $\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}+\operatorname{arcsen}\frac{12}{13}+\operatorname{arcsen}\frac{56}{65}=\pi$.

145. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

146. $\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}+\operatorname{arcsen}\frac{5}{13}+\operatorname{arcsen}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

147. $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\pi$.

148. $2\operatorname{arcsen}\frac{2}{7}=\arccos\frac{41}{49}$. 149. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

150. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\operatorname{arctg}3$.

151. $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{5}=\operatorname{arctg}\frac{32}{43}$.

152. $\frac{\cos 10}{1-\operatorname{sen}10}=\frac{1+\operatorname{tg}5}{1-\operatorname{tg}5}$. 153. $2\operatorname{sen}^2 14+\cos(4\cdot 7)=1$.

154. $\frac{2\operatorname{sen}6+\operatorname{sen}12}{2\operatorname{sen}6-\operatorname{sen}12}=\operatorname{ctg}^2 3$. 155. $\frac{\cos 6-\cos 9+\cos 12}{\operatorname{sen}6-\operatorname{sen}9+\operatorname{sen}12}=\operatorname{ctg}9$.

156. $\frac{\operatorname{sen}8-\operatorname{sen}10-\operatorname{sen}12+\operatorname{sen}14}{\cos 4-\cos 6-\cos 8+\cos 10}=\frac{\operatorname{sen}11}{\cos 7}$.

157. $\operatorname{sen}^6\sqrt{7}+\cos^6\sqrt{7}+\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2\sqrt{7}=1$.

158. $\operatorname{sen}\sqrt{2}\operatorname{sen}(2-\sqrt{2})+\cos^2 1+\operatorname{sen}^2(1-\sqrt{2})=1$.

159. $\frac{1+\operatorname{sen}4\sqrt{3}}{1-2\operatorname{sen}^2 2\sqrt{3}}+1=\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2 2\sqrt{3}}$.

160. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{6}\right)+\operatorname{sen}^2\sqrt{6}}{\operatorname{sen}^2 2\sqrt{6}-\operatorname{sen}\left(2\sqrt{6}-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\sqrt{6}-\frac{\pi}{3}\right)}=1$.

161. $\operatorname{sen}8-\cos 8\operatorname{tg}4=\operatorname{tg}2$.

162. $4\operatorname{sen}(\sqrt{5}+\pi)\operatorname{sen}\left(\sqrt{5}+\frac{5\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\sqrt{5}\right)=\operatorname{sen}3\sqrt{5}$.

163. $\frac{1-\operatorname{sen}^6 1-\cos^6 1}{1-2\operatorname{sen}^2 2-\sqrt{3}\operatorname{sen}4}=\frac{3}{2}$.

164. $\dfrac{\cos 2\sqrt{11}-\cos 6\sqrt{11}+\cos 10\sqrt{11}-\cos 14\sqrt{11}}{\operatorname{sen} 2\sqrt{11}+\operatorname{sen} 6\sqrt{11}+\operatorname{sen} 10\sqrt{11}+\operatorname{sen} 14\sqrt{11}}=\operatorname{tg} 2\sqrt{11}.$

165. $\dfrac{\operatorname{sen} 23+\cos 23-\operatorname{sen} 69-\cos 69}{2\operatorname{sen} 46+4\operatorname{sen}^2 23-2}=\operatorname{sen} 23.$

166. $\dfrac{1+\cos 17+\cos 34+\cos 51}{2\cos 17+4\cos^2 17-2}=\cos 17.$

167. $\operatorname{sen} 2+\operatorname{sen} 4+\operatorname{sen} 6=4\operatorname{sen} 3\cos 2\cos 1.$

168. $\operatorname{sen} 2\sqrt{13}+\operatorname{sen} 4\sqrt{13}-\operatorname{sen} 6\sqrt{13}=4\operatorname{sen}\sqrt{13}\operatorname{sen} 2\sqrt{13}\operatorname{sen}\sqrt{13}.$

169. $\dfrac{\operatorname{tg} 1+\operatorname{ctg} 1}{1+\operatorname{tg} 2\operatorname{tg} 1}=2\operatorname{ctg} 2.$ 170. $\dfrac{3-4\cos 2+\cos 4}{3+4\cos 2+\cos 4}=\operatorname{tg}^4 1.$

171. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\cos 6+\cos^2\operatorname{sen} 6}{\operatorname{sen}^3 1\cos 3+\cos^3 1\operatorname{sen} 3}=2\cos 4.$

172. $\dfrac{\cos\left(1+\frac{3\pi}{2}\right)+2\cos\left(1-\frac{11\pi}{6}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+1\right)+\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)}=\sqrt{3}\operatorname{ctg} 1.$

173. $\sqrt{(1-\operatorname{tg}^2 1)(\operatorname{ctg}^2 1-1)}=-2\operatorname{ctg} 2.$

174. $(\cos 2\operatorname{tg} 1-\operatorname{sen} 4)(\cos 4\operatorname{ctg} 2+\operatorname{sen} 4)=-1.$

175. $\dfrac{\operatorname{sen} 13+\operatorname{sen} 14+\operatorname{sen} 15+\operatorname{sen} 16}{\cos 13+\cos 14+\cos 15+\cos 16}=\operatorname{tg}\dfrac{29}{2}.$

176. $1-\sqrt{3}\cos\left(\frac{9\pi}{2}-3\right)-2\cos^2\left(\frac{5\pi}{2}-\frac{3}{2}\right)=2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}-3\right).$

177. $\dfrac{\operatorname{sen}(2\sqrt{2}+1)+\operatorname{sen}(2\sqrt{2}-1)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\sqrt{2}\right)}{\cos(2\sqrt{2}+1)+\cos(2\sqrt{2}-1)-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+2\sqrt{2}\right)}=\operatorname{tg} 2\sqrt{2}.$

178. $\dfrac{1+\cos(4-2\pi)+\cos\left(4-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(\pi+4)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}+4\right)}=\operatorname{ctg} 2.$

179. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 2(1+\operatorname{cosec} 2+\operatorname{ctg} 2)(1-\operatorname{cosec} 2+\operatorname{ctg} 2)}{\cos 2(1+\sec 2+\operatorname{tg} 2)(1-\sec 2+\operatorname{tg} 2)}=\cos 2.$

180. $\dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\sqrt{3}\right)}{\sec^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)-1}+\dfrac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\sqrt{3}\right)}{\operatorname{cosec}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\sqrt{3}\right)-1}=1.$

181. $8\cos\left(\frac{\pi}{6}-3\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-2\right)\operatorname{sen} 3\cos 9=\operatorname{sen} 18.$

182. $\operatorname{tg} 3-\operatorname{tg} 2-\operatorname{tg} 1=\operatorname{tg} 3\operatorname{tg} 2\operatorname{tg} 1.$

183. $\dfrac{1-2\cos^2 7}{2\operatorname{tg}\left(7-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{5\pi}{4}+7\right)}=1.$

184. $1+\operatorname{sen} 2-2\cos^2 1=\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(2-\frac{\pi}{4}\right).$

185. $1-\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-2\right)-\cos\left(2-\frac{3\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}\operatorname{sen} 1\cos\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$

186. $6\operatorname{sen}^2 1-\cos 2-1=-8\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(1-\frac{\pi}{3}\right).$

187. $2\cos^2 3+2\cos 6-3=8\cos\left(3+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3-\frac{\pi}{3}\right).$

188. $\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-6\right)+\operatorname{sen}(\pi-6)\right]^2+\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-6\right)-\cos(2\pi-6)\right]^2=2.$

189. $\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]^2+\left[\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}+\operatorname{ctg}(\pi-1)\right]^2=\frac{2}{\operatorname{sen}^2 1}.$

190. $2(\operatorname{sen}^6 5+\cos^6 5)-3(\operatorname{sen}^4 5+\cos^4 5)+1=0.$

191. $\operatorname{ctg}\frac{1}{8}-\operatorname{tg}\frac{1}{8}-2\operatorname{tg}\frac{1}{4}-4\operatorname{tg}\frac{1}{2}=8\operatorname{ctg}1.$

192. $\operatorname{tg}2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-1\right)+\operatorname{tg}2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-1\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)=1.$

193. $\operatorname{sen}(\operatorname{ctg}5)+\operatorname{sen}(\operatorname{tg}5)=2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}10}\right)\cos(\operatorname{ctg}10).$

194. $1+\cos 2+\cos 4+\cos 6=4\cos 1\cos 2\cos 3.$

195. $\operatorname{sen}2+\operatorname{sen}4-\operatorname{sen}6=4\operatorname{sen}1\operatorname{sen}2\operatorname{sen}3.$

196. $\operatorname{sen}^2 5+\operatorname{sen}^2\sqrt{2}+2\operatorname{sen}5\operatorname{sen}\sqrt{2}\cos(5+\sqrt{2})=\operatorname{sen}^2(5+\sqrt{2}).$

197. $\frac{\cos 1+\operatorname{sen}1}{\operatorname{sen}1-\cos 1}-\frac{1+2\cos^2 1}{\cos^2 1(\operatorname{tg}^2 1-1)}=\frac{2}{1+\operatorname{tg}1}.$

Demuéstrese la validez de las siguientes desigualdades numéricas (198 ... 244):

198. $\operatorname{sen}1+\cos 1>1.$ 199. $\operatorname{sen}1+\operatorname{tg}1>2.$

200. $\operatorname{sen}\frac{2+\sqrt{3}}{2}>\frac{\operatorname{sen}2+\operatorname{sen}\sqrt{3}}{2}.$

201. $\cos\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}>\frac{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}.$

202. $\operatorname{sen}\left(\cos\frac{\sqrt{5}}{3}\right)<\cos\left(\operatorname{sen}\frac{\sqrt{5}}{3}\right).$

203. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\sqrt{2})<\cos(\cos\sqrt{2}).$

204. $\frac{1}{\operatorname{sen}\left(1+\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)}>\frac{4\sqrt{3}}{3}.$

205. $\left(1+\frac{1}{\operatorname{sen}\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\sqrt{2}}\right)>3+2\sqrt{2}.$

206. $\frac{\operatorname{sen}(1+\sqrt{2})}{\operatorname{sen}1\cdot\operatorname{sen}\sqrt{2}}>\frac{2}{\operatorname{sen}\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$

207. $\cos 1+\cos\sqrt{2}+\cos(\pi-1-\sqrt{2})<\frac{3}{2}.$

208. $\operatorname{sen}^2(\pi-\sqrt{2}-\sqrt{3})>\operatorname{sen}2\sqrt{2}\operatorname{sen}2\sqrt{3}.$

209. $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi-1-\sqrt{2}}{2}<\frac{1}{8}.$

210. $4\operatorname{sen}3(3+\sqrt{5})+5>4\cos 2(3+\sqrt{5})+5\operatorname{sen}(3+\sqrt{5}).$

211. $-4 < \cos 2\sqrt{7} + 3 \operatorname{sen} \sqrt{7} < \frac{17}{8}$. 212. $\frac{1}{4} < \operatorname{sen}^2 12 + \cos^6 12 < 1$.

213. $\frac{1}{\cos\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{2\pi - \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}} > 6$.

214. $\arcsin\frac{2}{5} < \arcsin\frac{3}{7}$. 215. $\arccos\frac{3}{7} < \arccos\frac{1}{3}$.

216. $\operatorname{arctg}\frac{2}{9} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. 217. $\operatorname{arcctg}(3\sqrt{2}) < \operatorname{arcctg} 4$.

218. $2\operatorname{arcctg} 4 + \operatorname{arcctg} 3 > \frac{\pi}{4}$. 219. $\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} > \frac{\pi}{4}$.

220. $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) < \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)$. 221. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} > \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \frac{3}{5}$.

222. $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) > \frac{3}{2} + \arcsin\frac{2}{3}$. 223. $\operatorname{arcctg}(-3) < \frac{8}{3} - \operatorname{arctg} 3$.

224. $3\arccos\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - 2\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) > \frac{2\pi}{3}$.

225. $\operatorname{arcctg}\frac{4}{5} + \operatorname{arcctg}\frac{1}{3} < \frac{3\pi}{4}$. 226. $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} > \arccos\frac{4}{5} - \arcsin\frac{1}{3}$.

227. $\arccos\frac{2}{5} + \arccos\frac{12}{13} + \operatorname{crasen}\frac{1}{4} > \frac{\pi}{2}$.

228. $12\cos^2\frac{1}{10} + 7\operatorname{sen}\frac{1}{10} < 13$. 229. $\operatorname{sen} 4 + \cos 4 > -\sqrt{2}$.

230. $\operatorname{ctg}^3 3 + \operatorname{ctg}^2 3 - \operatorname{ctg} 3 - 1 < 0$.

231. $\cos\sqrt{2} + \cos 2\sqrt{2} + \cos 3\sqrt{2} < 0$.

232. $2\cos 1 + \operatorname{sen} 1 > \operatorname{tg}\frac{1}{2}$. 233. $\operatorname{tg}^2 7 + \operatorname{ctg}^2 7 > 2$.

234. $2\cos\frac{15}{2}\left(\cos\frac{15}{2} - \sqrt{8}\operatorname{tg}\frac{15}{2}\right) < 5$. 235. $\frac{\cos^2\frac{1}{3}}{\cos^2\frac{1}{6}} > 3\operatorname{tg}\frac{1}{6}$.

236. $\frac{2 + \sqrt{2} - 4\cos^2\frac{19\pi}{12}}{\operatorname{sen}\frac{19\pi}{12} - \cos\frac{19\pi}{6}} > 2$. 237. $4\operatorname{sen}\frac{3}{8}\operatorname{sen}\frac{3}{4}\operatorname{sen}\frac{9}{8} < \operatorname{sen}\frac{3}{2}$.

238. $2\cos^2\sqrt{4} - \operatorname{sen}\sqrt{3} + \operatorname{sen} 3\sqrt{3} < 1$.

239. $6\cos^2\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}^2\sqrt{2} < 2\operatorname{sen}^2\sqrt{2} + 3\operatorname{tg}^2\sqrt{2}$.

240. $\sqrt{5 - 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}} > 6\operatorname{sen}\frac{1}{2} - 1$. 241. $\sqrt{2 + 4\cos 2} > \frac{1}{2} + 3\cos 2$.

242. $\sqrt{\operatorname{sen} 7} + \sqrt{\cos 7} > 1$.

243. $\sqrt{3 + 2\operatorname{tg}\frac{\sqrt{3}}{4} - \operatorname{tg}^2\frac{\sqrt{3}}{4}} > \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{3}}{4}$.

244. $\cos 1 + \cos 3 > \cos 2 + \cos 4$.

Simplifíquese (245 . . . 262):

245. $\operatorname{sen}^2(\pi-9)+\operatorname{tg}^2(\pi-9)\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+9\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+9\right)\cos(9-2\pi)$.

246. $1-\operatorname{sen}(1-2\pi)\cos\left(1-\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}(\pi-1)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)-2\cos^2(\pi+1)$.

247. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{18}+\operatorname{sen}^2\frac{11\pi}{18}\cos^2\frac{25\pi}{18}+\operatorname{sen}^2\frac{29\pi}{18}\cos^2\frac{34\pi}{18}$.

248. $\left(\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}+\operatorname{sen}\frac{5\pi}{9}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{13\pi}{9}-\operatorname{sen}\frac{19\pi}{12}\right)+\left(\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}+\operatorname{sen}\frac{19\pi}{18}\right)\times$
$\times\left(\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{9}\right)$.

249. $\dfrac{\operatorname{sen}(4-\pi)\cos(4-2\pi)\operatorname{sen}(2\pi-4)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-4\right)\operatorname{ctg}(\pi-4)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+4\right)}$.

250. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{1}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{1}{4}\right)}$.

251. $\cos(2\sqrt{2}-2\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)\operatorname{sen}(\pi+\sqrt{2})$.

252. $\dfrac{\operatorname{sen}(-5)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+5\right)}+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+5\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-5\right)$. 253. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 7}{1+\operatorname{tg}^2 7}\cdot\operatorname{tg}14$.

254. $2\operatorname{sen}\sqrt{19}\cdot\operatorname{sen}2\sqrt{19}+2\cos4\sqrt{19}\cdot\cos10\sqrt{19}$.

255. $\operatorname{sen}3\sqrt{21}+2\cdot\operatorname{sen}5\sqrt{21}\cdot\cos2\sqrt{21}$.

256. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot\operatorname{sen}1\cdot\cos2$. 257. $\dfrac{1+\operatorname{tg}2\sqrt{29}\cdot\operatorname{tg}\sqrt{29}}{\operatorname{ctg}\sqrt{29}+\operatorname{tg}\sqrt{29}}$.

258. $\dfrac{\operatorname{sen}2\sqrt{7}+\operatorname{tg}2\sqrt{7}}{\cos2\sqrt{7}+\operatorname{ctg}2\sqrt{7}}$. 259. $\dfrac{\operatorname{sen}^4 1+\cos^4 1-1}{\operatorname{sen}^6 1+\cos^6 1-1}$.

260. $\dfrac{\cos2\sqrt{5}-\operatorname{sen}2\sqrt{5}\cdot\operatorname{ctg}2\sqrt{5}}{\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}$.

261. $\operatorname{ctg}^2 10-\operatorname{tg}^2 10-8\cos20\operatorname{ctg}20$.

262. $\dfrac{\cos3+\sqrt{3}\operatorname{sen}3}{\cos3-\sqrt{3}\operatorname{sen}3}$.

Hállense tales $A$ máximo y $B$ mínimo que para cualquer $\beta$ se verifiquen las siguientes desigualdades dobles (263 . . . 265):

263. $A\leqslant\operatorname{sen}\beta\cos\beta\cos2\beta\cos4\beta\leqslant B$.

264. $A\leqslant\operatorname{sen}\beta+2\cos\beta\leqslant B$.

265. $A\leqslant4\operatorname{sen}2\beta-3\cos2\beta\leqslant B$.

266. Demuéstrese que la igualdad $(\operatorname{sen}x)^\alpha+(\cos x)^\alpha=1$ se verifica para cualquier $x$ sólo en el único caso, en que $\alpha=2$.

CAPÍTULO

# VI

# FUNCIONES Y GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES

Al analizar las relaciones cuantitativas de los fenómenos que ocurren en el mundo real hemos de tratar valores numéricos de diferentes magnitudes, por ejemplo, de tiempo, camino, valocidad, aceleración, volumen, etc. En dependencia de las condiciones que se analizan, algunas de las magnitudes tienen valores numéricos constantes y las otras, variables. Tales magnitudes se denominan *constantes* y *variables*, respectivamente. Por ejemplo, al realizarse un movimiento uniforme, la velocidad $v$ es constante, mientras que el tiempo $t$ y el camino $S$ son variables, con la particularidad de que $S = vt$. Durante la caída libre de un cuerpo que se tira sin velocidad inicial, la aceleración de la gravedad $g$ es una magnitud constante, mientras que el tiempo del movimiento $t$ y el trayecto recorrido $S$ son variables, con la particularidad de que $S = \frac{gt^2}{2}$.

El estudio de los fenómenos que nos rodean muestra que las magnitudes variables cambian no de manera independiente una de la otra, sino que la variación de los valores numéricos de algunas de ellas lleva tras de sí el cambio de los valores de otras magnitudes. Aquí se analizarán solamente los *pares de variables*, los valores de una de las variables (*dependiente*) de los cuales varían en función de los valores de la otra (*independiente*). En la dependencia entre dos variables que se analiza pueden figurar, además de las propias variables, ciertas magnitudes que no varían y se llaman, corrientemente, *constantes*. En los ejemplos citados más arriba es natural considerar que $t$ es una variable independiente, $S$, una variable dependiente, mientras que $\frac{g}{2}$ y $v$ son constantes. Expongamos otros ejemplos de pares de magnitudes variables: el área de un círculo $S = \pi R^2$, ($R$ es el radio y $\pi$, una constante), donde $S$ varía en función de $R$; la ley de Boyle—Mariotte: $p = \frac{c}{v}$ ($V$ es el volumen de cierta cantidad de gas, $p$ es la presión de este gas, $c$ es una constante), donde $p$ varía en función de $V$.

La variable independiente no siempre toma valores numéricos cualesquiera, sino aquellos que se predeterminan por las condiciones del problema en consideración. Por ejemplo, en la caída libre de un cuerpo arrojado sin velocidad inicial desde la altura $H$ el tiempo del movimiento $t$ puede tomarse sólo dentro del intervalo $\left[0, \sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$.

Subrayemos que en los ejemplos aducidos a cada valor de la variable independiente le corresponde *únicamente* un valor de la variable dependiente. En lo que sigue se considerará sólo tal dependencia de los pares de variables.

## § 1. Definiciones y ejemplos

**Concepto de función.** Sea dado un conjunto de números $X$ y supongamos que se indica cierta regla (ley), designada mediante la letra $f$, de acuerdo con la cual *a cada valor de la magnitud* $x$ (variable independiente) del conjunto $X$ *se le pone en correspondencia un valor bien determinado de la magnitud* $y$ (variable dependiente). Suele decirse en este caso que *viene dada la función* $y = f(x)$ *con el campo de definición* $X$, o bien que *viene dada la función* $y = f(x)$ *definida en el conjunto* $X$. El conjunto $Y$ de todos los valores que toma en este caso la variable se denomina *campo de variación de la función* $y = f(x)$.

En el presente libro se analizarán, principalmente, las funciones, para las cuales la ley que establece correspondencias se define mediante las fórmulas. Tal método de definir las funciones se llama analítico.

**Ejemplos** de funciones.

1. Sea $n$ un número natural fijo, entonces, a todo número real $a$ se le puede poner en correspondencia (véase el cap. IV) el número real $a^n$. Por consiguiente, podemos decir que aquí se ha indicado una ley, de acuerdo con la cual a todo valor de $x$, perteneciente al conjunto de todos los números reales, se le pone en correspondencia un valor numérico $x^n$. Con otras palabras, se ha fijado la función $y = x^n$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

2. Sea $(-n)$ un número negativo fijo entero, entonces a todo número real $a$, distinto de cero, se le puede poner en correspondencia v éase el cap. IV) un solo número real $a^{-n}$. Por consiguiente, mediante dicha correspondencia queda dada la función $y = x^{-n}$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales distintos de cero.

3. Sea $(\alpha)$ un número positivo fijo no entero, entonces a todo número no negativo $a$ se le puede poner en correspondencia (véase el cap. IV) un número $a^{\alpha}$. Por consiguiente, mediante esta correspondencia queda definida la función $y -= x^{\alpha}$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números no negativos.

4. Sea $(-\alpha)$ un número negativo fijo no entero, entonces a todo número positivo $a$ se le puede poner en correspondencia (véase el cap. IV) un número $a^{-\alpha}$. Por consiguiente, mediante dicha correspondencia queda definida la función $y = x^{-\alpha}$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números positivos.

5. Sea $a$ un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces, a todo número real $b$ se le puede poner en correspondencia (véase el cap. IV) un número $a^b$. Por consiguiente, mediante dicha correspondencia queda definida la función $y = a^x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

6. Sea $a$ un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces a todo número positivo $b$ se le puede poner en correspondencia (véase el cap. IV) un número $\log_a b$. Por consiguiente, mediante dicha correspondencia queda definida la función $y = \log_a x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números positivos.

7. A todo número real $\alpha$ (como medida radial del ángulo $\alpha$) se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) un número sen $\alpha$. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y =$ sen $x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

8. A todo número real $\alpha$ (en calidad de medida radial del ángulo $\alpha$) se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) un número $\cos \alpha$. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y = \cos x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

9. A todo número real $\alpha$ (en calidad de medida radial del ángulo $\alpha$) tal, que $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera, se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) un número tg $\alpha$. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y =$ tg $x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales, a excepción de los números $x = \frac{\pi}{2} = \pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera.

10. A todo número real $\alpha$ (como medida radial del ángulo $\alpha$), salvo $\alpha = \pi m$, donde $m$ es un número entero cualquiera, se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) un número ctg $\alpha$. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y =$ ctg $x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales, a excepción de los números $x = \pi m$, donde $m$ es un número entero cualquiera.

11. A todo número real $a$ del intervalo $-1 \leqslant a \leqslant 1$ se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) el único número arcsen $a$. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y =$ arcsen $x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales que pertenecen al segmento $[-1; 1]$.

12. A todo número real $a$ del intervalo $-1 \leqslant a \leqslant 1$ se le puede

poner en correspondencia (véase el cap. V) el único número arccos $a$. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y = \arccos x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales que pertenecen al segmento $[-1; 1]$.

13. A todo número real $a$ se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) el único número arctg $a$. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y = \operatorname{arctg} x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

14. A todo número real $a$ se le puede poner en correspondencia (véase el cap. V) el único número arcctg $a$. Por consiguiente, mediante la correspondencia mencionada queda definida la función $y = \operatorname{arcctg} x$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

**Observación.** Las funciones examinadas en los ejemplos 1 . . . 14 llevan el nombre de *funciones elementales fundamentales*.

15. Examinemos una función definida para cualquier $x$ real de acuerdo con la regla: $y = 1$, si $x$ es un número racional; $y = 0$, si $x$ es un número irracional. Esta función recibe el nombre de función de Dirichlet. En forma breve esta función se escribe así:

$$y = \begin{cases} 1, \text{ si } x \text{ es un número racional,} \\ 0, \text{ si } x \text{ es un número irracional.} \end{cases}$$

16. Veamos una función definida para cualquier número real $x$ de acuerdo con la regla: $y = 1$, si $x$ es un número positivo; $y = -1$, si $x$ es un número negativo; $y = 0$, si $x = 0$. Esta función se llama signo de $x$, y se denota así: $y = \operatorname{sign} x$. La definición de esta función se escribe brevemente en la forma siguiente:

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, \text{ si } x < 0, \\ 0, \text{ si } x = 0, \\ 1, \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

17. Examinemos una función, definida para cualquier $x$ real de acuerdo con la regla: $y = g$, si $x$ es un número positivo, con la particularidad de que $x = n + \alpha$, donde $n$ es un número natural y $0 \leqslant \alpha < 1$; $y = -m$, si $x$ es un número negativo, con la particularidad de que $x = -m + \beta$, donde $m$ es un número natural y $0 \leqslant \beta < 1$; $y = 0$, si $0 \leqslant x < 1$. Esta función se llama parte entera de $x$ y se denota así: $y = [x]$. En forma breve la función $y = [x]$ puede ser definida del modo siguiente: $[x]$ es el máximo número entero, que es inferior o igual a $x$.

18. Si a todos los números reales se les ha puesto en correspondencia un mismo número real $c$, se dice que queda definida la función $y = c$, cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números reales.

**Campo de existencia y campo de variación de una función.** La primera cuestión que requiere respuesta inmediata al analizar una función se refiere al campo de definición y al campo de variación de esta función.

De la definición de función se desprende que la función $y = f(x)$ ha de prefijarse junto con su campo de definición $X$. Subrayemos que el campo de definición de una función se puede prefijar o bien por las condiciones del problema que se resuelve, o bien por el sentido físico del fenómeno que se estudia, o bien por los convenios matemáticos.

No obstante, a menudo ocurre que al prefijar analíticamente una función $y = f(x)$, su campo de definición no se indica de manera explícita. En estos casos la función se examina en su campo de definición natural.

Se llama *campo de definición natural* o *campo de existencia* de la función $y = f(x)$, dada analíticamente, el conjunto de todos los valores reales de la variable independiente $x$, para cada uno de los cuales la función toma valores reales. Así pues, el campo de existencia de una función se determina por la propia ley (fórmula) que define la función, mientras que el campo de definición de la misma se prefija por las condiciones o por el sentido del problema a resolver, es decir, el campo de definición de una función lo puede constituir cualquier parte del campo de existencia de la función, o bien los campos mencionados pueden coincidir completamente. Por ejemplo, para la función $y = \frac{gx^2}{2}$ el campo de existencia es $(-\infty; +\infty)$, mientras que el campo de definición de la función, si un cuerpo se deja caer desde la altura $H$, será $\left[0; \sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$

De este modo, siempre cuando se dice que está dada una función $y = f(x)$, se considera que ya está prefijado también su campo de definición $X$; este último o bien se indica explícitamente o bien existe el campo de existencia de dicha función (y en este caso se debe encontrar de antemano).

En lo que se refiere al campo de variación de la función $y = f(x)$, éste se calcula a base del campo de definición ya prefijado.

**Ejemplos.** 1. Sea dada la función $y = \sqrt{\operatorname{sen} x - 3}$. El campo de existencia de esta función es un conjunto vacío, es decir, $X = \phi$, por consiguiente, el campo de variación es también un conjunto vacío, es decir, $Y = \phi$.

2. Sea dada la función $y = \sqrt{\log_2 \operatorname{sen} x}$. El campo de existencia de esta función es el conjunto de todos los números $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera, es decir, $X = \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in Z\right\}$. Es fácil ver que el campo de variación consta de un solo número, a saber, del punto cero, es decir, $Y = \{0\}$.

3. Sea dada la función $y = \sqrt{1 - x^2}$. El campo de existencia de esta función es el segmento $[-1; 1]$, es decir, $X = [-1; 1]$. Es fácil ver que el campo de variación es el segmento $[0; 1]$, es decir, $Y = [0; 1]$.

4. Sea dada la función $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. El campo de existencia de esta función es el intervalo $(-1; 1)$, es decir, $X = (-1, 1)$. Es fácil ver que el campo de variación es el intervalo $[1; +\infty)$, es decir, $Y = [1; +\infty)$.

5. Sea dada la función $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, cuyo campo de definición es $X=\left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, entonces es fácil ver que el campo de variación es el segmento $[1; 2]$, es decir, $Y=[1; 2]$.

**Acotación de las funciones.** La función $y = f(x)$, definida en el conjunto $X$, se llama *acotada inferiormente*, si existe tal número $A$, que $A \leqslant f(x)$, cualquiera que esea $x \in X$.

**Ejemplo.** La función $y = a^x$ está acotada inferiormente en todo el campo de existencia, puesto que (véase el cap. IV) $0 < a^x$ para cualquier $x$ real.

La función $y = f(x)$, definida en el conjunto $X$, se llama *acotada superiormente* si existe tal número $B$, que $f(x) \leqslant B$ para cualquier $x \in X$.

**Ejemplo.** La función $y=\sqrt{1-x^2}$ está acotada superiormente en todo el campo de existencia, puesto que $\sqrt{1-x^2} \leqslant 1$, para cualquier $x$ tal que $x \in [-1; 1]$.

La función $y= f(x)$, definida en el conjunto $X$, se denomina *acotada*, si existe un número $M > 0$ tal, que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in X$.

**Ejemplo.** La función $y = \operatorname{sen} x$ está acotada en todo el campo de existencia, puesto que $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$ para cualquier $x$ real.

Se puede demostrar que la función $y = f(x)$, definida en el conjunto $X$, está acotada en dicho conjunto si, y sólo si, está simultáneamente acotada en este conjunto tanto superior como inferiormente.

**Ejemplo.** La función $y=\sqrt{1-x^2}$ está acotada en el campo de existencia $X = [-1; 1]$, pusesto que en este conunto está acotada inferiormente por el cero, y superiormente, por la unidad.

**Paridad e imparidad de las funciones.** Se dice que un conjunto $X$ es *simétrico respecto del origen de coordenadas*, si el conjunto $X$ es tal, que $(-x) \in X$ para cualquier $x \in X$.

La función $y = f(x)$ se denomina *par*, si el campo de su definición es un conjunto simétrico respecto del origen de coordenadas y si $f(x) = f(-x)$ para cualquier $x \in X$.

**Ejemplos** de funciones pares:

$$y= x^2, \quad y= \cos x, \quad y= \sqrt{1-x^2},$$
$$y=\frac{1}{1+x^2}, \quad y= 8^{x^2}.$$

De cualquier función par $y = f(x)$, con campo de definición $X$, se dice que es *simétrica respecto del eje de ordenadas*, puesto que, cualquiera que sea $x \in X$, los puntos del plano $(x, f(x))$ y $(-x, f(-x))$ son simétricos con relación al eje $Oy$.

La función $y = f(x)$ se denomina *impar*, si el campo de su definición $X$ es un conjunto simétrico respecto del origen de coordenadas y si $f(-x) = -f(x)$ para cualquier $x \in X$.

Ejemplos de funciones impares:

$$y = x, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = x^3, \quad y = \operatorname{arctg} x.$$

De cualquier función impar $y = f(x)$, que dispone del campo de definición $X$, se dice que es *simétrica respecto del origen de coordenadas*, puesto que, cualquiera que sea $x \in X$, los puntos del plano $(x, f(x))$ y $(-x, -f(x))$ son simétricos con relación al origen de coordenadas.

A la par con las funciones pares e impares existen también funciones que no son ni unas ni otras, por ejmplo, las funciones $y = 2^x$, $y = \lg x$, $y = \arccos x$, $y = \sqrt{x}$.

**Teorema 1**. *Toda función definida en un conjunto $X$, simétrico respecto del origen de coordenadas, puede ser representada en forma de la suma de dos funciones, cada una de las cuales está definida en el mismo conjunto $X$, y una de las cuales es par y la otra, impar.*

**Demostración.** Supongamos que la función $y = f(x)$ dispone del campo de definición $X$, simétrico respecto del origen de coordenadas. Mostremos que existen las funciones $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$, cada una de las cuales queda definida en el mismo conjunto $X$ y son tales, que $y = \varphi(x) + \psi(x) = f(x)$, donde $y = \varphi(x)$ es una función par, mientras que $y = \psi(x)$ es impar. Supongamos que

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Está claro que cada una de estas funciones queda definida en el conjunto $X$ y que $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $\psi(-x) = -\psi(x)$, como también $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. El teorema está demostrado.

**Ejemplo.** La función $y = 2^x$ puede ser representada como la suma de dos funciones $y = \varphi(x)$, donde $\varphi(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$ e $y = \psi(x)$, donde $\psi(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$, con la particularidad de que la función $y = \varphi(x)$ es par, y la función $y = \psi(x)$, impar.

**Observación.** A la par con el concepto de función par, es decir, de función simétrica respecto del eje de ordenadas, se puede introducir una noción más general de una función, simétrica respecto de una recta vertical que pasa por el punto $(a, 0)$. Suele decirse que *el conjunto $X$ es simétrico respecto del punto* $(a, 0)$, si dicho conjunto es tal, que el punto $(2a - x) \in X$ para cualquier $x \in X$.

Una función $y = f(x)$ se llama *simétrica respecto de la recta vertical que pasa opr el punto de coordenadas* $(a, 0)$, si el campo de su

definición es un conjunto simétrico respecto del punto $(a, 0)$ y si para todo $x$ perteneciente al campo de definición se verifica $f(2a - x) = f(x)$.

**Ejemplo.** La función $y = \operatorname{sen} x$ es simétrica respecto de una recta vertical que pasa por el punto $(\pi/2, 0)$. En efecto, el campo de definición de esta función lo constitue toda la recta numérica, por consiguiente, dicho conjunto es simétrico respecto de culquier punto, incluido el punto $\pi/2$, mientras que la igualdad $\operatorname{sen}[2(\pi/2) - x] = \operatorname{sen} x$ se verifica para cualquier $x$ real.

**Crecimiento y decrecimiento de las funciones.** Una función $y = f(x)$, definida en el conjunto $X$, se denomina *creciente en este conjunto*, si para cualquier par de números $x_1$ y $x_2$ de dicho conjunto de la desigualdad $x_1 < x_2$ proviene que $f(x_1) < f(x_2)$.

**Ejemplos.** 1. La función $y — = x$ es creciente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

2. La función $y = x^2$ es creciente en el intervalo $[0; \infty)$.

3. La función $y = \operatorname{sen} x$ es creciente en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2)$.

Una función $y = f(x)$, definida en el conjunto $X$, se denomina *decreciente en este conjunto*, si para cualquier par de números $x_1$ y $x_2$, pertenecientes a dicho conujnto, de la desigualdad $x_1 < x_2$ se deduce que $f(x_1) > f(x_2)$.

**Ejemplos.** 1. La función $y = (1/2)^x$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

2. La función $y = \operatorname{sen} x$ es decreciente en el intervalo $[\pi/2; 3\pi/2]$.

Una función $y = f(x)$, definida en el conjunto $X$, se denomina *no decreciente en este conjunto*, si para cualquier par de números $x_1$ y $x_2$, pertenecientes a dicho conjunto, de la desigualdad $x_1 < x_2$ se deduce que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

**Ejemplo.** La función $y = \sqrt{x + |x|}$ es no decreciente en el intervalo $(-\infty; +\infty)$.

Una función $y = f(x)$, definida en el conujnto $X$, se denomina *no creciente en este conjunto*, si para cualquier par de números $x_1$ y $x_2$, pertenecientes a dicho conjunto, de la desigualdad $x_1 < x_2$ se deduce que $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

**Ejemplo.** La función $y = \begin{cases} x^2, & \text{para } x < 0, \\ 0, & \text{para } x \geqslant 0 \end{cases}$ es no creciente dentro del intervalo $(-\infty; +\infty)$.

Las funciones crecientes, decrecientes, no crecientes y no decrecientes llevan el nombre de *funciones monótonas*. Las funciones crecientes y decrecientes se llaman *estrictamente monótonas*.

**Periodicidad de las funciones.** Una función $y = f(x)$ se llama *periódica*, si existe tal número $T \neq 0$ que para cualquier $x$, perteneciente al campo de definición de la función $y = f(x)$, los números $(x + T)$ y $(x - T)$ también integran el campo de definición y para todo $x$ del campo de definición se verifica $f(x + T) = f(x)$.

**Observación.** Para una función periódica tiene lugar la igualdad

$f(x-T) = f(x)$. En efecto, la función $y = f(x)$ en el punto $(x-T)$ está definida y $f(x) = f[(x-T)+T] = f(x-T)$.

**Teorema 2.** *Si un número $T$ es el período de la función $y = f(x)$, entonces el número $Q = mT$, donde $m$ es cualquier número entero y fijo distinto de cero, también será período de dicha función.*

**Demostración.** Mostremos que para todo $x$ perteneciente al campo de definición de la función $y = f(x)$ y para cualquier $n$ natural:

a) los puntos $(x+nT)$ y $(x-nT)$ pertenecen al campo de definición de la función $y = f(x)$;

b) $f(x) = f(x+nT)$ y $f(x) = f(n-nT)$.

Sea $n = 1$, entonces, de acuerdo con la definición y la observación:

a) los puntos $(x+T)$ y $(x-T)$ pertenecen al campo de definición de la función $y = f(x)$;

b) $f(x) = f(x+T)$ y $f(x) = f(x-T)$.

Supongamos que para $n = k$ la afirmación a) es válida. Demostremos que ella queda válida para $n = k+1$. Efectivamente, por hipótesis, los puntos $(x+kT)$ y $(x-kT)$ pertenecen el campo de definición de la función $y = f(x)$, y $T$ es el período de la última. Por consiguiente, los puntos $[(x+kT)+T]$ y $[(x-kT)-T]$, es decir, los puntos $[x+(k+1)T]$ y $[x-(k+1)T]$ pertenecen al campo de definición de la misma función.

Así pues, para cualquier $x$ del campo de definición de la función $y = f(x)$ el punto $(x+mT)$, donde $m$ es un número entero cualquiera distinto de cero, pertenece al campo de definición de la función citada.

Supongamos que la afirmación b) es válida para todo $n = k$, es decir, que $f(x) = f(x+kT)$ y $f(x) = f(x-kT)$. Mostremos que la afirmación es válida para $n = k+1$. En efecto, como $T$ es el período de la función $y = f(x)$, entonces para el punto $(x+kT)$ tenemos $f[(x+kT)+T] = f(x+kT)$, mas, por hipótesis, $f(x) = f(x+kT)$, por consiguiente, $f(x) = f[x+(k+1)T]$. Análogamente, para el punto $(x-kT)$ se demuestra que $f(x) = f[x-(k+1)T]$, es decir, la afirmación b) queda demostrada para todo $m$ entero distinto de cero.

Así pues, queda demostrado el teorema 2.

**Ejemplo.** 1. La función $y = \operatorname{sen} x$ tiene como su período el número $T = 2\pi$, puesto que para cualquier $x$ los números $(x+2\pi)$ y $(x-2\pi)$ integran el dominio de definición de esta función y $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$.

2. La función $y = x-[x]$ tiene como período el número $T = 1$, puesto que está definida para cualquier $x$, y $(x+1)-[x+1] = x-[x]$.

3. Una función definida tal como viene abajo:

$$y = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es un número racional cualquiera,} \\ 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional cualquiera} \end{cases}$$

tiene como período cualquier número racional.

4. La función $y = \text{sen}\sqrt{x}$ no es periódica, puesto que, por ejemplo, para el número $x = 0$ el número $x - T$ (si $T > 0$) o el número $x + T$ (si $T < 0$) no pertenecen al campo de definición de esta función.

El número $T$ se denomina *período principal*, si es positivo y mínimo entre todos los períodos positivos.

Hemos de notar que la función aducida en el ejemplo 3 no tiene período principal.

**Valores máximo y mínimo de las funciones.** Supongamos que una función $y = f(x)$ está definida en el conjunto $X$. Si existe tal $x_0 \in X$, que para cualquier $x \in X$ se verifica la desigualdad $f(x) \geqslant f(x_0)$, se dice que la función $y = f(x)$, definida en el conjunto $X$, toma para $x = x_0$, el *valor mínimo* $y_0 = f(x_0)$.

Si existe tal $x_0 \in X$, que para cualquier $x \in X$ se verifica la desigualdad $f(x) \leqslant f(x_0)$, se dice que la función $y = f(x)$ definida en el conjunto $X$ toma, para $x = x_0$, el *valor máximo* $y_0 = f(x_0)$.

**Ejemplos.** 1. La función $y = \text{sen}\, x$ toma en el intervalo $[0, 2\pi]$ su valor máximo $y = 1$ cuando $x = \pi/2$, y el valor mínimo, $y = -1$ cuando $x = 3\pi/2$.

2. La función $y = x^2$ toma en el intervalo $(-\infty; +\infty)$ el valor mínimo $y = 0$, cuando $x = 0$, pero no existe tal $x$ del campo de existencia de la función, donde ella tome el valor máximo.

3. La función $y = 2^x$ en el intervalo $(-\infty; +\infty)$ no adquiere ni el valor máximo, ni tampoco el mínimo.

4. La función $y = 2^x$ toma en el intervalo $[0; 1]$ su valor mínimo $y = 1$, cuando $x = 0$, y el valor máximo $y = 2$, cuando $x = 1$.

**Gráfica de una función.** Introduzcamos en un plano el sistema rectangular de coordenadas $xOy$ y examinemos una función $y = f(x)$. Asignando a $x$ los valores sucesivos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, obtendremos los valores correspondientes de $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ Marquemos en el plano los puntos cuyas coordenadas son $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ..., $(x_n, y_n)$, ....

Se denomina *gráfica de la función* $y = f(x)$ un conjunto de puntos en el plano que satisface las siguientes condiciones:

a) todo punto con las coordenadas $(x_0, y_0)$, donde $y_0 = f(x_0)$, pertenece a este conjunto;

b) todo punto perteneciente a dicho conjunto de puntos tiene tales coordenadas $(x_1, y_1)$, que $y_1 = f(x_1)$.

Dicho de otra forma, la *gráfica de la función* $y = f(x)$ *es el conjunto de todos los puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la condición* $y = f(x)$, *y no contiene otros puntos.*

Por ejemplo, la gráfica de la función $y = \sqrt{\log_2 \text{sen}\, x}$ será el conjunto de puntos del plano $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ 0\right)$, donde $k$ es un número entero cualquiera, y sólo de estos puntos.

**Análisis de las funciones.** Si para una función dada $y = (x)$ se han estudiado todas las propiedades mencionadas más arriba, suele decirse que se ha realizado *el anláisis de la función* $y = f(x)$.

Así pues, al analizar una función, se debe responder a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el campo de existencia de la función?

b) ¿Cuál es el campo de variación de la función?

c) ¿Está acotada o no la función?

d) ¿Toma la función los valores máximo y mínimo?

e) ¿Es periódica?

f) ¿Es la función par o impar o ni una ni otra?

g) ¿Tiene la función intervalos, donde es monótona?

h) ¿Hay puntos de intersección de la gráfica con los ejes de coordenadas?

i) ¿Cuál es la gráfica de la función?

**Observación.** El carácter ilustrativo de la gráfica hace de ella un medio auxiliar insustituible del análisis de una función, pero la gráfica sólo ilustra las propiedades de la función y no las demuestra.

## § 2. Funciones elementales fundamentales

En este párrafo se analizarán todas las funciones elementales fundamentales.

**Función lineal $y = x$.** La dependencia $y = x$ se denomina *directamente proporcional.* Se comprueban con facilidad las siguientes propiedades de esta función:

a) el campo de existencia es $(-\infty; +\infty)$;

b) el campo de variación es $(-\infty; +\infty)$;

c) la función no está acotada ni inferior ni superiormente;

d) la función no toma ni el valor máximo, ni tampoco el mínimo;

e) la función es no periódica;

s) la función es impar;

g) la función es creciente en todo el intervalo $(-\infty, +\infty)$;

h) el punto $(0; 0)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

**Teorema 1.** *La gráfica de la función $y = x$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas y ue sirve de bisectriz de los ángulos coordenados primero y tercero* (fig. 95).

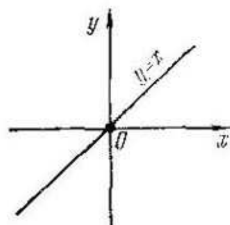


Fig. 95

**Demostración.** Supongamos que el punto $M_1$ $(x_1, y_1)$ es tal, que sus coordenadas satisfacen la condición $y_1 = x_1$. Si $x_1 = y_1 = 0$, entonces el punto $M_1$ coincidirá con el origen de coordenadas. Si $x_1 = y_1 \neq 0$, entonces los números $x_1$ e $y_1$ o bien son ambos positivos, o bien ambos negativos, es decir, el punto $M_1$ se dispone o bien en el cuadrante primero o bien, en el tercero. Como de la condición $y_1 = x_1$ se deduce que $| y_1 | = | x_1 |$, entonces el punto $M_1$ es equidistante con relación a los ejes de coordenadas. Por consiguiente, se dispone o bien en la bisectriz del primer cuadrante (si sus coordena-

das son positivas), o bien en la bisectriz del tercer cuadrante (si sus coordenadas son negativas). Así pues, cualquier punto $M_1$ $(x_1, y_1)$, donde $y_1 = x_1$, o bien coincide con el origen de coordenadas, o bien se dispone en una de las bisectrices de los cuadrantes primero o tercero.

Es obvio que las coordenadas del origen de coordenadas satisfacen la condición $0 = 0$. Si el punto $M_2$ $(x_1, y_2)$ se dispone en una de las bisectrices (o bien del primer cuadrante o bien del tercer cuadrante), entonces $|x_2| = |y_2|$ (las distancias hasta los ejes coordenados son iguales). Como los números $x_2$ e $y_2$ son o bien ambos positivos (si el punto $M_2$ se dispone en el primer cuadrante) o bien ambos negativos (si el punto $M_2$ se encuentra en el tercer cuadrante), entonces de las condiciones $|y_2| = |x_2|$ se deduce $y_2 = x_2$, es decir, el punto $M_2$ $(x_2, y_2)$ es tal que $y_2 = x_2$. Así pues, el origen de coordenadas y cualquier punto dispuesto en una de las bisectrices (o bien del primer cuadrante o bien del tercer cuadrante) tiene tales coordenadas $(x_3, y_3)$ que $y_3 = x_3$.

Por definición de la gráfica de una función, la recta que pasa por el origen de coordenadas y sirve de bisectriz para los cuadrantes primero y tercero es la gráfica de la función $y = x$ (véase la fig. 95). El teorema está demostrado.

**Hipérbola** $y = \frac{1}{x}$. La dependencia $y = \frac{1}{x}$ se denomina *inversamente proporcional*. Se comprueban con facilidad las siguientes propiedades de esta función:

a) el ampo de existencia es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

c) la función no está acotada en todo el campo de existencia, pero está acotada inferiormente $(y > 0)$ en el intervalo $(0, +\infty)$ y superiormente $(y < 0)$ en el intervalo $(-\infty, 0)$;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función es no periódica;

f) la función es impar;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero es decreciente en el intervalo $(0, +\infty)$ y, además, en el intervalo $(-\infty, 0)$;

h) no hay puntos de intersección con los ejes.

La gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$ es una línea denominada *hipérbola* (fig. 96).

**Teorema 2.** *La gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas.*

**Demostración.** Sea dada una función impar $y = f(x)$ y supongamos que el punto $(x_0, y_0)$ se dispone en la gráfica de esta función. Entonces, $y_0 = f(x_0)$ y, por ser la función impar, $y_0 = f(-x_0)$, es decir, el punto $(-x_0, -y_0)$ es simétrico al punto $(x_0, y_0)$ con relación al origen de coordenadas y se dispone también en la gráfica. El teorema queda demostrado.

**Observación.** Para construir la gráfica de una función impar es suficiente construirla para $x \geqslant 0$. Para $x < 0$, la gráfica resulta una representación simétrica de la parte de la gráfica construida respecto al origen de coordenadas.

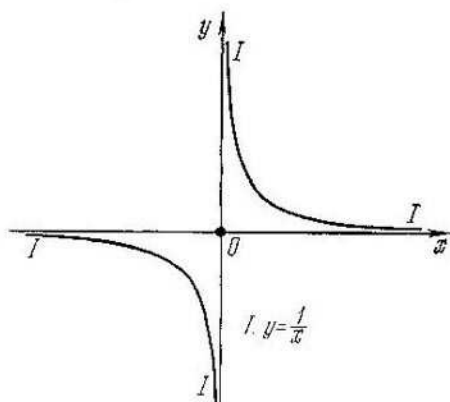



Fig. 96

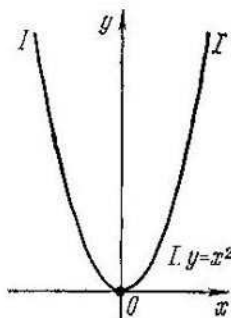



Fig. 97

**Parábola** $y = x^2$. La dependencia $y = x^2$ se denomina *cuadrática*. Se comprueban con facilidad las siguientes propiedades de esta función:

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;

b) el campo de variación es $[0, +\infty)$;

c) la función está acotada inferiormente: $y \geqslant 0$;

d) la función toma su valor mínimo $y = 0$ cuando $x = 0$;

e) la función no es periódica;

f) la función es par;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente en el intervalo $[0, +\infty)$;

h) el punto $(0; 0)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

La gráfica de la función $y = x^2$ es una curva que se denomina *parábola* (fig. 97).

**Teorema 3.** *La gráfica de una función par es simétrica respecto de eje $Ox$.*

**Demostración.** Supongamos que el punto $(x_0, y_0)$ se dispone en la gráfica de una función par $y = f(x)$, es decir, sea $y_0 = f(x_0)$. Debido a la paridad de la función, $y_0 = f(-x_0)$, es decir, el punto $(-x_0, y_0)$ es simétrico al punto $(x_0, y_0)$ con relación al eje $Oy$ y se dispone también en la gráfica de la función $y = f(x)$. El teorema queda demostrado.

**Observación.** Para construir la gráfica de una función par es suficiente construirla sólo para $x \geqslant 0$. Para $x < 0$, la gráfica resulta

una representación simétrica de la parte de la gráfica construida con relación al eje $Oy$.

**Funciones potenciales** $y = x^{\alpha}$. Las funciones examinadas más arriba, a saber, $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, representan caso sparticulares de la función potencial.

Veamos otros casos:

1. $y = x^{2m}$ ($m$ es un número natural fijo). Entonces,

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;

b) el campo de variación es $[0, +\infty)$;

c) la función está acotada inferiormente: $y \geqslant 0$;

d) la función toma su valor mínimo $y = 0$, cuando $x = 0$;

e) la función no es periódica;

f) la función es par;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero decrece en el intervalo $(-\infty, 0]$ v crece en el intervalo $[0, +\infty)$;

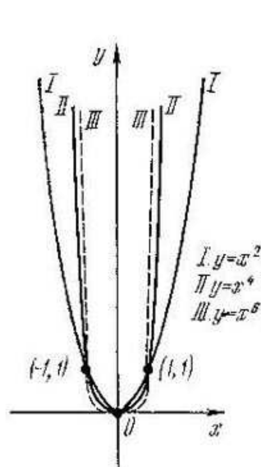


Fig. 98

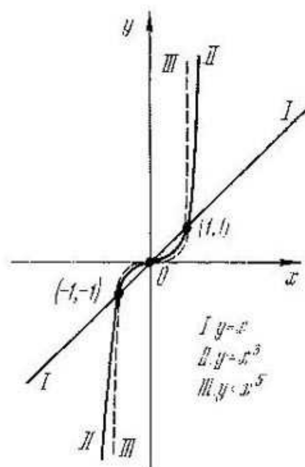


Fig. 99

h) el punto (0; 0) es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ se exponen en la fig. 98.

2. $y = x^{2m-1}$ ($m$ es un número natural fijo). Entonces,

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(-\infty, +\infty)$;

c) la función no está acotada ni superior ni inferiormente;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función no es periódica;

f) la función es impar;

g) la función es creciente en todo el campo de existencia;

h) el punto (0; 0) es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de las funciones $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ se exponen en la fig. 99.

3. $y = x^{-2m}$ ($m$ es un número natural fijo). Entonces,

a) el campo de existencia es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(0, +\infty)$;

c) la función está acotada inferiormente: $y > 0$;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función no es periódica;

f) la función es par;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero crece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decrece en el intervalo $(0, +\infty)$;

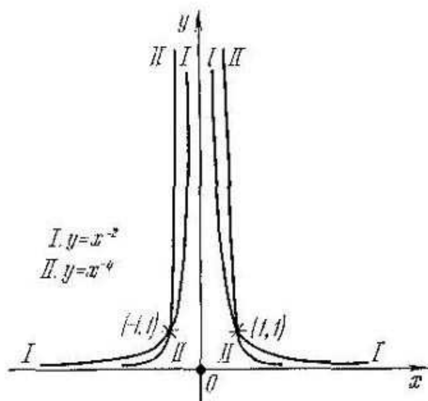



Fig. 100

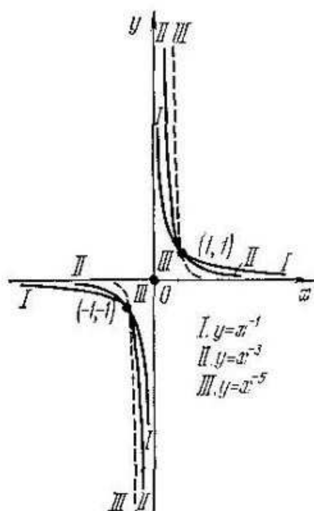



Fig. 101

h) no hay puntos de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de las funciones $y = x^{-2}$, $y = x^{-4}$ se exponen en la fig. 100.

4. $y = x^{-2m+1}$ ($m$ es un número natural fijo). Entonces,

a) el campo de existencia es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

c) la función no está acotada ni superior ni inferiormente;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función no es periódica;

f) la función es impar;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia,

pero decrece en el intervalo $(-\infty, 0)$ y, además, en el intervalo $(0, +\infty)$;

h) no hay puntos de intersección con los ejes coordenados

Las gráficas de las funciones $y = x^{-1}$, $y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$ se exponen en la fig. 101.

5. $y = x^{\alpha}$ ($\alpha$ es un número positivo fijo no entero). Entonces,

a) el campo de existencia es $[0, +\infty)$;

b) el campo de variación es $[0, +\infty)$;

c) la función está acotada inferiormente: $y \geq 0$;

d) la función toma su valor mínimo $y = 0$ para $x = 0$;

e) la función no es periódica;

f) la función no es par ni tampoco impar;

g) la función es creciente en todo el campo de existencia;

h) el punto (0; 0) es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de ciertas funciones se exponen en la fig. 102.

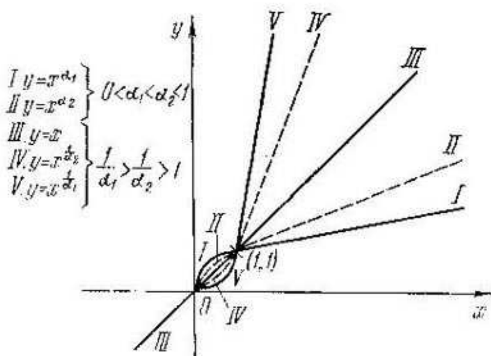



Fig. 102

6. $y = x^{-\alpha}$ ($\alpha$ es un número positivo fijo no entero). Entonces,

a) el campo de existencia es $(0, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(0, +\infty)$;

c) la función está acotada inferiormente: $y > 0$;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función no es periódica;

f) la función no es par ni tampoco impar;

g) la función es decreciente en todo el campo de existencia;

h) no hay puntos de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de ciertas funciones se exponen en la fig. 103.

**Función exponencial** $y = a^x$. Una función $y = a^x$, donde $a$ es un número fijo tal, que $a > 0$ y $a \neq 1$, se denomina *función exponencial*. La función exponencial posee las siguientes propiedades;

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$

b) el campo de variación es $(0, +\infty)$;

c) la función está acotada inferiormente: $y > 0$;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función no es periódica;

f) la función no es par ni tampoco impar;

g) si $a > 1$, la función $y = a^x$ crece en todo el campo de existencia; si $0 < a < 1$, la función $y = a^x$ decrece en todo el campo de existencia;

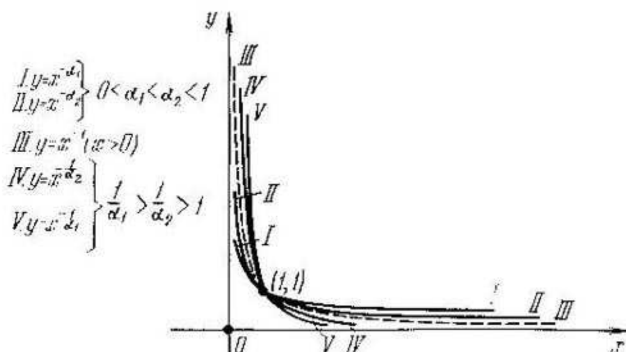



Fig. 103

h) el punto (0; 1) es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de algunas funciones exponenciales se exponen en la fig. 104 (para $a > 1$) y en la fig. 105 (para $0 < a < 1$).

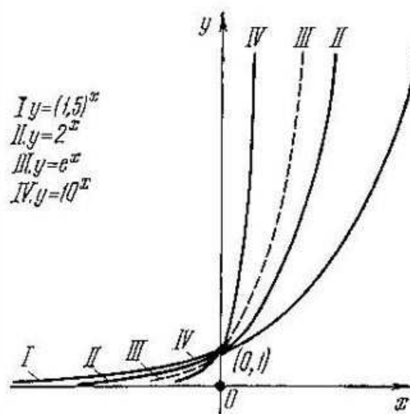



Fig. 104

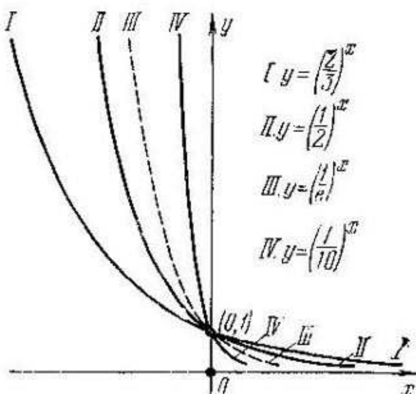



Fig. 105

**Función logarítmica $y = \log x$.** Una función $y = \log x$, donde $a$ es un número fijo tal, que $a > 0$ y $a \neq 1$, se denomina *función logarítmica*. La función logarítmica posee las siguientes propiedades:

a) el campo de existencia es $(0, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(-\infty, +\infty)$;

c) la función no está acotada ni superior ni inferiormente;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función no es periódica;

f) la función no es par ni tampoco impar;

g) si $a > 1$, la función $y = \log_a x$ crece en todo el campo de existencia; si $0 < a < 1$, la función $y = \log_a x$ decrece en todo el campo de existencia;

h) el punto $(1; 0)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Las gráficas de algunas funciones logarítmicas se exponen en la fig. 106 (para $a > 1$) y en la fig. 107 (para $0 < a < 1$).

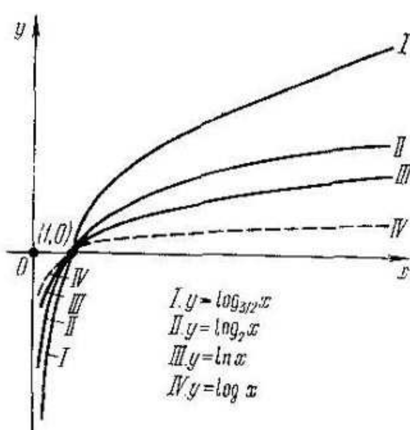



Fig. 106

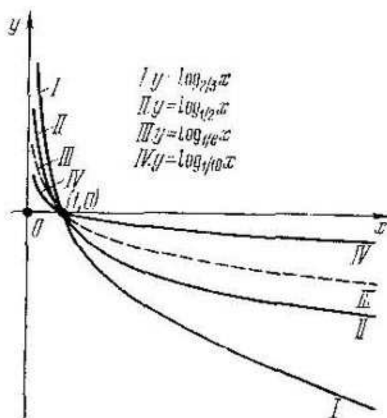



Fig. 107

**Funciones trigonométricas principales.** Antes de empezar el análisis de las funciones trigonométricas demostremos un teorema.

**Teorema 4.** *Para construir la gráfica de una función cuyo período principal es T, basta construirla en el segmento de longitud T y hacer prolongrarla luego periódicamente.*

La demostración se desprende de la definición de gráfica de la función y de la definición de periodicidad de la misma. Así por ejemplo, si $f(x + nT) = f(x)$, entonces junto con el punto $(x_0, y_0)$ a la gráfica le pertenecen también los puntos $(x_0 + Tn, y_0)$ para todo $n$ entero.

**Sinusoide $y = \operatorname{sen} x$.** Haciendo uso de las propiedades del seno de un ángulo, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \operatorname{sen} x$:

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;

b) el campo de variación es $[-1; 1]$;

c) la función está acotada inferior y superiormente;

d) la función toma su valor mínimo $y = -1$ para cada $x_k = -\frac{\pi}{2}+2\pi k$, dondo $k$ es un número entero cualquiera, como también su valor máximo $y = 1$ para cada $x_m = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, donde $m$ es un número entero cualquiera:

e) la función es periódica, de período principal igual a $2\pi$:

f) la función es impar;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia pero, crece en cada intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, donde $k$ es un número entero cualquiera, y decrece en todo intervalo $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k, \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$, donde $k$ es un número entero cualquiera.

Mostremos, por ejemplo, que en el segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $y = \text{sen } x$ es creciente, es decir, que para cualquier par de números $x_1$ y $x_2$ es tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ se verifica la desigualdad sen $x_1 <$ sen $x_2$.

Para cualquier par de números $x_1$ y $x_2$ tenemos, según la fórmula para la diferencia de los senos:

$$\text{sen } x_1 - \text{sen } x_2 = 2 \text{ sen } \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{1}$$

Demostremos que el segundo miembro de la igualdad (1) es negativo, si $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$. La condición $x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ es equivalente a la condición $-\frac{\pi}{2} \leqslant -x_2$. Al sumar esta igualdad con la igualdad $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1$, obtendremos $-\pi \leqslant x_1 - x_2$. Tomando en consideración que la desigualdad $x_1 < x_2$ es equivalente a la desigualdad $x_1 - x_2 < 0$, tenemos $-\pi \leqslant x_1 - x_2 < 0$, o bien $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{x_1 - x_2}{2} < 0$. Por consiguiente, sen $\frac{x_1 - x_2}{2} < 0$. Al sumarlas desigualdades — $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < \frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2} < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, obtenemos $-\pi < x_1 + x_2 < \pi$, o bien $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}$. Por consiguiente, cos $\frac{x_1 + x_2}{2} > 0$.

Así pues, el segundo miembro de la igualdad (1) es inferior a cero, por consiguiente, sen $x_1 <$ sen $x_2$.

Mostremos que en el segmento $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ la función $y = \text{sen } x$ es decreciente, es decir, que para cualquier par de números $x_1$ y $x_2$

tal, que $\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ se verifica la desigualdad sen $x_1 >$ sen $x_2$. Adicionando $(-\pi)$ a las desigualdades $\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{3\pi}{2}$, tenemos $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_1 - \pi < x_2 - \pi \leqslant \frac{\pi}{2}$. En virtud de que en el segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $y =$ sen $x$ es monótona creciente, tenemos para $(x_1 - \pi)$ y $(x_2 - \pi)$ que sen $(x_1 - \pi) <$ sen $(x_2 - \pi)$. Ahora, es válida la cadena de desigualdades equivalentes: sen $(x_1 - \pi) <$

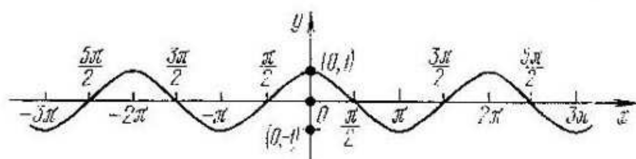



Fig. 108

$<$ sen $(x_2 - \pi) \Leftrightarrow$ sen $[-(\pi - x_1)] <$ sen $[-(\pi - x_2)] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -$ sen $(\pi - x_1) < -$ sen $(\pi - x_2) \Leftrightarrow$ sen $(\pi - x_1) >$ sen $(\pi - x_2) \Leftrightarrow$ sen $x_1 >$ sen $x_2$.

Quiere decir que es válida la desigualdad sen $x_1 >$ sen $x_2$, lo que se trataba de demostrar.

De modo análogo se demuestra que la función $y =$ sen $x$ es creciente en cada intervalo $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, donde $k$ es un número entero cualquiera, y decreciente en cada intervalo $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, donde $k$ es un número entero cualquiera.

h) los puntos de intersección con los ejes coordenados son aquellos que tienen las coordenadas $(\pi k, 0)$, donde $k$ es un número entero cualquiera.

Teniendo presente el carácter periódico de la función, se puede construir la gráfica de la misma $y =$ sen $x$, que se denomina *sinusoide* (fig. 108).

**Cosinusoide $y = \cos x$.** Haciendo uso de las propiedades del coseno de un ángulo, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \cos x$:

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;

b) el campo de variación se $[-1; 1]$;

c) la función está acotada inferior y superiormente;

d) la función toma su valor mínimo $y = -1$ para todo $x_k = \pi + 2\pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera, y el máximo $y = 1$, para cada $x_m = 2\pi m$, donde $m$ es un número entero cualquiera;

e) la función es periódica, el período principal es de $2\pi$;

f) la sunción es par;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero la función es creciente en cada intervalo $[2\pi k - \pi, 2\pi k]$, donde $k$ es un número entero cualquiera, y decreciente en cada intervalo $[2\pi k, 2\pi k + \pi]$, donde $k$ es un número entero cualquiera.

h) el punto de intersección con el eje $Oy$ tiene las coordenadas $(0; 1)$; hay una infinidad de puntos de intersección con el eje $Ox$; cada uno de los puntos $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, 0\right)$, donde $k$ es un número entero cualquiera, es el punto de intersección con el eje $Ox$.

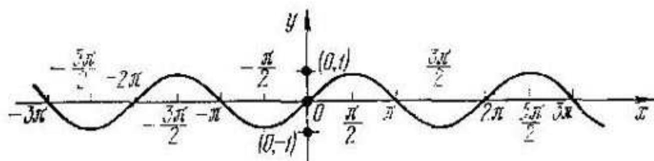



Fig. 109

Teniendo presente el carácter periódico de la función, se puede construir la gráfica ed la misma $y = \cos x$, que se llama *cosinusoide* (fig. 109).

**Curva de tangente $y = \operatorname{tg} x$.** Haciendo uso de las propiedades de la tangente de un ángulo, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \operatorname{tg} x$.

a) el campo de existencia es cualquier $x$, salvo $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera;

b) el campo de variación es $(-\infty, +\infty)$;

c) la función no está acotada;

d) la función no toma el valor máximo ni tampoco el mínimo;

e) la función es periódica, su período principal es $\pi$;

f) la función es impar;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero es creciente en cada uno de los siguientes intervalos $\left(\pi k - \frac{\pi}{2}, \pi k + \frac{\pi}{2}\right)$, donde $k$ es un número entero cualquiera.

h) los puntos de intersección con los ejes coordenados son aquellos que tienen las coordenadas $(\pi m, 0)$, donde $m$ es un número entero cualquiera.

Teniendo presente el carácter periódico, podemos construir la gráfica de la función $y = \operatorname{tg} x$, que se llama *curva de tangente* (fig. 110).

**Curva de cotangente $y = \operatorname{ctg} x$.** Haciendo uso de las propiedades de la cotangente de un ángulo, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \operatorname{ctg} x$:

a) el campo de existencia es cualquier $x$, salvo $x_m = \pi m$, donde $m$ es un número entero cualquiera;

b) el campo de variación es $(-\infty, +\infty)$;

c) la función no está acotada;

d) la función no toma el valor máximo ni el mínimo;

e) la función es periódica, su período principal es $\pi$;

f) la función es impar;

g) la función no es monótona en todo el campo de existencia, pero es decreciente en cada uno de los siguientes intervalos $(\pi m, \pi + \pi m)$, donde $m$ es un número entero cualquiera;

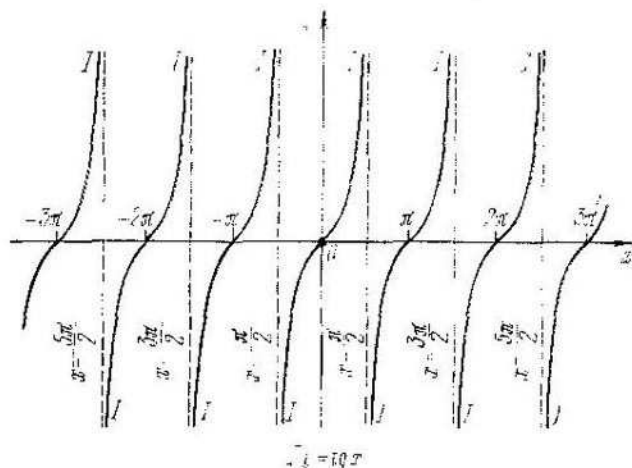



Fig. 110

h) los puntos de intersección con los ejes coordenados son aquellos que tienen por coordenadoas $\left(\frac{\pi}{2} + \pi m, 0\right)$, donde $m$ es un número entero cualquiera.

Tomando en consideración el carácter periódico, se puede construir la gráfica de la función $y = \operatorname{ctg} x$, que se llama *curva de cotangente* (fig. 111).

**Funciones trigonométricas inversas principales.** Las funciones $y = \operatorname{arcsen} x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ se denominan *funciones trigonométricas inversas principales.*

**Función trigonométrica inversa $y = \operatorname{arcsen} x$.** Haciendo uso de las propiedades del arco seno de un número, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \operatorname{arcsen} x$.

a) el caapo de existencia es $[-1; 1]$;

b) el campo de variación es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

c) la función está acotada inferior y superiormente;

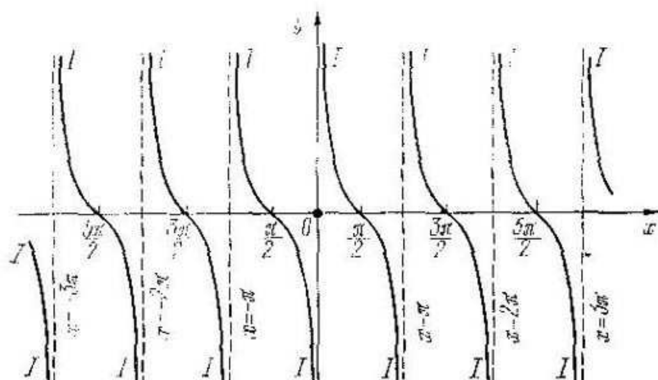
d) la función toma el valor mínimo $y = \frac{\pi}{2}$ cuando $x = -1$, y el valor máximo $y = \frac{\pi}{2}$, cuando $x = 1$;

e) la función no es periódica;

f) la función es impar;

g) la función es creciente en todo el campo de existencia;

Demostremos esta prpiedad. Con este objeto mostremos que si $-1 \leqslant x_1 X x_2 \leqslant 1$, entonces arcsen $x_1 <$ arcsen $x_2$. Denotemos $\alpha_1 =$ arcsen $x_1$ y $\alpha_2 =$ arcsen $x_2$. Está claro que sen $\alpha_1 = x_1$ y sen $\alpha_2 = x_2$, es decir, es necesario demostrar que si sen $\alpha_1 <$ sen $\alpha_2$,




I $y = $ ctg $x$

Fig. 111

entonces $\alpha_1 < \alpha_2$. Realicemos la demostración por reducción al absurdo: sea $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$. Por cuanto en el segmento $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $y =$ sen $x$ es siempre creciente, de la condición $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$ resulta que sen $\alpha_1 \geqslant$ sen $\alpha_2$, lo que contradice la condición sen $\alpha_1 <$ sen $\alpha_2$. Por lo tanto, la suposición no es cierta, es decir, la función $y =$ arcsen $x$ es creciente.

h) el único punto de intersección con los ejes coordenados es el $(0; 0)$.

La gráfica de la función $y =$ arcsen $x$ se expone en la fig. 112.

**Función trigonométrica inversa $y =$ arccos $x$.** Haciendo uso de las propiedades del arco coseno de un número, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y =$ arccos $x$:

a) el campo de existencia es $[-1; 1]$;

b) el campo de variación es $[0, \pi]$;

c) la función está acotada inferior y superiormente;

d) la función toma el valor máximo $y = \pi$ cuando $x = -1$, y el valor mínimo $y = 0$, cuando $x = 1$;

e) la función no es periódica;
f) la función no es par y no es impar;
g) la función es decreciente en todo el campo de existencia;
h) los puntos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y (1; 0) son puntos de intersección con los ejes de coordenadas.

La gráfica de la función $y = \arccos x$ es expone en la fig. 113.

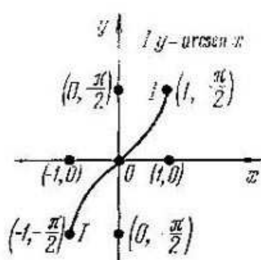


Fig. 112

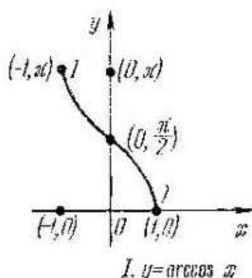


Fig. 113

**Función trigonométrica inversa $y = \operatorname{arctg} x$.** Haciendo uso de las propiedades del arco tangente de un número, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \operatorname{arctg} x$:

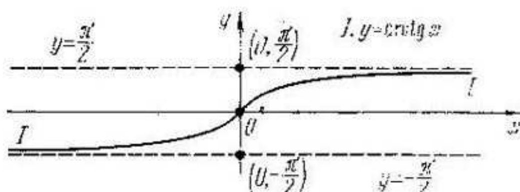


Fig. 114

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;
b) el campo de variación es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
c) la función está acotada inferior y superiormente;
d) la función no toma ni el valor máximo ni el mínimo;
e) la función no es periódica;
f) la función es impar;
g) la función es creciente en todo el campo de existencia;
h) el punto (0; 0) es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

La gráfica de la función $y = \operatorname{arctg} x$ se expone en la fig. 114.

**Función trigonométrica inversa $y = \operatorname{arcctg} x$.** Haciendo uso de

las propiedades del arco cotangente de un número, obtenemos las siguientes propiedades de la función $y = \operatorname{arcctg} x$;

a) el campo de existencia es $(-\infty, +\infty)$;

b) el campo de variación es $(0, \pi)$;

c) la función está acotada superior e inferiormente;

d) la función no toma ni el valor mínimo ni el máximo;

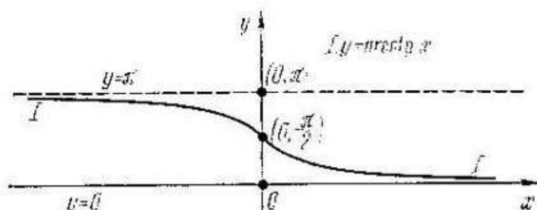



Fig. 115

e) la función no es periódica;

f) la función no es par y no es impar;

g) la función es decreciente en todo el campo de existencia;

h) el punto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

La gráfica de la función $y = \operatorname{arcctg} x$ se expone en la fig. 115.

## § 3. Funciones inversas

**Aplicación biunívoca.** Toda función $y = f(x)$ aplica el campo de existencia de la función sobre el campo de su variación de tal modo que a cada $x$ del campo de existencia le corresponde el único valor $y$ del campo de variación.

Examinemos unas cuantas funciones junto con sus campos de existencia y de variación (tabla 2).

Algunas de las funciones aducidas a *diferentes* $x$ del campo de existencia les ponen en correspondencia *diferentes* $y$. Por ejemplo,

*Tabla 2*

| Función | Campo de existencia | Campo de variación |
|---|---|---|
| $y = x^2$ | $(-\infty; \infty)$ | $[0; \infty)$ |
| $y = \sqrt{1-x^2}$ | $[-1; 1]$ | $[0; 1]$ |
| $y = \frac{1}{1+x^2}$ | $(-\infty; \infty)$ | $(0; 1]$ |
| $y = 2^x$ | $(-\infty; \infty)$ | $(0; \infty)$ |

para la función $y = 2^x$, cualquier valor de $y$ del campo de variación se obtiene sólo para un valor de $x$ del campo de existencia. En estos casos se dice que la función realiza una *aplicación biunívoca* de su campo de existencia sobre el campo de variación. Hemos de notar que todas las demás funciones citadas en la tabla no poseen dicha propiedad:

la función $y = x^2$ toma un mismo valor $y = 1$ tanto para $x = 1$, como para $x = -1$;

la función $y = \sqrt{1-x^2}$ toma un mismo valor $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tanto para $x = \frac{1}{2}$ como para $x = -\frac{1}{2}$;

la función $y = \frac{1}{1+x^2}$ toma un mismo valor $y = \frac{1}{5}$ tanto para $x = 2$, como para $x = -2$.

Así pues, las funciones pueden dividirse en dos clases:

1) funciones que realizan una aplicación biunívoca del campo de existencia sobre el de variación;

2) funciones que no poseen esta propiedad.

Si las funciones de la segunda clase se analizan no en todo el campo de existencia, se logra frecuentemente elegir tal campo de definición (una parte del campo de existencia) que la función aplicará dicho campo de definición sobre el campo correspondiente de variación ya de manera biunívoca. Cabe indicar que culquier función $y = f(x)$ en aquella parte del campo de definición $X$ (perteneciente al campo de existencia de la función), donde ella es estrictamente monótona (es decir, creciente o decreciente) pertenece a la primera clase. Por ejemplo, para la función $y = x^2$ a título de tal campo interviene el intervalo $[0, +\infty)$ o el intervalo $(-\infty, 0]$.

Examinemos la función $y = x^2$ en el campo de definición $X_1 = (-\infty, 0]$ (el campo de variación que le corresponde es $Y_1 = [0, +\infty)$). Esta función realiza una aplicación biunívoca del campo $Y_1$ sobre el campo $Y_1$. En este caso a base de cada $y$ del campo $Y_1$ se puede restablecer de modo unívoco el valor de $x$ del campo $X_1$. Efectivamente, si $y_0 \in Y_1$, entonces el valor correspondiente de $x_0$, tal que $y_0 = x_0^2$, se busca de acuerdo con la regla $x_0 = -\sqrt{y_0}$. En este caso, si $y_0 \neq \overline{y}_0$, entonces $x_0 \neq \overline{x}_0$, donde $x_0 = -\sqrt{y_0}$, y $\overline{x}_0 = -\sqrt{\overline{y}_0}$. Con otras palabras, se puede establecer una aplicación biunívoca del campo $Y_1$ sobre el campo $X_1$ según la regla $x = -\sqrt{y}$.

Así pues, la función $y = x^2$ realiza una aplicación biunívoca del campo $X_1$ sobre el campo $Y_1$, mientras que la regla $x = -\sqrt{y}$ realiza una aplicación biunívoca del campo $Y_1$ sobre el campo $X_1$. La regla $x = -\sqrt{y}$ se llamará *regla inversa* para la función $y = x^2$ en el campo de definición $X_1$ y en el de variación $Y_1$.

Si $x \in X_1 = (-\infty, 0]$ e $y \in Y_1 = [0, +\infty)$, la función $y = x^2$ y la regla $x = -\sqrt{y}$ expresan una misma relación entre las varia-

bles $x$ e $y$; solamente para cualquier par $(x_0, y_0)$ de las variables en consideración la función $y = x^2$ presta la posibilidad de hallar $y_0$, si se conoce $x_0$, y la regla $x = -\sqrt{y}$, hallar $x_0$ conociendo $y_0$.

**Función inversa.** Si en la regla inversa sustituimos $x$ por $y$ e $y$ por $x$, sustituyendo simultáneamente el campo de definición por el de variación, y el campo de variación por el de definición, entonces obtendremos una función nueva $y = -\sqrt{x}$, cuyo campo de definición será $X_2 = [0, +\infty) = Y_1$, y el campo de variación, $Y_2 = (-\infty, 0] = X_1$. Esta nueva función $y = -\sqrt{x}$ con el campo de definición $X_2$ y el campo de variación $Y_2$ se denomina *función inversa* con relación a la función $y = x^2$, cuyos campos de definición y de variación son $X_1$ e $Y_1$, respectivamente.

Para una función $y = x^2$ con el campo de definición $X_3 = [0; 10)$ y el campo de variación $Y_3 = [0; 100)$ la función inversa será $y = \sqrt{x}$, cuyo campo de definición se representa por $X_4 = [0; 100)$ y el de variación, por $Y_4 = [0; 10)$.

Demos a conocer la definición de función inversa en el caso general.

Supongamos que el campo de definición de la función $y = f(x)$ es tal que la función realiza una aplicación biunívoca del campo de su definición $X$ sobre el campo de variación $Y$. Entonces, a partir de cualquier $y$, perteneciente al campo $Y$, se puede restablecer unívocamente el valor de $x$ del campo $X$, procediendo de la manera siguiente: en la igualdad $f(x) - y = 0$ se considera fijo cualquier $y \in Y$ y se busca $x \in X$ que satisfaga la igualdad citada. Cada $x \in X$ encontrado se denota con $f^{-1}(y)$. La igualdad $x = f^{-1}(y)$ lleva el nombre de *regla inversa*. Se denomina *función inversa de la función* $y = f(x)$ $(x \in X, y \in Y)$ aquella que se obtiene a partir de la regla inversa $x = f^{-1}(y)$, sustituyendo $x$ por $y$, e $y$ por $x$ con la sustitución simultánea del campo de definición por el campo de variación y del campo de variación por el de definición. Realizada la sustitución mencionada, el campo de variación de la función $y = f(x)$ se convierte en el campo de definición de la función inversa $y = f^{-1}(x)$, mientras que el campo de definición de la función $y = f(x)$ se hace el campo de variación de la función inversa $y = f^{-1}(x)$. Así pues, dos funciones, a saber $y = f(x)$ con el campo de definición $X$ y el campo de valores $y$, y la función $y = f^{-1}(x)$ con $Y$ e $X$ que intervienen como sus campos de definición y de valores, respectivamente, donde $f[f^{-1}(x)] = x$ para todo $x \in Y$, y $f^{-1}[f(x)] = x$ para todo $x \in X$, son tales que una de ellas es inversa de la otra.

Mostremos en algunos ejemplos cómo se buscan la regla inversa y la función inversa. En todos los ejemplos que se dan a continuación los campos de definición están elegidos de modo tal, que las funciones correspondientes realizan una aplicación biunívoca del campo de definición sobre el campo de variación (tabla 3).

**Observación.** No siempre se logra encontrar para cada función tal campo de definición, que se aplique por ella de manera biunívoca

| Función $y=f(x)$ | Campo de difinición $y=f(x)$ | Campo de variación $y=f(x)$ | Regla inversa $x=f^{-1}(y)$ |
|---|---|---|---|
| $y=x^3$ | $0 \leqslant x < \infty$ | $0 \leqslant y < \infty$ | $x=\sqrt{y}$ |
| $y=x^2$ | $-\infty < x \leqslant 0$ | $0 \leqslant y < \infty$ | $x=-\sqrt{y}$ |
| $y=2^x$ | $-\infty < x < \infty$ | $0 < y < \infty$ | $x=\log_2 y$ |
| $y=\sqrt{1-x^2}$ | $0 \leqslant x \leqslant 1$ | $0 \leqslant y \leqslant 1$ | $x=\sqrt{1-y^2}$ |
| $y=\sqrt{1-x^3}$ | $-1 \leqslant x \leqslant 0$ | $0 \leqslant y \leqslant 1$ | $x=-\sqrt{1-y^2}$ |
| $y=\frac{1}{1+x^2}$ | $0 \leqslant x < \infty$ | $0 < y \leqslant 1$ | $x=\sqrt{\frac{1}{y}-1}$ |
| $y=2x+1$ | $-\infty < x < \infty$ | $-\infty < y < \infty$ | $x=\frac{y-1}{2}$ |
| $y=(x+1)^2$ | $-1 \leqslant x < \infty$ | $0 \leqslant y < \infty$ | $x=\sqrt{y}-1$ |

| Función $y=f(x)$ | Función inversa $y=f^{-1}(x)$ | Campo de definición $y=f^{-1}(x)$ | Campo de variación $y=f^{-1}(x)$ |
|---|---|---|---|
| $y=x^3$ | $y=\sqrt{x}$ | $0 \leqslant x < \infty$ | $0 \leqslant y < \infty$ |
| $y=x^2$ | $y=-\sqrt{x}$ | $0 \leqslant x < \infty$ | $-\infty < y \leqslant 0$ |
| $y=2^x$ | $y=\log_2 x$ | $0 < x < \infty$ | $-\infty < y < \infty$ |
| $y=\sqrt{1-x^3}$ | $y=\sqrt{1-x^2}$ | $0 \leqslant x \leqslant 1$ | $0 \leqslant y \leqslant 1$ |
| $y=-\sqrt{1-x^2}$ | $y=-\sqrt{1-x^2}$ | $0 \leqslant x \leqslant 1$ | $-1 \leqslant y \leqslant 0$ |
| $y=\frac{1}{1+x^2}$ | $y=\sqrt{\frac{1}{x}-1}$ | $0 < x \leqslant 1$ | $0 \leqslant x < \infty$ |
| $y=2x+1$ | $y=\frac{x-1}{2}$ | $-\infty < x < \infty$ | $-\infty < y < \infty$ |
| $y=(x+1)^2$ | $y=\sqrt{x}-1$ | $0 \leqslant x < \infty$ | $-1 \leqslant y < \infty$ |

sobre el campo de variación correspondiente. Por ejemplo, la función $y = 1$ no aplica biunívocamente ningún intervalo de la recta numérica sobre el correspondiente campo de variación. Como otro ejemplo puede aducirse la función de Dirichlet.

**Gráfica de la función inversa.** Aclaremos, ante todo, cómo se disponen los puntos, las coordenadas de uno de los cuales se obtienen a partir de las coordenadas del otro, sustituyendo $x$ por $y$ e $y$ por $x$.

**Teorema** . *Cualesquiera puntos $A$ $(x_0, y_0)$ y $B$ $(y_0, x_0)$ son simétricos respecto de la recta $y = x$.*

**Demostración.** Si $x_0 = y_0$, entonces los puntos $A$ y $B$ (fig. 116) coinciden y se disponen en la recta $y = x$, es decir, en este caso la afirmación del teorema es cierta. Admitamos que $x_0 \neq y_0$ y supongamos que el punto $A$ $(x_0, y_0)$ se dispone en el primer cuadrante, siendo

$x_0 > y_0$. Tracemos, partiendo del punto $A$, una recta $AA_1$ paralela al eje $Ox$, es decir, una recta $y = y_0$; partiendo del punto $B$, tracemos una recta $BB_1$ paralela al eje $Oy$, es decir, la recta $x = y_0$. Las rectas $AA_1$ y $BB_1$ se cortan en el punto $C(y_0, y_0)$, es decir, en un punto dispuesto en la recta $y = x$. Examinemos el triángulo $BCA$; es rectángulo (el ángulo recto es el $BCA$) e isósceles ($|AC| = |BC| = |x_0 - y_0|$). La bisectriz $(CD)$ del ángulo $BCA$ coincide con la recta $y = x$. Por cuanto el triángulo $BCA$ es isósceles, su bisectriz $(CD)$ sirve de altura y de mediana, por consiguiente, $(CD) \perp (AB)$ y $|AD| = |BD|$. Esto significa que los puntos $A$ y $B$ son simétricos respecto de la recta $y = x$. Análogamente se demuestra el teorema para el caso en que el punto $A(x_0, y_0)$ se dispone en el primer cuadrante y $x_0 < y_0$, como también cuando el punto $A(x_0, y_0)$ se dispone no en el primer cuadrante. El teorema está demostrado.

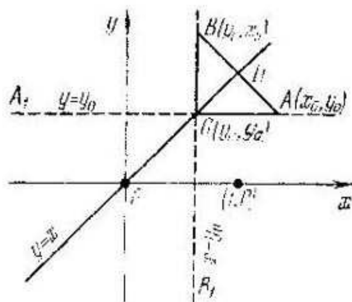



Fig. 116

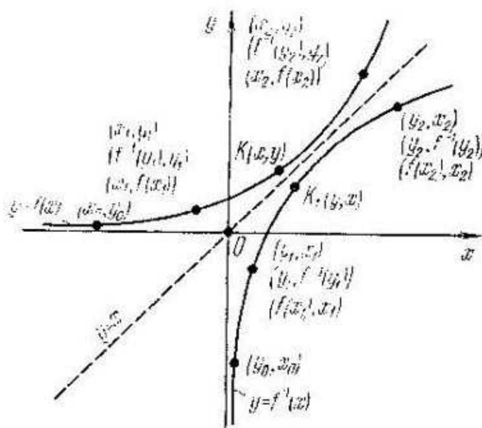



Fig. 117

Supongamos que la función $y = f(x)$ aplica biunívocamente el campo de definición $X$ sobre el campo de variación $Y$. En este caso la gráfica de la función es tal, que según cualquier $x_1$ se halla unívocamente $y_1 = f(x_1)$, y, viceversa, según cualquier $y_2$ se halla unívocamente $x_2 = f^{-1}(y_2)$ (fig. 117).

Si un punto $M(x_1, y_0)$ se dispone en la grafica de la función $y = f(x)$, sus coordenadas satisfacen la condición $y_0 = f(x_0)$, y, por lo tanto, también la condición $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Hablando de otro modo, todos los puntos (y sólo ellos) de la gráfica $y = f(x)$ satisfacen la condición $x = f^{-1}(y)$. Como para obtener una función inversa, es necesario en la regla inversa $x = f^{-1}(y)$ sustituir $x$ por $y$, e $y$ por $x$, todo punto de la gráfica $y = f^{-1}(x)$ se obtiene a partir de un punto correspondiente de la gráfica de la función $y = f(x)$ sustituyendo $x$ por $y$, e $y$ por $x$, es decir, si el punto $K(x, y)$ es un punto de la gráfica $y = f(x)$, entonces $K_1(y, x)$ será un punto de la gráfica $y = f^{-1}(x)$. De estos razonamientos y el teorema se concluye que la gráfica de la función inversa $y = f^{-1}(x)$ se obtiene de la gráfica de la función $y = f(x)$ por la representación simétrica de la última respecto de la recta $y = x$ (véase la fig. 117).

**Observación.** A menudo surge una situación en que la forma de la función inversa no es del todo simple. Por ejemplo, la función $y = x^{2m-1}$, donde $m$ es un número natural fijo, aplica biunívocamente su campo de existencia (toda la recta numérica) sobre el campo de variación $Y = (-\infty, +\infty)$. Para determinar la regla inversa con ayuda de la cual se construye la función inversa, hace falta hallar $x$ que satisfaga la igualdad $x^{2m-1} - y = 0$. Como se sabe (véase el cap. IV), para $y$ no negativo tal $x$ existe, a saber, $x = \sqrt[2m-1]{y}$; para $y$ negativo tal $x$ también existe, a saber, $x = -\sqrt[2m-1]{|y|}$. Por eso, la regla inversa se prefija del modo siguiente:

$$x = \begin{cases} \sqrt[2m-1]{y}, & \text{si } y \in [0, +\infty); \\ -\sqrt[2m-1]{|y|}, & \text{si } y \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Por consiguiente, la función inversa tendrá por expresión

$$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[2m-1]{x}, & \text{si } x \in [0, +\infty); \\ -\sqrt[2m-1]{|x|}, & \text{si } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

A veces la función inversa de una función potencial $y = x^{2m-1}$ se escribe con ayuda de una sola fórmula $y = \sqrt[2m-1]{x}$, mas no lo haremos así, puesto que el símbolo $\sqrt[n]{a}$, se usa por nosotros solamente para los números no negativos $a$.

**Funciones inversas de las funciones trigonométricas fundamentales.** Para cualquiera de las funciones trigonométricas fundamentales, $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, se pueden escoger muchos campos de definición, cada uno de los cuales se aplique biunívocamente por la función trigonométrica correspondiente sobre el correspondiente campo de variación. Además, si una función trigonométrica fundamental se anaiza en su campo de definición, especialmente elegido, como función inversa de ella intervendrá una función trigonométrica inversa correspondiente (véase la tabla 4).

Es evidente que cualquier función trigonométrica fundamental inversa aplica biunívocamente su campo de definición sobre su cam-

*Tabla 4*

| Función $y=f(x)$ | Campo de definición de $f(x)$ | Campo de variación de $y=f(x)$ | Regla inversa $x=f^{-1}(y)$ |
|---|---|---|---|
| $y=\operatorname{sen} x$ | $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ | $-1\leqslant y\leqslant 1$ | $x=\operatorname{arcsen} y$ |
| $y=\cos x$ | $0\leqslant x\leqslant\pi$ | $-1\leqslant y\leqslant 1$ | $x=\arccos y$ |
| $y=\operatorname{tg} x$ | $-\frac{\pi}{2}< x<\frac{\pi}{2}$ | $-\infty< y<\infty$ | $x=\operatorname{arctg} y$ |
| $y=\operatorname{ctg} x$ | $0< x<\pi$ | $-\infty< y<\infty$ | $x=\operatorname{arcctg} y$ |

| Función $y=f(x)$ | Función inversa $y=f^{-1}(x)$ | Campo de definición de $y=f^{-1}(x)$ | Campo de variación de $y=f^{-1}(x)$ |
|---|---|---|---|
| $y=\operatorname{sen} x$ | $y=\operatorname{arcsen} x$ | $-1\leqslant x\leqslant 1$ | $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ |
| $y=\cos x$ | $y=\arccos x$ | $-1\leqslant x\leqslant 1$ | $0\leqslant y\leqslant\pi$ |
| $y=\operatorname{tg} x$ | $y=\operatorname{arctg} x$ | $-\infty< x<\infty$ | $-\frac{\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2}$ |
| $y=\operatorname{ctg} x$ | $y=\operatorname{arcctg} x$ | $-\infty< x<\infty$ | $0< y<\pi$ |

po de variación. Por eso, cada una de estas funciones cuenta con su función inversa, que es una función trigonométrica fundamental correspondiente, pero analizada solamente en el campo de definición correspondiente.

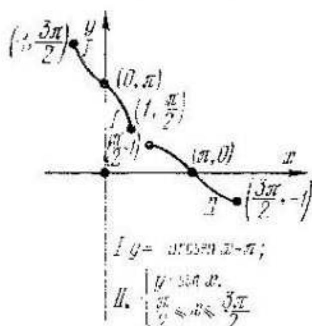



Fig. 118

Por ejemplo, para la función $y = \arccos x$ como función inversa sirve $y = \cos x$, considerada sólo en el segmento $[0, \pi]$; para la función $y = \operatorname{arctg} x$ como función inversa interviene $y = \operatorname{tg} x$, analizada sólo en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Hallemos en conclusión la función inversa para una función $y = \operatorname{sen} x$ con el campo de definición $X\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Es fácil ver que la función $y = \operatorname{sen} x$ aplica biunívocamente el segmento $X$ sobre el segmento $Y = [-1; 1]$, razón por la cual esta función cuenta con su inversa. Para encontrarla tomemos arbitrariamente $y_0 \in Y$, e hallemos $x_0 \in X$, partiendo de la igualdad $\operatorname{sen} x_0 - y_0 = 0$. Es obvio que el número $x_0 = \pi - \operatorname{arcsen} y_0$ satisface dicha igualdad y pertenece al segmento $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Por eso, la regla inversa será $x =$

$= \pi -$ arcsen $y$. Quiere decir, la función inversa es $y = \pi -$ arcsen sen $x$. Así pues, para la función $y =$ sen $x$ con el campo de definición $X = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ interviene como su inversa la función $y = -$arcsen $x + \pi$, con el campo de definición $[-1; 1]$ y campo de variación $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (fig. 118).

## § 4. Superposiciones de funciones y sus gráficas

**Función compuesta.** Supongamos que la función $u = \varphi(x)$ está definida en un conjunto $X$ y el conjunto de valores de esta función integra el campo de existencia de la función $y = F(u)$. En este caso a cualquier $x$ del campo de definición $X$ de la función $u = \varphi(x)$ le corresponde un valor determinado de la variable $u$, y a dicho valor $u$ la función $y = F(u)$ le pone en correspondencia un valor determinado de la variable $y$, es decir, la variable $y$ es una función de $x$ en el conjunto $X$: $y = F[\varphi(x)]$. La función obtenida de otra función se llama *función compuesta de la variable* $x$. La función $u = \varphi(x)$ se denomina *función interior*, y la función $y = F(u)$, *exterior*. Una función compuesta $y = F[\varphi(x)]$ se denomina con frecuencia *superposición* de dos funciones: la interior $u = \varphi(x)$ y la exterior $y = F(u)$. Por ejemplo, si $u = \cos x$ e $y = 2^u$, entonces para cualquier $x$ positivo queda definida la función compuesta $y = 2^{\cos x}$. Las funciones compuestas son, por ejemplo,

$$y = \text{sen}\,(2x + 4), \quad y = \log_2 \text{tg}\, x, \quad y = \text{tg}\,\log_2 x.$$

Las funciones, obtenidas de las funciones elementales fundamentales con ayuda de un número finito de operaciones algebraicas, empleando un número finito de superposiciones, se denominan, habitualmente, *funciones elementales*. Serán funciones elementales, por ejemplo,

$$y = \text{tg}\sqrt{1 - x^2}, \quad y = \log_2 \text{sen}\, 3^{x-4},$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 4x + 1}} + 2\,\text{sen}^2(x - 5).$$

Examinemos los ejemplos que muestran cómo se construye la gráfica de una función compuesta $y = F[\varphi(x)]$, si se conocen la gráfica de la función interior $u = \varphi(x)$ y las propiedades de la función exterior $y = F(u)$ (de los ejemplos examinados se hará claro cómo se construye la gráfica de cualquier función elemental, si se conocen las propiedades y las gráficas de las funciones elementales fundamentales).

**Construcción de la gráfica de la función $y = -f(x)$ según la gráfica de la función $y = f(x)$.** Supongamos que un punto $M_0(x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, que $y_0 = f(x_0)$. Elijamos un punto $M_1(x_0, -y_0)$, simétrico al punto

$M_0$ $(x_0, y_0)$ respecto del eje $Ox$. Las coordenadas del punto $M_1$ $(x_0, -y_0)$ satisfacen la condición $-y_0 = -f(x_0)$, por lo cual el punto $M_1$ $(x_0, -y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = -f(x)$. Por

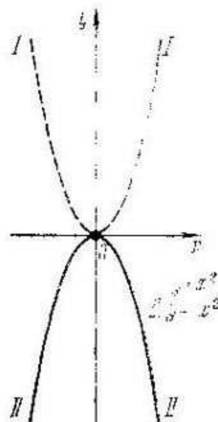


Fig. 119

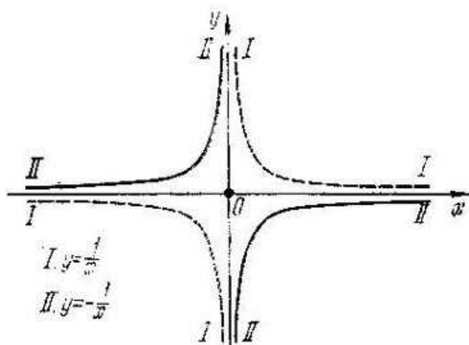



Fig. 120

cuanto el punto $M_0$ $(x_0, y_0)$, perteneciente a la gráfica de la función $y = f(x)$, se ha elegido arbitrariamente, y dado que las funciones $y = f(x)$ e $y = -f(x)$ tienen un mismo campo de definición, entonces la gráfica de la función $y = -f(x)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ por representación simétrica de la última respecto del eje $Ox$. Construyamos, empleando el método descrito, las gráficas de las funciones $y = -x^2$ (fig. 119), $y = -\frac{1}{x}$ (fig. 120), $y = -\log_2(x)$ (fig. 121).

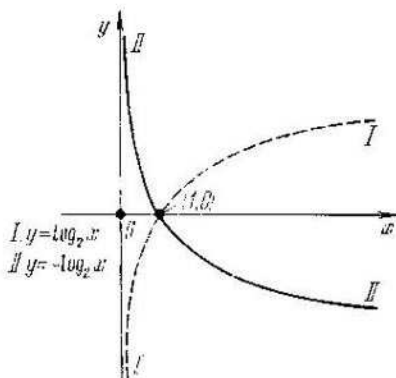



Fig. 121

**Construcción de la gráfica de la función $y = f(-x)$ según la gráfica de la función $y = f(x)$.** Supongamos que un punto $M_0$ $(x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, que $y_0 = f(x_0)$. Elijamos un punto $M_1$ $(-x_0, y_0)$ que sea simétrico al punto $M_0$ $(x_0, y_0)$ respecto del eje $Oy$. Las coordenadas del punto $M_1(-x_0, y_0)$ satisfacen la condición $y_0 = f[-(-x_0)]$, razón por la cual el punto $M_1$ $(-x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(-x)$. Por cuanto el punto $M_0$ $(x_0, y_0)$, perteneciente a la gráfica de la función $y = f(x)$, se ha elegido arbitrariamente, y dado que las

funciones $y = f(x)$ e $y = f(-x)$ tienen campos de definición simétricos con relación al origen de coordenadas, entonces la gráfica de la función $y = f(-x)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ por representación simétrica de la última respecto del eje $Oy$.

Construyamos, empleando el método descrito, las gráficas de las funciones $y = 2^{-x}$ (fig. 122), $y = \log_2(-x)$ (fig. 123).

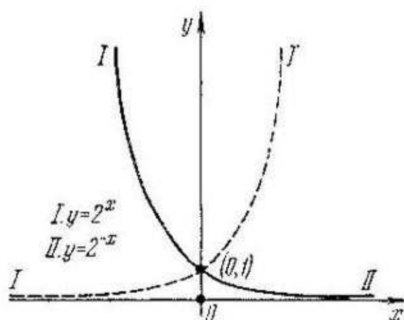



Fig. 122

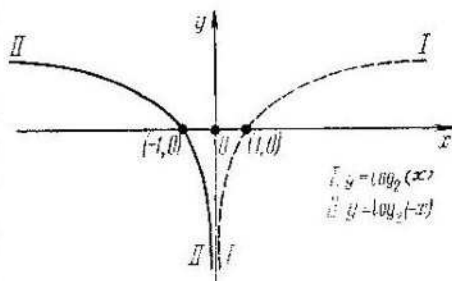



Fig. 123

**Construcción de la gráfica de la función $y = B\,f(x)$, donde $B \neq 0$, según la gráfica de la función $y = f(x)$.** Las funciones $y = f(x)$ e $y = Bf(x)$ tienen un mismo campo de definición. Por consiguiente, al conocer el método, por medio del cual para cualquier $x$ se halla la ordenada de la función $y = Bf(x)$ a base de la ordenada de la función $y = f(x)$, podemos construir la gráfica de la función $y = Bf(x)$, basándonos en la gráfica de la función $y = f(x)$. Supongamos que un punto $M_0(x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, que $y_0 = f(x_0)$. Elijamos un punto $M_1(x_0, By_0)$. Las coordenadas de este punto satisfacen la condición $By_0 = Bf(x_0)$, por lo cual el punto $M_1(x_0, By_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = Bf(x)$. Veamos los casos posibles, en dependencia del número $B$:

1. $B > 1$. El punto $M_1(x_0, By_0)$ se obtiene a partir del punto $M_0(x_0, y_0)$ estirando la ordenada del punto $M_0$ en $B$ veces; la gráfica de la función $y = Bf(x)$ se obtiene de la gráfica para la función $y = f(x)$ estirando la última en $B$ veces a lo largo del eje $Oy$.

2. $B = 1$. Todos los puntos de la gráfica $y = f(x)$ quendan en su lugar.

3. $0 < B < 1$. Por cuanto $B = \frac{1}{\frac{1}{B}}$, entonces el punto $M_1(x_0, By_0)$ se obtiene a partir del punto $M_0(x_0, y_0)$ comprimiendo la ordenada del punto $M_0$ en $\frac{1}{B}$ veces; la gráfica de la función $y =$

$= Bf(x)$ se obtiene a partir de la gráfica de la función $y = f(x)$ comprimiendo en $\frac{1}{B}$ veces las ordenadas de todos los puntos, es decir, comprimiendo en $\frac{1}{B}$ veces la gráfica de la función $y = f(x)$ a lo largo del eje $Oy$.

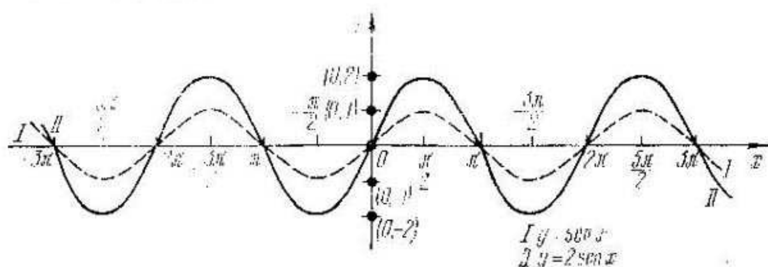



Fig. 124

4. $B < 0$. En este caso $B = -|B|$, y la construcción de la gráfica de la función $y = Bf(x)$ se divide en dos etapas:

a) construcción de la gráfica para la función $y = |B| f(x)$ según la gráfica de la función $y = f(x)$.

b) construcción de la gráfica para la función $y = -|B| f(x)$ según la gráfica de la función $y = |B| f(x)$.

Construyamos, empleando este método, las gráficas de las funciones $y = 2$ sen $x$ (fig. 124) $y = -2x^2$ (fig. 125) e $y = \frac{1}{2}\cos x$ (fig. 126).

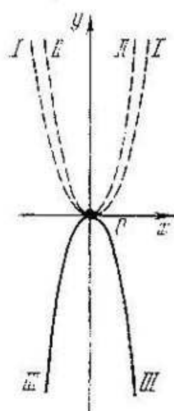



Fig. 125

**Construcción de la gráfica de la función $y = f(kx)$, donde $k \neq 0$, según la gráfica de la función $y = f(x)$.** La función $y = f(kx)$ está definida para todos aquellos valores de $x$, para los cuales el número $kx$ pertenece al campo de definición de la función $y = f(x)$. Supongamos que un punto $M_0(x_0, y_0)$, pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, $y_0 = f(x_0)$. El punto $M_1\left(\frac{1}{k}x_0, y_0\right)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(kx)$, puesto que sus coordenadas satisfacen la condición $y_0 = f\left(k\frac{x_0}{k}\right)$. Examinemos diferentes casos que pueden tener lugar en función del número $k$.

1. $k > 1$. El punto $M_1\left(\frac{1}{k}x_0, y_0\right)$ se obtiene a partir del punto $M_0(x_0, y_0)$ comprimiendo en $k$ veces la abscisa del punto $M_0$; la gráfica de la función $y = f(kx)$ se obtiene a partir de la gráfica para

la función $y = f(x)$ comprimiendo en $k$ veces las abscisas de todos los puntos, es decir, comprimiendo en $k$ veces la gráfica de la función $y = f(x)$ a lo largo del eje $Ox$.

2. $k = 1$. Todos los puntos de la gráfica $y = f(x)$ quedan en su lugar.

3. $0 < k < 1$. El punto $M_1\left(\frac{1}{k}x_0,\ y_0\right)$ se obtiene a partir del punto $M_0(x_0, y_0)$ estirando la abscisa del punto $M_0$ en $\left(\frac{1}{k}\right)$ veces;

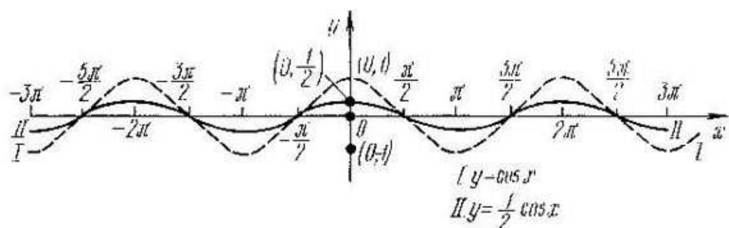



Fig. 126

la gráfica de la función $y = f(kx)$ se obtiene de la gráfica para la función $y = f(x)$ estirando en $\left(\frac{1}{k}\right)$ veces las abscisas de todos los

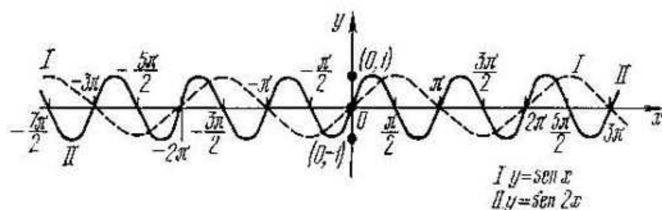



Fig. 127

puntos, es decir, estirando en $\left(\frac{1}{k}\right)$ veces la gráfica de la función $y = f(x)$ a lo largo del eje $Ox$.

4. $k < 0$. En este caso $k = -|k|$ y la construcción de la gráfica de la función $y = f(kx)$ se divide en dos etapas:

a) construcción de la gráfica de la función $y = f(|k|x)$ según la gráfica de la función $y = f(x)$;

b) construcción de la gráfica de la función $y = f(-|k|x)$, según la gráfica $y = f(|k|x)$.

Construyamos, empleando este método, las gráficas de las funciones $y = \text{sen}\, 2x$, $y = 2^{-2x}$, $y = \log_2\left(-\frac{1}{3}x\right)$.

**Construcción de la gráfica para la función $y = f(x - a)$, donde $a \neq 0$, según la gráfica de la función $y = f(x)$.** La función $y =$

$= f(x - a)$ está definida para todos aquellos $x$, para los cuales $(x - a)$ pertenece al campo de definición de la función $y = f(x)$. Supongamos que el punto $M_0(x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, que $y_0 = f(x_0)$. Entonces el punto

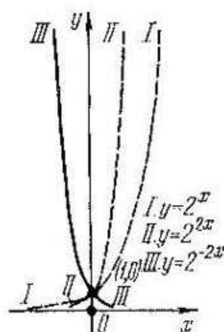



Fig. 128

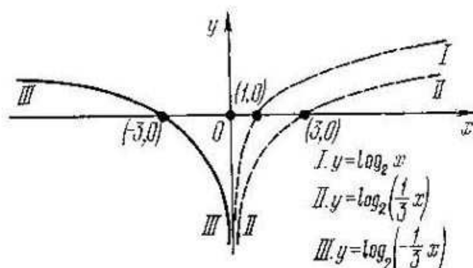



Fig. 129

$M_1(x_0 + a, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x - a)$, puesto que sus coordenadas satisfacen la condición $y_0 = f[(x_0 + a) - a] = f(x_0)$. Por consiguiente, todo punto $M_1$ de la gráfica

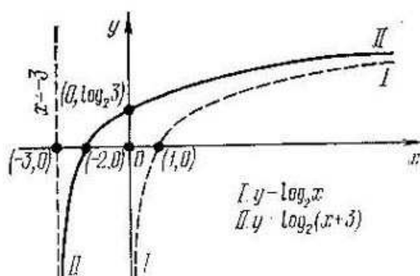



Fig. 130

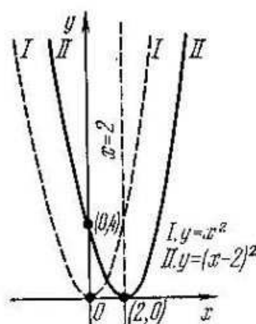



Fig. 131

de la función $y = f(x - a)$ se obtiene a partir del punto correspondiente $M_0$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ desplazando este último a lo largo del eje $Ox$ a la magnitud $a$. En este caso, si $a > 0$, el desplazamiento se realiza a la derecha a la magnitud $a$, y si $a < 0$, el desplazamiento se efectúa a la izquierda a la magnitud $|a|$. Así pues, la gráfica de la función $y = f(x - a)$ se obtiene a partir de la gráfica para la función $y = f(x)$, desplazando la última, como un cuerpo rígido, a lo largo del eje $Ox$ a la magnitud $a$.

Construyamos, empleando este método, las gráficas para las funciones $y=\log_2(x+3)$, $y=(x-2)^2$, $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ (véanse las figs. 130, 131, 132).

**Construcción de la gráfica $y = f(x) + b$, donde $b \neq 0$, según la gráfica de la función $y = f(x)$.** Las funciones $y = f(x) + b$ e $y = f(x)$ tienen un mismo campo de definición. Por consiguiente, conociendo cómo se halal para cualquier $x$ la ordenada de la función $y = f(x) + b$, según la ordenada de la función $y = f(x)$, se puede construir la gráfica para la función $y = f(x) + b$, partiendo de la gráfica para la función $y = f(x)$. Supongfiamos que un punto

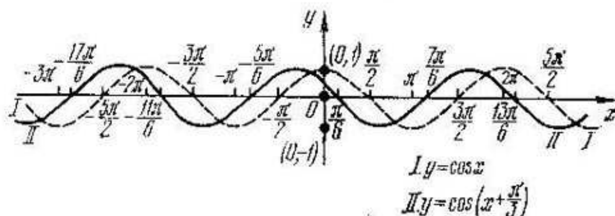



Fig. 132

$M_0(x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, que $y_0 = f(x_0)$. Tomemos el punto $M_1(x_0, y_0 + b)$. Sus coordenadas satisfacen la condición $y_0 + b = f(x_0) + b$. Por consiguiente, para obtener el punto $M_1$ se debe desplazar el punto $M_0$ a lo largo del eje $Oy$ a la magnitud $b$. En este caso, si $b > 0$, el desplazamiento se realiza hacia arriba a la magnitud $b$; si $b < 0$, hacia abajo a la magnitud $|b|$.

Construyamos, empleando este método, las gráficas para las funciones $y = 2^x - 3$ (fig. 133), $y = x^2 - 1$ (fig. 134), $y = \operatorname{sen} x + 1$ (fig. 135).

**Construcción de la gráfica de la función $y = Bf[k(x-a)] + b$ según la gráfica de la función $y = f(x)$.** La gráfica de la función $y = Bf[k(x-a)] + b$ se construye según la gráfica para la función $y = f(x)$, aplicando sucesivamente los métodos mencionados más arriba.

Por ejemplo, así:

$$y = f(x) \to y = f(kx) \to y = Bf(kx) \to y = Bf[k(x-a)] \to y = Bf[k(x-a)] + b.$$

Mostremos con varios ejemplos cómo se aplica este método.

Constrúyase la gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$.

Transformemos el trinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$, formando un cuadrado perfecto:

$$ax^2+bx+c=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Se pide, pues, construir la gráfica de la función

$$y = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Construyamos, al principio, la gráfica de la función $y = x^2$. Luego, estirando la gráfica obtenida a lo largo del eje $Oy$ en $|a|$ veces, la

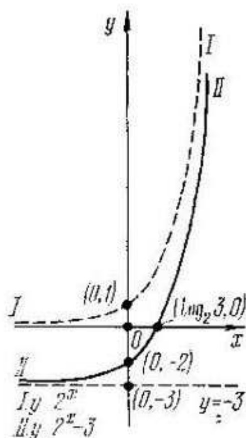



Fig. 133

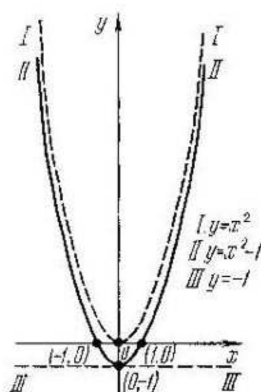



Fig. 134

gráfica de la función $y = |a|x^2$. Si $a > 0$, nos servirá la gráfica construida de la función $y = ax^2$. Si $a < 0$, entonces, apliquemos la gráfica de la función $y = |a|x^2$ respecto del eje $Ox$ y obtengamos la gráfica de la función $y = ax^2$. Por fin, desplazando la gráfica

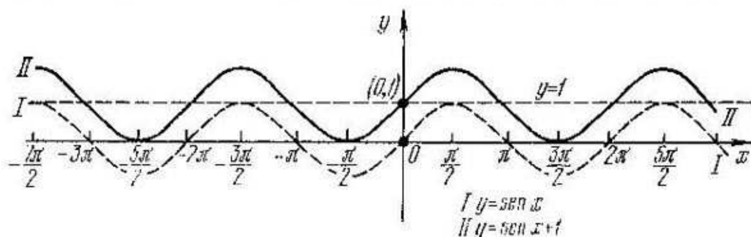



Fig. 135

de la función $y = ax^2$ a lo largo del eje $Ox$ a la magnitud $\left(-\frac{b}{2a}\right)$, y luego, desplazando la gráfica obtenida de la función $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ a lo largo del eje $Oy$ a la magnitud $\frac{4ac - b^2}{4a}$, obtendremos la gráfica para la función $y = ax^2 + bx + c$.

Ilustremos todas estas etapas de construcción de la gráfica para un trinomio de segundo grado en el siguiente ejemplo: constrúyase

la gráfica de la función $y = -2x^2 + 3x + 1$. Transformemos el trinomio de segundo grado $-2x^2+3x+1 = -2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$, y construyamos, de acuerdo con el esquema expuesto, la gráfica de la función $= -2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$ (fig. 136).

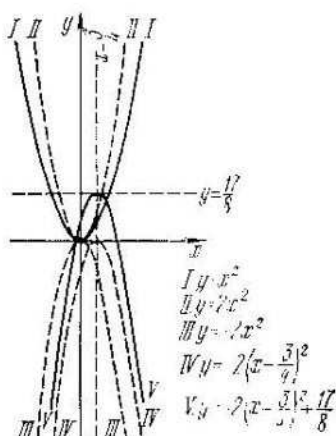


Fig. 136

**Teorema 1**. *La gráfica de la función $y = kx + b$ es una recta que corta el eje $Oy$ en el punto $M(0, b)$ y que forma con la dirección positiva del eje $Ox$ un ángulo cuya tangente es igual a $k$.*

**Demostración**. Demostremos que la gráfica de la función $y = kx$ representa una recta que pasa por el origen de coordenadas y que forma con la dirección positiva del eje $Ox$ un ángulo cuya tangente es igual a $k$.

Analicemos varios casos:

a) $k = 0$. Entonces la gráfica de la función $y = 0$ es el propio eje $Ox$ (una línea recta) y $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

b) $k > 0$. Entonces todos los puntos de la gráfica de la función $y = kx$ se disponen en los cuadrantes primero o tercero. El origen de coordenadas pertenece a la gráfica de la función $y = kx$. Tomemos un punto $M_0(x_0, y_0)$ que es distinto del origen de coordenadas y que pertenece a la gráfica de la función $y = kx$, es decir, un punto tal, que $y_0 = kx_0$. Tracemos por los puntos $M_0(x_0, y_0)$ y $O(0, 0)$ una recta y mostremos que ésta será precisamente la gráfica de la función $y = kx$.

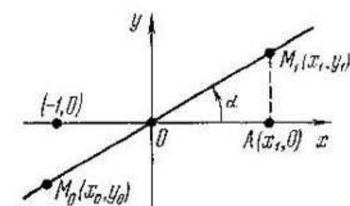


Fig. 137

Supongamos que la recta construida forma con la dirección positiv del eje $Ox$ un ángulo $\alpha$, entonces $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|y_0|}{|x_0|} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{kx_0}{x_0} = k$. Elijamos en esta recta un punto $M_1(x_1, y_1)$ que sea distinto de los puntos $O$ y $M_0$ (supóngase, para concretar, que $M_1$ está en el primer cuadrante). Del triángulo rectángulo $OAM_1$ (fig. 137) encontramos que $|AM_1| = |OA| \operatorname{tg}\alpha$. Por cuanto $|AM_1| = y_1$, $|OA| = x_1$, y $\operatorname{tg}\alpha = k$, tenemos que $y_1 = kx_1$. Esto significa que las coordenadas de cualquier punto de la recta construida satisfacen la condición $y = kx$.

Supongamos ahora que $x_2$ e $y_2$ son tales, que $y_2 = kx_2$ (admiti-

mos, para concretar, que $x_2 > 0$, y, por consiguiente, $y_2 > 0$). Construyamos un punto $M_2$ $(x_2, y_2)$. El punto $M_2$ ha de encontrarse en la recta construida, pues, si el punto $M_2$ no cae en esta recta, entonces por el origen de coordenadas pasarán dos rectas diferentes que formarán con la dirección positiva del eje $Ox$ un mismo ángulo $\alpha$, lo que es imposible.

Así pues, los puntos de la recta construida, y sólo ellos, satisfacen la condición $y = kx$, es decir, la gráfica de la función $y = kx$ es precisamente la recta construida.

c) $k < 0$. En este caso la gráfica de la función $y = |k| x$ se representa por una recta que pasa por el origen de coordenadas y que forma con la dirección positiva del eje $Ox$ un ángulo cuya tangente es igual a $|k|$. La gráfica de la función $y = -|k| x$ se obtiene a partir de la gráfica mencionada por aplicación simétrica respecto del eje $Ox$, razón por la cual la gráfica de $y = -|k| x$ es una recta que forma con la dirección positiva del eje $Ox$ un ángulo cuya tangente es igual a $-|k| = k$.

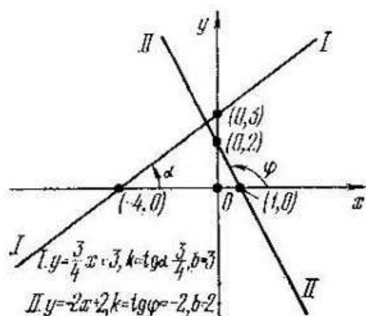


Fig. 138

Para acabar con la demostración resta decir que la gráfica de la función $y = kx + b$ se obtiene a partir de la recta $y = kx$, desplazándola como un cuerpo rígido a lo largo del eje $Oy$ a la magnitud $b$. Como resultado de este procedimiento, el punto $O$ (0, 0) de la gráfica de la función $y = kx$ se trasladará al punto $A$ $(0, b)$ de la gráfica para la función $y = kx + b$. El teorema queda demostrado.

Construyamos, empleando este método, las gráficas de las funciones $y = \frac{3}{4}x + 3$ (fig. 138, I), $y = -2x + 2$ (fig. 138, II).

**Construcción de la gráfica de la función $y = |f(x)|$ según la gráfica de la función $y = f(x)$.** Recordemos, ante todo, la definición:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ para aquellos } x, \text{ donde } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) \text{ para aquellos } x, \text{ donde } f(x) < 0. \end{cases}$$

Supongamos que el punto $M_0$ $(x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, es decir, sea $y_0 = f(x_0)$. Analicemos dos casos:

a) $y_0 \geqslant 0$. Entonces, por cuanto $|f(x_0)| = f(x_0) = y_0$, el punto $M_0$ $(x_0, y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = |f(x)|$.

b) $y_0 < 0$. Entonces, por cuanto $|f(x_0)| = -f(x_0) = -y_0$, el punto $M_1$ $(x_1, -y_0)$ pertenece a la gráfica de la función $y = |f(x)|$. Por consiguiente, la gráfica de la función $y = |f(x)|$ se obtene a partir de la gráfica para la función $y = f(x)$) del modo siguiente:

todos los puntos de la gráfica $y = f(x)$, dispuestos en el eje $Ox$ y por arriba de éste, quedan en su lugar;

todos los puntos de la gráfica $y = f(x)$, dispuestos por debajo del eje $Ox$, se aplican simétricamente respecto del eje $Ox$.

Observemos que la gráfica de la función $y = |f(x)|$ no tiene puntos por debajo del eje $Ox$.

Construyamos, empleando este método, las gráficas para las funciones $y = |x^2 - 1|$ (fig. 139), $y = |2^x|$ (véase la fig. 104, II), $y = |\log_2 x|$ (fig. 140), $y = |\operatorname{sen} x|$ (fig. 141).

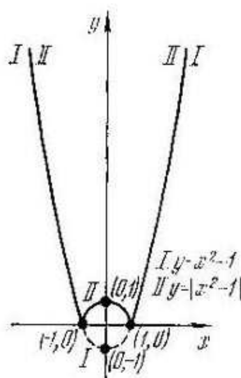


Fig. 139

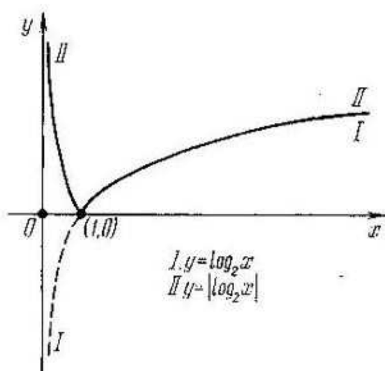


Fig. 140

**Construcción de la gráfica de la función $y = f(|x|)$ según la gráfica de la función $y = f(x)$.** Cabe notar que la función $y = f(|x|)$ es par, puesto que $f(|-x|) = f(|x|)$. La gráfica de una función

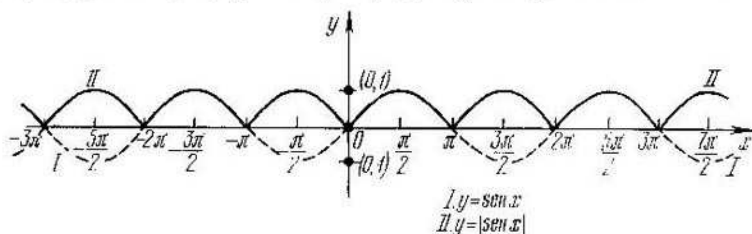


Fig. 141

par se construye del modo siguiente: se construye la gráfica de esta función para todos los $x \geqslant 0$; con el fin de construir la gráfica de dicha función para $x < 0$, la parte construida se aplica simétricamente respecto del eje $Oy$. Por cuanto $|x| = x$, cuando $x \geqslant 0$, entonces para $x \geqslant 0$, la gráfica de la función $y = f(|x|)$ coincide con la gráfica de la función $y = f(x)$. Con el objeto de construir la gráfica de la función $y = f(|x|)$ para $x < 0$ se debe aplicar simétricamente

respecto del eje $Oy$ la parte de la gráfica $y = f(|x|)$ ya construida para $x \geqslant 0$. En la construcción de la gráfica de la función $y = f(|x|)$ un papel esencial lo desempeñan los puntos de la gráfica de la función $y = f(x)$ dispuestos en el eje $Oy$ o a la derecha de él; los puntos

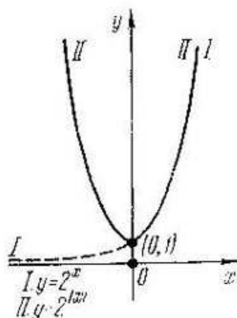



Fig. 142

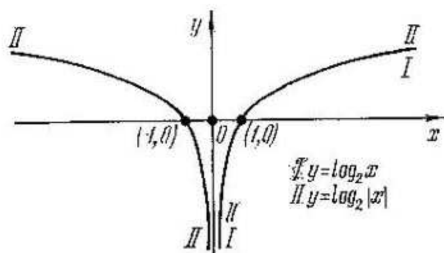



Fig. 143

de la gráfica, dispuestos a la izquierda del eje $Oy$, no tienen importancia alguna, por consiguiente, para construir la gráfica de la función $y = f(|x|)$ es necesario:

a) borrar todos los puntos de la gráfica para la función $y = f(x)$ dispuestos a la izquierda del eje $Oy$;

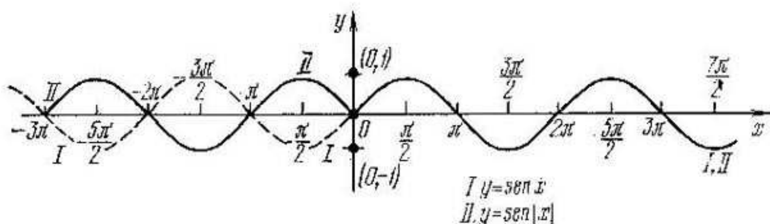



Fig. 144

b) dejar en su lugar todos los puntos de la gráfica de la función dispuestos en el eje $Oy$ y a la derecha de éste;

c) aplicar simétricamente la parte derecha de la gráfica respecto del eje $Oy$.

Construyamos, empleando este método, las gráficas de las funciones $y = 2^{|x|}$ (fig. 142), $y = \log_2 |x|$ (fig. 143), $y = \text{sen } |x|$ (fig. 144).

**Construcción de la gráfica de la función $y = F(f(x))$ según la gráfica de la función $y = f(x)$.** En los casos más complicados que los analizados anteriormente la gráfica de la función $y = F(f(x))$ se construye haciendo uso de la gráfica de la función $y = f(x)$ y de las propiedades de la función $y = F(x)$. Sin ofrecer

recomendaciones generales mostremos con algunos ejemplos cómo se hace esto.

Constrúyanse, haciendo uso de la gráfica de la función $y = \text{sen } x$ (fig. 108), las gráficas de las funciones:

$y = 2^{\text{sen } x}$

a) el campo de definición de la función $y = 2^{\text{sen } x}$ lo representan todos los números reales;

b) por cuanto la función $y = \text{sen } x$ es periódica con un período principal igual a $2\pi$, entonces la función $y = 2^{\text{sen } x}$ es también periódica y su período principal es $2\pi$;

$y = \log_2 \text{sen } x$

a) el campo de definición de la función $y = \log_2 \text{sen } x$ lo representan todos aquellos $x$, para los cuales $\text{sen } x > 0$, es decir, todos los $x$, donde la gráfica de la función $y = \text{sen } x$ se dispone por encima del eje $Ox$;

b) por cuanto la función $y = \text{sen } x$ es periódica de período principal igual a $2\pi$, entonces la función $y = \log_2 \text{sen } x$ es también periódica y su período principal es $2\pi$.

Por eso, construiremos las gráficas de ambas funciones sólo en el segmento $[0, 2\pi]$ y, a continuación, las prolongaremos periódicamente.

c) por cuanto en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $y = \text{sen } x$ crece de 0 a 1, entonces la función $y = 2^{\text{sen } x}$ en el mismo intervalo crece de 1 a 2; en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ la función $y = \text{sen } x$ decrece de 1 a $(-1)$, mientras que la función $y = 2^{\text{sen } x}$ decrece de 2 a $\frac{1}{2}$; en el intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ la función $y = \text{sen } x$ crece de $(-1)$ a 0, y la función $y = 2^{\text{sen } x}$ crece de $\frac{1}{2}$ a 1.

c) por cuanto en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $y = \text{sen } x$ crece de 0 a 1, entonces la función $y = \log_2 \text{sen } x$ en el mismo intervalo crece de $(-\infty)$ a 0; en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ la función $y = \text{sen } x$ decrece de 1 a 0, mientras que la función $y = \log_2 \text{sen } x$ decrece de 0 a $(-\infty)$; en el intervalo $[\pi, 2\pi]$ la función $y = \text{sen } x$ es no positiva, por lo cual en este intervalo la función $y = \log_2 \text{sen } x$ no está definida (no hay aquí puntos de la gráfica de esta función).

Las propiedades citadas permiten construir las gráficas requeridas en el intervalo $[0, 2\pi]$ y hacer continuarlas periódicamente (figs. 145, 146).

Los razonamientos aducidos muestran cómo la gráfica de una función ayuda a elegir los intervalos necesarios para analizar las propiedades de las funciones compuestas y, de este modo, contribuye a construir la gráfica de una función compuesta.

**Adición de las gráficas.** Sean dadas las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$. En la parte común de sus campos de existencia queda definida la función $y = f(x) + g(x)$. Supongamos que el punto $M_1(x_0, y_1)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, y el punto

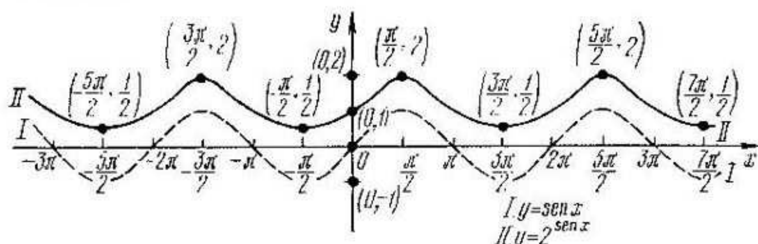



Fig. 145

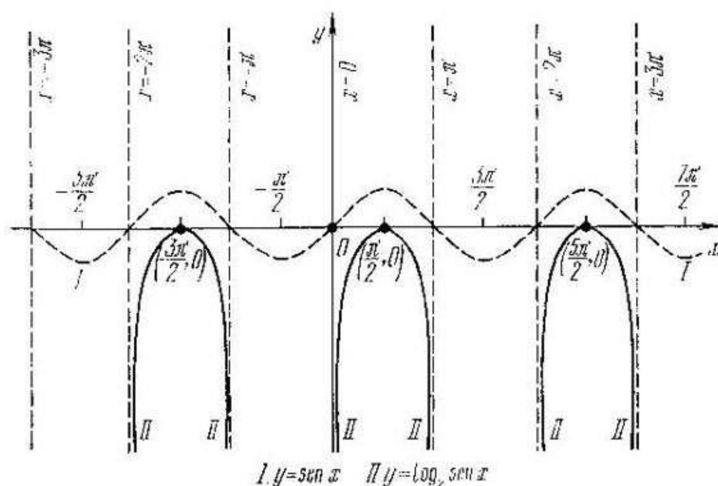



Fig. 146

$M_2(x_0, y_2)$ pertenece a la gráfica de la función $y = g(x)$, con la particularidad de que el número $x_0$ pertenece a la parte común de los campos de existencia de las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$. En este caso el punto $M_3(x_0, y_1 + y_2)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x) = g(x)$. Quiere decir, para construir la gráfica de la función $y = f(x) + g(x)$ es necesario:

a) dejar aquellos puntos de las gráficas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en los que $x$ integra la parte común de los campos de existencia de estas funciones;

b) para cada tal $x$ realizar la adición algebraica de las ordenadas (correspondientes al $x$ dado) de estas dos gráficas.

Construyamos, empleando este método, la gráfica de la función $y = x + \text{sen}\, x$ (fig. 147).

**Multiplicación de las gráficas.** Sean dadas las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$. Entonces, en la parte común de sus campos de existencia queda definida la función $y = f(x)\, g(x)$. Supongamos que el punto

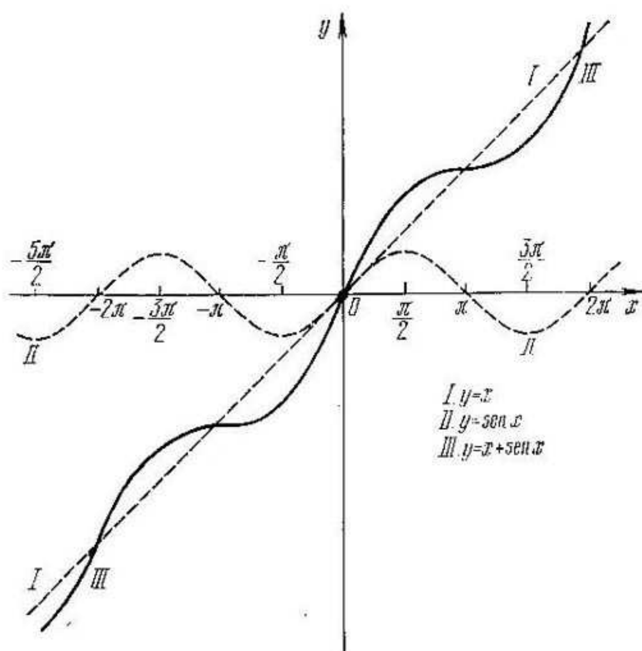



Fig. 147

$M_1(x_0, y_1)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)$, y el punto $M_2(x_0, y_2)$, a la gráfica de la función $y = g(x)$. Está claro que el número $x_0$ pertenece a la parte común de los campos de existencia de la función $y = f(x)$ e $y = g(x)$. En este caso el punto $M_3(x_0, y_1 y_2)$ pertenece a la gráfica de la función $y = f(x)\, g(x)$. Quiere decir, para construir la gráfica de la función $y = f(x)\, g(x)$ es necesario:

a) dejar aquellos puntos de las gráficas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, en los cuales $x$ integra la parte común de los campos de existencia de estas funciones;

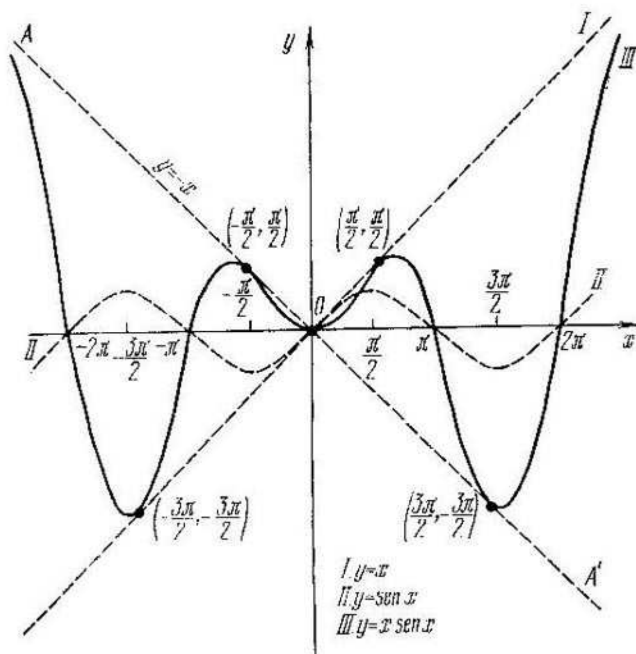



Fig. 148

b) para cada tal $x$ realizar la multiplicación de las ordenadas (correspondientes al $x$ dado) de estas dos gráficas.

Construyamos, empleando este método, la gráfica de la función $y = x \operatorname{sen} x$ (fig. 148).

### *Ejercicios*

Hállense el campo de definición y el campo de variación de la función (1 . . . 6):

1. $y=\sqrt{x-1}$. 2. $y=\frac{x^2-4}{x^2-9}$. 3. $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}$.

4. $y=\sqrt[3]{1+x}$. 5. $y=\frac{\sqrt{x(x+1)}}{x+4}$. 6. $y=\sqrt{x^2-1}$.

¿Coincidirán los campos de definición de las funciones (si no, entonces hállese la parte común de los campos de definición de las funciones en comparación) (7 . . . 14):

7. $y=x$ e $y=\frac{x^2}{x}$; 8. $y=\operatorname{sen}\pi x$ e $y=\operatorname{tg}\pi x$;

9. $y=\cos\pi x$ e $y=\operatorname{ctg}\pi x$; 10. $y=\operatorname{tg}x$ e $y=\operatorname{ctg}x$;

11. $y=\operatorname{arcsen}x$ e $y=\operatorname{arctg}x$; 12. $y=\operatorname{arcsen}x$ e $y=\arccos x$;

13. $y=\operatorname{arcsen}x$ e $y=\operatorname{arcctg}x$; 14. $y=\arccos x$ e $y=\operatorname{arcctg}x$?

15. ¿Qué significa: una función está acotada superiormente (inferiormente;
— una función no está acotada superiormente (inferiormente);
— una función está acotada;
— una función no está acotada?

16. Muéstrese que la función $y=\frac{1}{x}$ no está acotada superiormente ni tampoco inferiormente.

17. Muéstrese que la función $y = x^2$ no está acotada superiormente.

18. Muéstrese que la función $y = x^3$ no está acotada.

19. Dése un ejemplo de función que no sea par ni impar.

20. ¿Puede representarse cualquier función en forma de la suma de las funciones par e impar?

Analícense los ejemplos: 1) $y = \sqrt{x}$, 2) $y = \log_2 x$.

Demuéstrese la monotonía de las funciones (21 . . . 24):

21. $y = \log_{1/2} x$; 22. $y = 2^x$; 23. $y = \sqrt{x}$; 24. $y = x^3$.

¿Serán monótonas las funciones (si no, hállense los intervalos de monotonía) (25 . . . 43):

25. $y=\frac{1}{|x|}$; 26. $y=x-[x]$; 27. $y=\operatorname{sign} \lg x$;

28. $y=\sqrt[3]{x^2}$; 29. $y=\log_{1/2} \arccos x$;

30. $y=\operatorname{arctg} x^2$; 31. $y=\sqrt{5-4x}$;

32. $y=\operatorname{sen} \arccos x$; 33. $y=\operatorname{tg}^2 x$;

34. $y=\operatorname{sign} x$; 35. $y=\lg \cos x$; 36. $y=\sqrt{\operatorname{ctg} x}$;

37. $y=\operatorname{arctg} |x|$; 38. $y=\frac{x+1}{x-1}$;

39. $y=|x^2-3x+2|$; 40. $y=\sqrt{1-x^2}$;

41. $y=[\operatorname{sen} x]$; 42. $y=2^{\operatorname{tg} x}$; 43. $y=\frac{1}{\operatorname{arcsen} x}$?

44. ¿Puede ser una función no monótona la suma de dos funciones monótonas?

45. ¿Es siempre el producto de las funciones monótonas crecientes una función monótona creciente?

46. Sea dada en el intervalo $[0, 2]$ una función

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{si } 0\leqslant x<1,\\ 5, & \text{si } x=1,\\ x+3, & \text{si } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

Represéntese ésta en forma de la diferencia de dos funciones monótonas crecientes.

47. ¿Se puede representar en forma de la diferencia entre dos funciones monótonas una función no monótona?

48. Demuéstrese que la función $y = \{x\}$ (parte fraccionaria de $x$) es periódica. Hállese su período y constrúyase la gráfica de esta función.

49. Dése un ejemplo de función que no sea constante y el período de la cual es cualquier número real.

50. Hállese el período de las funciones $y = \cos(\operatorname{sen} x)$ e $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$.

51. Está dada una función periódica de período $T = 2\pi$ que se define en el segmento $[-\pi, \pi]$ del modo siguiente:

$$y=\begin{cases} 0, & \text{si } -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ x, & \text{si } 0<x\leqslant \pi.\end{cases}$$

Constrúyase la gráfica de esta función.

**52.** Una función periódica de período $T = 2$ se define en el segmento $[-1; 1]$ del modo siguiente:

$$y = \begin{cases} x+1, & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x, & \text{si} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Constrúyase la gráfica de esta función.

53. Una función periódica de período $T = 3$ está definida del modo siguiente: $y = 2 - x$, si $0 < x \leqslant 3$. Constrúyase la gráfica de esta función.

54. Muéstrese que cualquier número $T$ tal, que $0 < T < 2\pi$ no es el período de la función $y = \text{sen}\, x$.

55. Muéstrese que un número $T = \pi$ es el período mínimo para la función $y = \text{tg}\, x$.

56. Muéstrese que cualquier número $T$ tal, que $0 < T < \pi$ no es el período de la función $y = \text{ctg}\, x$.

57. Muéstrese que un número $T = 2\pi$ es el período mínimo para la función $y = \cos x$.

58. Demuéstrese que para cualquier $x$ se verifica la desigualdad $|\text{sen}\, x| \leqslant |x|$.

59. Demuéstrese que para cualquier $x$ del intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se verifica la desigualdad $|\text{tg}\, x| \geqslant |x|$.

Constrúyanse, en un mismo sistema de coordenadas, las gráficas de los grupos de funciones indicados y aclárese su disposición mutua (60 . . . 65):

**60.** $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$.

**61.** $y = x$, $y = \text{arcsen}\, x$.

**62.** $y = x$, $y = \text{arcctg}\, x$.

**63.** $y = x$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$.

**64.** $y = -x + \frac{\pi}{2}$, $y = \cos x$.

65. $y = -x + \frac{\pi}{2}$, $y = \text{ctg}\, x$.

Constrúyase la gráfica de las siguientes funciones (66 . . . 143):

**66.** $y = \sqrt{\cos x}$. **67.** $y = \sqrt{\text{tg}\, x}$. **68.** $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$.

**69.** $y = \sqrt{2^x}$. **70.** $y = \text{sen}^2\, x$. **71.** $y = \text{ctg}^2\, x$.

**72.** $y = \cos^3 x$. **73.** $y = \log_{\frac{1}{2}}^{2} x$. **74.** $y = \text{arcsen}\, x^2$.

75. $y = \text{arctg}\, \frac{1}{x}$. 76. $y = [\text{sen}\, x]$. **77.** $y = \left[\frac{1}{x}\right]$.

**78.** $y = [2^x]$. **79.** $y = [\log_2 x]$. **80.** $y = [\text{arcsen}\, x]$.

**81.** $y = [\text{arctg}\, x]$. **82.** $y = [\arccos x]$. **83.** $y = [\text{arcctg}\, x]$.

**84.** $y = \text{sign} \arccos x$. **85.** $y = \text{sign arctg}\, x$. **86.** $y = \text{sign} \cos x$.

**87.** $y = \text{sign}\, x^2$. **88.** $y = [x^2]$. **89.** $y = \text{sign}\, \frac{1}{x}$.

**90.** $y = \text{sign} \ln x$. **91.** $y = [\sqrt{x}]$. **92.** $y = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$.

**93.** $y = \log_2 [\text{tg}\, x]$. **94.** $y = \log_{1/2} [\text{sen}\, x]$. **95.** $y = \text{arcsen} \cos x$.

96. $y = \begin{cases} 2^x, & \text{si} \quad x \leqslant -1, \\ \frac{1}{x}, & \text{si} \quad -1 < x < 0, \\ x^2, & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$ **97.** $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si} \quad x \leqslant -1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x, & \text{si} \quad -1 < x \leqslant 1, \\ \text{arctg}\, x, & \text{si} \quad 1 < x. \end{cases}$

98. $y=\begin{cases} \operatorname{sign} x, & \text{si } x \leqslant -\frac{3\pi}{2}; \\ \cos x, & \text{si } -\frac{3\pi}{2} < x \leqslant 0, \\ \operatorname{arcctg} x, & \text{si } 0 < x < 1, \\ \log_2 x, & \text{si } 1 \leqslant x. \end{cases}$

99. $y=\begin{cases} x^2, & \text{si } x \leqslant -2, \\ \frac{1}{x^2}, & \text{si } -2 < x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ \log_2 x, & \text{si } 4 < x. \end{cases}$

100. $y=\begin{cases} [\operatorname{sen} x], & \text{si } x < -\pi, \\ \operatorname{tg} x, & \text{si } -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{ctg} x, & \text{si } -\frac{2\pi}{3} \leqslant x < 0, \\ \operatorname{sen} x, & \text{si } 0 < x < \frac{5\pi}{6}, \\ \operatorname{sign} \cos x, & \text{si } \frac{5\pi}{6} \leqslant x. \end{cases}$

101. $y=\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & \text{si } x \leqslant -2, \\ \cos x, & \text{si } -2 < x < -1, \\ x^2, & \text{si } -1 \leqslant x < 2, \\ \sqrt{x}, & \text{si } 2 \leqslant x, \\ 2^x, & \text{si } x \leqslant -1 \end{cases}$

102. $y=\begin{cases} \arccos x, & \text{si } -1 < x \leqslant 0, \\ \operatorname{arcsen} x, & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$

103. $y=\begin{cases} \operatorname{arcctg} x, & \text{si } x \leqslant -1, \\ \operatorname{arcsen} x, & \text{si } -1 < x < 0, \\ \arccos x, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ \log_{1/2} x, & \text{si } \frac{1}{2} < x. \end{cases}$

104. $y=\begin{cases} \operatorname{ctg} x, & \text{si } x \leqslant -\frac{5\pi}{4}; \\ \operatorname{sen} x, & \text{si } -\frac{5\pi}{4} < x \leqslant -1, \\ 2^x, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \log_{1/2} x, & \text{si } 0 < x \leqslant \frac{1}{4}, \\ \sqrt{x}, & \text{si } \frac{1}{4} < x. \end{cases}$

$$105.\ y=\begin{cases} |\operatorname{arctg} x|, & \text{si}\quad x\leqslant -\dfrac{\pi}{6}, \\ \cos x, & \text{si}\quad -\dfrac{\pi}{6}<x\leqslant \dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, & \text{si}\quad \dfrac{\pi}{4}<x<\pi, \\ \operatorname{sen} x, & \text{si}\quad \pi\leqslant x\leqslant \dfrac{3\pi}{2}, \\ \operatorname{ctg} x, & \text{si}\quad \dfrac{3\pi}{2}<x. \end{cases}$$

**106.** $y=x^2+5\,|x-1|+1$. **107.** $y=|-3x+2|-|2x-3|$.

**108.** $y=|x^2-3x+2|-|2x-3|$. **109.** $y=(x+1)(|x|-2)$.

**110.** $y=\dfrac{2x+1}{2-x}$. **111.** $y=1-\dfrac{1}{|x|}$. **112.** $y=\dfrac{2x-6}{|3-x|}$.

**113.** $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2x+1}$. **114.** $y=2\cdot 3^{x+1}-1$. **115.** $y=10^{-|x|}$.

**116.** $y=|\log_{\frac{1}{\pi}} x^5|$. **117.** $y=\sqrt{\lg \operatorname{sen} x}$.

**118.** $y=\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$. **119.** $y=\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x$.

**120.** $y=\sqrt{3}\operatorname{sen} 2x+\cos 2x$. **121.** $y=\operatorname{arcsen} \operatorname{tg} x$.

**122.** $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$. **123.** $y=\dfrac{1}{x}\operatorname{sen} x$.

**124.** $y=\cos \lg x$. **125.** $y=2\operatorname{sen}|2x|$.

**126.** $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-1)$. **127.** $y=\dfrac{1}{3}\arccos(x-1)+1$.

**128.** $y=-2\cos\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$. **129.** $y=\operatorname{arcsen}(x+1)-1$.

**130.** $y=2\operatorname{tg}\left(-2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$. **131.** $y=-\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

**132.** $y=\log_{1/2}\dfrac{1}{1-x^2}$. **133.** $y=\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$

**134.** $y=\operatorname{sen} 2\arccos x$. **135.** $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

**136.** $y=\arccos\cos x$. **137.** $y=\operatorname{arctg}\operatorname{tg} x$.

**138.** $y=\cos 2x-\sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}$. **139.** $y=\dfrac{|x-2|+1}{|x+3|}$.

**140.** $y=3+2^{3\cos\frac{x}{3}}$. **141.** $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

**142.** $y=\dfrac{|x-1|}{1-x^2}$. **143.** $y=\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}$

Hállense las funciones inversas y constrúyanse sus gráficas para una función con el campo de definición prefijado (144—153):

| Función | Campo de definición | Función | Campo de definición |
|---|---|---|---|
| 144. $y=3x-2$ | $(-\infty;\ \infty)$ | 149. $y=\log_{1/3}(x+1)$ | $(-1;\ \infty)$ |
| 145. $y=-(x+1)^2-2$ | $(-\infty;\ -1)$ | 150. $y=\frac{1}{1+x^2}$ | $(-\infty;\ 0]$ |
| 146. $y=\frac{x+1}{x-1}$ | $(1;\ \infty)$ | 151. $y=\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ | $\left[-\frac{5\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}\right]$ |
| 147. $y=\sqrt{x^2-4}$ | $[2;\ \infty)$ | 152. $y=-2+\cos x$ | $[0;\ \pi]$ |
| 148. $y=-\sqrt{4-x^2}$ | $[-2;\ 0]$ | 153. $y=2\operatorname{tg} x$ | $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ |

CAPÍTULO

# VII

# ECUACIONES CON UNA SOLA INCÓGNITA

Sean dadas dos funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ cuyos campos de existencia son $P$ y $L$, respectivamente. Sea el campo $M$ la intersección de los campos de existencia de dichas funciones, es decir, $M = P \cap L$ (en un caso particular, el campo $M$ puede ser un conjunto vacío).

Supongamos que se requiere: hallar todos los números $\alpha$ del campo $M$, para cada uno de los cuales se verifique la igualdad $f(\alpha) = g(\alpha)$. En estos casos se dice que el problema consiste en *resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ con una sola incógnita $x$, o bien está dada una ecuación $f(x) = g(x)$ con una incógnita $x$.*

En este capítulo se estudian algunos de los métodos de resolución de las ecuaciones de este tipo solamente, razón por la cual en lo que sigue en lugar de decir «ecuación $f(x) = g(x)$ con una sola incógnita $x$» diremos simplemente «ecuación $f(x) = g(x)$».

## § 1. Definiciones y afirmaciones principales referentes a la equivalencia de las ecuaciones

Se denomina *campo de valores admisibles* (CVA) *de la ecuación* $f(x) = g(x)$ la parte común (intersección) de los campos de existencia de las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$, es decir, el conjunto de todos los valores numéricos de la incógnita $x$, para cada uno de los cuales tienen sentido (están defenidos tanto el primer miembro de la ecuación, como el segundo. Todo número $x$, perteneciente al CVA de una ecuación, se llama *valor admisible* para la ecuación dada.

Un número $\alpha$ del CVA de la ecuación lleva el nombre de *solución* (o raíz) de la ecuación $f(x) = g(x)$, siempre que, al sustituirlo en lugar de la incógnita $x$, la ecuación se convierte en una igualdad numérica lícita $f(\alpha) = g(\alpha)$.

*Resolver la ecuación* $f(x) = g(x)$ significa hallar el conjunto de todas sus raíces. Observemos que este conjunto puede resultar ser

vacío, lo que es posible solamente en dos casos: a) si el CVA de la ecuación $f(x) = g(x)$ es un conjunto vacío; b) si el CVA de la ecuación $f(x) = g(x)$ es un conjunto no vacío $M$, mas no existe ningún número $\alpha \in M$, para el cual se verifique la igualdad numérica $f(\alpha) = g(\alpha)$. Si el conjunto de todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$ es un conjunto vacío, suele decirse, de ordinario, que la ecuación $f(x) = g(x)$ *no tiene raíces* y, por eso a veces se dice así: resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ significa hallar todas sus raíces o demostrar que esta ecuación no tiene raíces. Si el conjunto de todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$ consta de $k$ números $x_1, x_2, \ldots, x_k$, se dice que la ecuación $f(x) = g(x)$ *tiene sólo k raíces*: $x_1, x_2, \ldots, x_k$, es decir, el conjunto de todas sus raíces es el conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Si el conjunto de todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$ consta de un solo número $x_1$, se dice, además, que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene la *raíz única* $x_1$.

Sean dadas dos ecuaciones: $f(x) = g(x)$ y $p(x) = \varphi(x)$. Si toda raíz de la primera ecuación es a la vez la raíz de la segunda ecuación, entonces la segunda ecuación recibe el nombre de *consecuencia* de la primera.

De aquí se deduce, en particular, que si la primera ecuación no tiene raíces, la segunda ecuación es consecuencia de la primera. Con otras palabras, si el conjunto de todas las raíces de la primera ecuación es una parte (subconjunto) del conjunto de todas las raíces de la segunda ecuación, entonces la segunda ecuación es una consecuencia de la primera.

Sean dadas dos ecuaciones: $f(x) = g(x)$ y $p(x) = \varphi(x)$. Si toda raíz de la primera ecuación es la raíz de la segunda, y cualquier raíz de la segunda ecuación es la raíz de la primera, entonces dichas dos ecuaciones se denominan *equivalentes*. Con otras palabras, dos ecuaciones son equivalentes, si cada una de ellas es consecuencia de la otra. En este caso se sobreentiende, en particular, que si cada una de las ecuaciones mencionadas no tiene raíces, tales ecuaciones son equivalentes. La sustitución de una ecuación por otra, equivalente a la primera, se llama *paso equivalente* de una ecuación a la otra.

Sean dadas las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $p(x) = \varphi(x)$, y sea dado un conjunto $M$ de valores de la incógnita $x$. Si toda raíz de la primera ecuación, perteneciente al conjunto $M$, es la raíz de la segunda ecuación, y cualquier raíz de la segunda ecuación, perteneciente al conjunto $M$, es la raíz de la primera ecuación, estas dos ecuaciones se denominan *equivalentes en el conjunto M*. En este caso se sobreentiende, en particular, que si cada una de las ecuaciones mencionadas no tiene raíces en el conjunto $M$, ellas son equivalentes en el conjunto $M$.

La sustitución de una ecuación por la otra, equivalente a la primera en el conjunto $M$, se denomina *paso equivalente en el conjunto M* de una ecuación a la otra.

He aquí algunos ejemplos que ilustran los conceptos introduci-

dos. Sea dada la ecuación

$$\sqrt{1-x}=\log_2(x-1).$$

El campo de valores admisibles de esta ecuación es un conjunto vacío. En efecto, el campo de existencia de la función $y=\sqrt{1-x}$ es un conjunto $X_1=(-\infty; 1]$, mientras que el campo de existencia de la función $y=\log_2(x-1)$ es un conjunto $X_2=(1; +\infty)$. La parte común (intersección) de estos campos es un conjunto vacío.

En el ejemplo dado, una vez determinado el CVA de la ecuación, la última queda resuelta, puesto que se ha aclarado que la ecuación no tiene raíces.

Sea dada la ecuación:

$$\sqrt{x^2-4}=\sqrt{4-x^2}.$$

El campo de valores admisibles de esta ecuación es un conjunto que se compone de dos números: $-2$ y $2$. En efecto, el campo de existencia de la función $y=\sqrt{x^2-4}$ es el conjunto $X_1=(-\infty, -2]\cup[2, +\infty)$, mientras que el campo de existencia de la función $y=\sqrt{4-x^2}$ es el conjunto $X_2=[-2; 2]$. La parte común (intersección) de dichos campos es el conjunto $X=X_1\cap X_2=\{-2; 2\}$. Sustituyendo los números $(-2)$ y $2$ en la ecuación dada nos convencemos de que ambos números mencionados son raíces de la ecuación. Por consiguiente, la ecuación en consideración tiene tan sólo dos raíces $x_1=-2$ y $x_2=2$. Quiere decir, en este ejemplo también la ecuación queda resuelta, una vez determinado su CVA.

Los ejemplos aducidos muestran que al resolver una ecuación resulta útil conocer el CVA de esta ecuación.

No obstante, podemos dar algunos ejemplos de las ecuaciones para cuya resolución no es obligatorio conocer sus CVA.

Por ejemplo, sea dada la ecuación

$$\sqrt{\log_2(x+\operatorname{sen} 2x)}=-1.$$

Esta ecuación no tiene raíces, puesto que para cualquier valor de $x$, perteneciente al CVA de la ecuación, tenemos una igualdad numérica que no se verifica. Al mismo tiempo, el cálculo del CVA de esta ecuación sería un problema no simple.

Dos ecuaciones, $x+4=0$ y $(x^2+1)(x+4)=0$ son equivalentes en el conjunto de todos los números reales, pues cada una de estas ecuaciones tiene una sola raíz, el número $(-4)$.

Analicemos dos ecuaciones: $\sqrt{x}=1$ y $x^2=1$. La primera ecuación tiene solamente una raíz, el número 1, la cual es también la raíz de la segunda ecuación. Por eso, la ecuación $x^2=1$ es consecuencia de la ecuación $\sqrt{x}=1$. Pero, la ecuación $x^2=1$ tiene una raíz más, el número $(-1)$, la cual no sólo no es la raíz de la ecuación $\sqrt{x}=1$, sino que ni siquiera entra en el CVA de ella. De este modo, las ecuaciones dadas no son equivalentes en el conjunto de todos los

números reales. Sin embargo, son equivalentes en el CVA de la primera ecuación (es decir, en el conjunto de números no negativos), puesto que en este conjunto cada una de las ecuaciones tiene una sola raíz, que es el número 1.

Demos a conocer algunas **afirmaciones** referentes a la equivalencia de las ecuaciones:

1. *Las ecuaciones* $f(x) = g(x)$ *y* $f(x) - g(x) = 0$ *son equivalentes.*

2. *Las ecuaciones* $f(x) = g(x)$ *y* $f(x) + \alpha = g(x) + \alpha$ *son equivalentes para cualquier número real* $\alpha$.

3. *Las ecuaciones* $f(x) = g(x)$ *y* $\alpha f(x) = \alpha g(x)$ *son equivalentes para cualquier número real* $\alpha$ *distinto de cero.*

4. *Las ecuaciones* $f(x) = g(x)$ *y* $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ *son equivalentes para cualquier número positivo y fijo* $a$, *distinto de la unidad.*

Las demostraciones de estas afirmaciones son parecidas una a otra, por lo cual **demostremos** aquí, por ejemplo, sólo la afirmación 4.

Sea el número $x_1$ una raíz de la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, es decir, supongamos que existen los números $f(x_1)$ y $g(x_1)$, para los cuales se verifica la igualdad numérica $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Por cuanto el número fijo $a$ satisface las condiciones $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces la validez de la igualdad numérica $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$ predetermina la validez de la igualdad numérica $f(x_1) = g(x_1)$. Por consiguiente, el número $x_1$ es una raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$. Semejantes razonamientos pueden realizarse para toda raíz de la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Quiere decir, cualquier raíz de la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ es la raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$.

Mostremos ahora el caso contrario. Sea el número $x_2$ una solución de la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, supongamos que existen los números $f(x_2)$ y $g(x_2)$, para los cuales se verifica la igualdad numérica $f(x_2) = g(x_2)$. Entonces, en virtud de la propiedad de las igualdades numéricas, para cualquier número fijo $a$ tal que $a > 0$, y $a \neq 1$, se verifica la igualdad $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$. Por consiguiente el número $x_2$ es una raíz de la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Estos razonamientos pueden realizarse para cualquier raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$. Quiere decir, toda raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$ es la raíz de la ecuación $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Así pues, si cada una de las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ tiene raíces, dichas ecuaciones son equivalentes.

Hemos de notar que de lo demostrado se deduce, en particular, que si una de las ecuaciones en consideración no tiene raíces, tampoco las tendrá la segunda, es decir, en este caso también las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ son equivalentes. Con esto queda demostrada completamente la afirmación 4.

He aquí algunas **afirmaciones** para el caso en que una de las ecuaciones es consecuencia de la otra.

5. *Sea* $n$ *un número natural, entonces la ecuación* $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ *es una consecuencia de la ecuación* $f(x) = g(x)$.

**Demostración.** De acuerdo con la afirmación 1, la ecuación

$$[f(x)]^n = [g(x)]^n$$

es equivalente a la ecuación

$$[f(x)]^n - [g(x)]^n = 0,$$

la cual, a su vez, es equivalente, en virtud de las fórmulas de multiplicación reducida, a la siguiente ecuación (cap. II):

$$[f(x) - g(x)]\{[f(x)]^{n-1} + [f(x)]^{n-2}g(x) + \ldots + [g(x)]^{n-1}\} = 0 \quad (1).$$

Supongamos que el número $x_0$ es una raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, que existen los números $f(x_0)$ y $g(x_0)$, para los cuales se verifica la igualdad $f(x_0) = g(x_0)$. Mas en este caso se verifica la igualdad numérica

$$[f(x_0) - g(x_0)]\{[f(x_0)]^{n-1} + [f(x_0)]^{n-2}g(x_0) + \ldots + [g(x_0)]^{-n1}\} = 0.$$

Por consiguiente, el número $x_0$ es una raíz de la ecuación (1), la cual es equivalente a la ecuación $[f(x)^n = [g(x)]^n$, por lo cual el número $x_0$ es una raíz de ésta. Estos razonamientos pueden realizarse para cualquier raíz de la ecuación inicial. Quiere decir, cualquier raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$ es la raíz de la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$, es decir, en este caso la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ es, de hecho, una consecuencia de la ecuación $f(x) = g(x)$. En cambio, si la ecuación $f(x) = g(x)$ no tiene raíces, entonces, evidentemente, la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ será su consecuencia. La afirmación 5 está completamente demostrada.

6. *La ecuación $f(x) = g(x)$ es una consecuencia de la ecuación* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, donde $a > 0$ *y* $a \neq 1$.

**Demostración.** Sea $x_0$ una raíz de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, es decir, supongamos que existen los números $\log_a f(x_0)$ y $\log_a g(x_0)$, para los cuales se verifica la igualdad numérica $\log_a f(x_0) = \log_a g(x_0)$. De la igualdad entre los logaritmos de dos números de una misma base se deduce la igualdad entre los propios números, es decir, $f(x_0) = g(x_0)$, por consiguiente, el número $x_0$ es una raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$. Estos razonamientos pueden realizarse para cualquier raíz de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Quiere decir, cualquier raíz de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ es también una raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, en este caso la ecuación $f(x) = g(x)$ es realmente una consecuencia de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. En cambio, si la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ no tiene raíces, entonces, evidentemente, la ecuación $f(x) = g(x)$ es su consecuencia. La afirmación 6 queda con esto completamente demostrada.

Demos a conocer algunas **afirmaciones** referentes a la equivalencia de las ecuaciones en un conjunto.

7. *Sea $n$ un número natural y supongamos que en cierto conjunto $M$ las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son no negativas. Entonces, en dicho*

*conjunto las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $[f(x)]^n = [g(x)]$ son equivalentes.*

**Demostración.** Se ha demostrado más arriba (véase la afirmación 5) que la ecuación $[f(x)^n = [g(x)]^n$ es una consecuencia de la ecuación $f(x) = g(x)$.

Demostremos, ahora, lo contrario. Sea un número $x_0 \in M$ cierta raíz de la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$, es decir, supongamos que existen números no negativos $f(x_0)$ y $g(x_0)$, para los cuales se verifica la igualdad numérica

$$[f(x_0)]^n = [g(x_0)]^n. \tag{2}$$

Supongamos que el número $x_0$ es tal que uno de los números $f(x_0)$ ó $g(x_0)$ es nulo. Entonces, de la igualdad (2) se desprende que el otro de los números citados es también igual a cero, es decir, en este caso. $f(x_0) = g(x_0)$. Por consiguiente, en este caso el número $x_0$ es una raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$. Supongamos ahora que el número $x_0$ es tal que uno de los números, $f(x_0)$ ó $g(x_0)$, es distinto de cero. Entonces, de la igualdad numérica (2) se deduce que el otro de los números citados tampoco es igual a cero y, de acuerdo con la condición de la afirmación 7, ambos números $f(x_0)$ y $g(x_0)$ son positivos. La igualdad numérica (2) es equivalente a la siguiente

$$[f(x_0)-g(x_0)]\,[\{f(x_0)]^{n-1}+[f(x_0)]^{n-2}g(x_0) + \ldots + [g(x_0)]^{n-1}\}=0. \tag{3}$$

Por cuanto cualquier potencia natural de un número positivo es un número positivo, como lo es también el producto y la suma de los números positivos, entonces el número $\{[f(x_0)]^{n-1} + [f(x_0)]^{n-2}g(x_0) + \ldots + [g(x_0)]^{n-1}\}$ es positivo, por consiguiente la igualdad numérica (3) es equivalente a la igualdad numérica $f(x_0) - g(x_0) = 0$, o bien a la igualdad $f(x_0) = g(x_0)$. La última igualdad numérica significa que el número $x_0$ es una raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$. Estos razonamientos pueden realizarse para toda raíz, perteneciente al conjunto $M$, de la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$. Por lo tanto, toda raíz, perteneciente al conjunto $M$, de la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ es la raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, en el conjunto $M$ la ecuación $f(x) = g(x)$ es una consecuencia de la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$.

En cambio, si la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ no tiene raíces, entonces, evidentemente, la ecuación $f(x) = g(x)$ es, en virtud de la definición, una consecuencia de la primera.

Hemos mostrado, pues, que en las condiciones de la afirmación 7 la ecuación $f(x) = g(x)$ es una consecuencia de la ecuación $[f(x)]^n = [g(x)]^n$, con lo que se acaba la demostración de la afirmación 7.

8. *Sea un número fijo* $a$ tal que $a > 0$ *y* $a \neq 1$, *y supongamos que en cierto conjunto $M$ las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son positivas. Entonces en el conjunto $M$ las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ son equivalentes.*

**Demostración.** Hemos demostrado más arriba (véase la afirma-

ción 6) que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una consecuencia de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Demostremos ahora lo contrario. Supongamos que el número $x_0 \in \in M$ es cierta raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, sea $f(x_0) > 0$, $g(x_0) > 0$ y $f(x_0) = g(x_0)$. Mas, en este caso han de ser iguales los logaritmos de estos números de una misma base, es decir, se verifica la igualdad numérica $\log_a f(x_0) = \log_a g(x_0)$. Por consiguiente, el número $x_0$ es la raíz de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Estos razonamientos pueden realizarse para cualquier raíz (del conjunto $M$) de la ecuación $f(x) = g(x)$.

Así pues, toda raíz (del conjunto $M$) de la ecuación $f(x) = g(x)$ es también una raíz de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, es decir, en este caso la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ es realmente una consecuencia de la ecuación $f(x) = g(x)$. En cambio, si la ecuación $f(x) = g(x)$ no tiene raíces, entonces, evidentemente, la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ es una consecuencia de la primera por definición.

Hemos demostrado, pues, que en las condiciones de la afirmación 8 la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ es una consecuencia de la ecuación $f(x) = g(x)$, con lo cual se finaliza la demostración de la afirmación 8.

9. *Supongamos que en cierto conjunto $M$, perteneciente al CVA de la ecuación $f(x) = g(x)$, está definida la función $y = \varphi(x)$ y que para cualquier $x \in M$ la función $\varphi(x) \neq 0$. Entonces, en dicho conjunto $M$ las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ son equivalentes.*

**Demostración.** Sea un número $x_1 \in M$ cierta raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir, supongamos que existen los números $f(x_1)$ y $g(x_1)$, para los cuales se verifica la igualdad numérica $f(x_1) - g(x_1) = 0$. Por hipótesis, existe el número $\varphi(x_1)$ y, además, $\varphi(x_1) \neq 0$. Por eso, se verifica también la igualdad numérica $\varphi(x_1)[f(x_1) - g(x_1)] = 0$, la cual es equivalente a la igualdad numérica $\varphi(x_1)f(x_1) = \varphi(x_1)g(x_1)$. La última igualdad numérica significa que el número $x_1$ es una raíz de la ecuación $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$. Estos razonamientos pueden realizarse para cualquier raíz, perteneciente al conjunto $M$, de la ecuación $f(x) = g(x)$. Quiere decir, cualquier raíz del conjunto $M$ de la ecuación $f(x) = g(x)$ es una raíz de la ecuación $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$.

Demostremos lo contrario. Sea un número $x_2 \in M$ cierta raíz de la ecuación $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$, es decir, supongamos que existen los números $f(x_2)$, $g(x_2)$ y $\varphi(x_2)$, para los cuales se verifica la igualdad numérica $f(x_2)\varphi(x_2) = g(x_2)\varphi(x_2)$ que es equivalente a la igualdad numérica $\varphi(x_2)[f(x_2) - g(x_2)] = 0$. Por hipótesis, $\varphi(x_2) \neq 0$, por lo cual la última igualdad numérica es equivalente a la igualdad numérica $f(x_2) - g(x_2) = 0$, la cual es equivalente, a su vez, a la igualdad $f(x_2) = g(x_2)$. La última igualdad numérica significa que el número $x_2$ es la raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$. Semejantes razonamientos pueden realizarse para cualquier raíz, del conjunto $M$, de la ecuación $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$. Quiere decir,

cualquier raíz, del conjunto $M$, de la ecuación $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ es la raíz de la ecuación $f(x) = g(x)$. Así pues, si cada una de las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ tiene raíces en el conjunto $M$, estas ecuaciones son equivalentes en el conjunto $M$. Observemos que lo demostrado se desprende, en particular, que si una de las ecuaciones en consideración no tiene raíces en el conjunto $M$, tampoco las tiene en este conjunto la otra, es decir, en este caso también las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$ son equivalentes en el conjunto $M$. La afirmación 9 queda completamente demostrada.

Sean dadas $n$ ecuaciones $f_1(x) = g_1(x)$, $f_2(x) = g_2(x)$, . . ., . . ., $f_n(x) = g_n(x)$. Denotemos con $Q$ un campo que representa la intersección de los CVA de todas estas ecuaciones. Si se pide hallar todos los números $\alpha$ del campo $Q$, cada uno de los cuales sea la raíz de al menos una de las ecuaciones citadas, se dice que *está dado el conjunto de n ecuaciones*

$$f_1(x) = g_1(x),\ f_2(x) = g_2(x),\ \ldots,\ f_n(x) = g_n(x) \qquad (4)$$

y el campo $Q$ recibe el nombre de *campo de valores admisibles de este conjunto.*

Notemos que las ecuaciones del conjunto se escriben, habitualmente, en una línea. Puede ocurrir que el conjunto de ecuaciones (4) contiene una infinidad de ecuaciones.

Un número $\alpha$ del CVA del conjunto (4) se denomina *solución* (o *raíz*) de este conjunto, si es la raíz de por lo menos una ecuación del conjunto.

*Resolver el conjunto de ecuaciones* (4) significa hallar el conjunto de todas sus raíces. Si este conjunto resulta ser vacío, se dice que el conjunto de ecuaciones (4) *no tiene raíces.*

El conjunto de ecuaciones (4) se resuelve corrientemente del modo siguiente. Al principio se resuelve cada ecuación en el CVA del conjunto, es decir, se determinan los conjuntos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, donde $M_i$ es el conjunto de todas las raíces de la ecuación $f_i(x) = g_i(x)$, pertenecientes al CVA del conjunto. Luego se determina el conjunto $M_0$ que es una unión de todos los conjuntos $M_1, M_2, \ldots, M_n$, es decir, $M_0 = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$. Este conjunto será precisamente el conjunto de todas las raíces del conjunto de ecuaciones (4). Si el conjunto $M_0$ consta de $k$ números : $M_0 = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, se dice que el conjunto de ecuaciones (4) tiene tan *sólo k raíces* $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Suele decirse que una ecuación

$$p(x) = \varphi(x) \qquad (5)$$

*es equivalente* al conjunto de ecuaciones (4), si cualquier raíz de la ecuación (5) es también raíz de la totalidad (4), y cualquier raíz de la totalidad (4) es raíz de la ecuación (5).

En este caso se sobreentiende, en particular, que si la ecuación (5) no tiene raíces y tampoco las tiene el conjunto de ecuaciones (4),

entonces la ecuación (5) es equivalente al conjunto de ecuaciones (4). La sustitución de la ecuación (5) por el conjunto (4), equivalente a la ecuación (5), se denomina *paso equivalente* de la ecuación (5) al conjunto (4).

A veces surge la necesidad de efectuar un paso equivalente de una ecuación a un conjunto de ecuaciones en cierto conjunto $M$.

Se dice que la ecuación (5) *es equivalente en el conjunto $M$* al conjunto de ecuaciones (4), si cualquier raíz de la ecuación (5), perteneciente al conjunto $M$, es también raíz del conjunto (4), y cualquier raíz del conjunto (4), perteneciente al conjunto $M$, es raíz de la ecuación (5).

La sustitución de una ecuación por otra ecuación o por un conjunto de ecuaciones se llamará en lo que sigue transformación de la ecuación.

## § 2. Ecuaciones elementales

Sea $y = f(x)$ una función elemental fundamental y sea $b$, un número real fijo. Entonces la ecuación

$$f(x) = b$$

se denomina, de ordinario, *ecuación elemental*.

Es evidente que el CVA de la ecuación elemental coincide con el campo de existencia de la función elemental fundamental $y = f(x)$. Estudiemos una ecuación elemental $f(x) = b$ en cierto conjunto $X$ perteneciente al CVA, con la particularidad de que a título de conjunto $X$ tomaremos el segmento $[x_1, x_2]$, o bien el intervalo $(x_1, x_2)$, o bien los semiintervalos $(x_1, x_2]$, $[x_1, x_2)$, o bien los rayos $[x_1, +\infty)$, $(x_1 + \infty)$, $(-\infty, x_1)$, $(-\infty, x_1]$, o bien toda la recta numérica $(-\infty, +\infty)$. Denotemos con $Y$ el campo de valores de la función $y = f(x)$ definida en el conjunto $X$. Supongamos que la función elemental fundamental $y = f(x)$ es estrictamente monótona en el conjunto $X$; entonces, si $b \in Y$, la ecuación $f(x) = b$ tendrá la raíz única en el conjunto $X$, y si $b \notin Y$, entonces la ecuación $f(x) = b$ no tendrá raíces en el conjunto $X$, puesto que $f(x_0) \in Y$ para todo $x_0 \in X$, y, por consiguiente, $f(x_0) \neq b$, cualquiera que sea $x_0 \in X$. En adelante, al resolver las ecuaciones elementales, aplicaremos esta afirmación.

**Ecuación algebraica.** Sea $n$ cierto número natural fijo, entonces la ecuación

$$x^n = b \qquad (1)$$

se denomina, corrientemente, *ecuación algebraica elemental*.

La función $y = x^n$ está definida en toda la recta numérica, por lo cual el CVA de la ecuación (1) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. Por cuanto las propiedades de la función $y = f(x)$ que se emplean al resolver la ecuación (1) son diferentes para $n$ par y $n$ impar, examinemos dos casos:

1. Supongamos que $n = 2m - 1$, donde $m$ es un número natural fijo, entonces la ecuación (1) adquiere la forma

$$x^{2m-1} = b. \qquad (1a)$$

La función $y = x^{2m-1}$ es estrictamente creciente en toda la recta numérica y el campo de sus valores $Y$ es también toda la recta numérica $Y = (-\infty, +\infty)$. Por eso, para cada $b$ la ecuación (1a) tiene la única raíz que se designará con $x_1$. Por definición de raíz de una ecuación, se verifica la igualdad $x_1^{2m-1} = b$. Esta igualdad numérica es equivalente a:

la igualdad numérica $x_1 = \sqrt[2m-1]{b}$, si $b$ es un número positivo;

la igualdad numérica $x_1 = 0$, si $b = 0$;

la igualdad numérica $x_1 = -\sqrt[2m-1]{|b|}$, si $b$ es un número negativo.

Así pues, el conjunto de todas las raíces de la ecuación (1a) consta, para cada $b$, del único número $x_1$, con otras palabras, la ecuación (1a) tiene una raíz única $x_1$, con la particularidad de que $x_1 = \sqrt[2m-1]{b}$, si $b > 0$, $x_1 = 0$, si $b = 0$, $x_1 = -\sqrt[2m-1]{|b|}$, si $b < 0$.

2. Sea $n = 2m$, donde $m$ es un número natural fijo, entonces, la ecuación (1) adquiere la forma

$$x^{2m} = b. \qquad (1b)$$

Dividamos el CVA de la ecuación (1b) en dos conjuntos: $X_1 = [0, +\infty)$ y $X_2 = (-\infty, 0)$, y resolvamos la ecuación (1b) en cada uno de ellos.

En el conjunto $X_1$ la función $y = x^{2m}$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y = [0, +\infty)$. Por consiguiente, si $b$ es un número negativo, la ecuación (1b) no tendrá raíces en el conjunto $X_1$, y si $b$ es un número no negativo, en el conjunto $X_1$ la ecuación (1b) tendrá una raíz única que se denotará con $x_1$. Por definición de raíz de una ecuación, se verifica la igualdad numérica $x_1^{2m} = b$. Esta igualdad es equivalente a:

la igualdad numerica $x_1 = 0$, si $b = 0$;

la igualdad numérica $x_1 = \sqrt[2m]{b}$, si $b$ es un número positivo.

En el conjunto $X_2$ la función $y = x^{2m}$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y = (0, +\infty)$. Por consiguiente, si $b$ es un número negativo o nulo, la ecuación (1b) en el conjunto $X_2$ no tendrá soluciones; si $b$ es un número positivo, la ecuación (1b) tendrá en el conjunto $X_2$ una raíz única que se designará con $x_2$. Por cuanto la función $y = x^{2m}$ es par en todo el CVA, entonces $x_2 = -x_1$, es decir, $x_2 = -\sqrt[2m]{b}$.

Así pues, para cada $b$ negativo la ecuación (1b) no tiene raíces; para $b = 0$ la ecuación (1b) tiene una raíz única $x_1 = 0$; para cada $b$ positivo el conjunto de todas las raíces de la ecuación (1b) consta de dos números: $x_1 = \sqrt[2m]{b}$ y $x_2 = -\sqrt[2m]{b}$.

En la Tabla 5 se exponen los resultados de la resolución de la ecuación (1).

**Ecuación fraccionaria.** Sea $n$ un número natural fijo, entonces, la ecuación

$$x^{-n} = b \qquad (2)$$

suele llamarse *ecuación fraccionaria elemental.*

La función $y = x^{-n}$ está definida en el conjunto de todos los números reales distintos de cero, por lo cual el CVA de la ecuación

*Tabla 5*

| | $b > 0$ | $b = 0$ | $b < 0$ |
|---|---|---|---|
| $x^{2m-1} = b$ | $x_1 = \sqrt[2m-1]{b}$ | $x_1 = 0$ | $x_1 = -\sqrt[2m-1]{\lvert b \rvert}$ |
| $x^{2m} = b$ | $x_1 = \sqrt[2m]{b}$, $x_2 = -\sqrt[2m]{b}$ | $x_1 = 0$ | no hay soluciones |

(2) es el conjunto $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Por cuanto las propiedades de la función $y = x^{-n}$, que se emplean al resolver la ecuación (2) son diferentes para $n$ par y $n$ impar, examinemos dos casos:

1. Sea $n = 2m - 1$, donde $m$ es un número natural fijo, entonces la ecuación (2) adquiere la forma

$$x^{-(2m-1)} = b \qquad (2a)$$

Partamos el CVA de la ecuación (2a) en dos conjuntos: $X_1 = (-\infty, 0)$ y $X_2 = (0, +\infty)$ y resolvamos la ecuación (2a) en cada uno de ellos. En el conjunto $X_1$ la función $y = x^{-2m+1}$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y_1 = (-\infty, 0)$. Por consiguiente, si $b$ es un número no negativo, en el conjunto $X_1$ la ecuación (2a) no tiene raíces, y si $b$ es negativo, en el conjunto $X_1$ la ecuación (2a) tiene una raíz única, la cual se denotará con $x_1$. Por definición de raíz de una ecuación, se verifica la igualdad numérica $x_1^{-2m+1} = b$, la cual es equivalente, tomando en consideración que $b$ es un número negativo, a la igualdad numérica $x_1 = -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{\lvert b \rvert}}$.

En el conjunto $X_2$ la función $y = x^{-2m+1}$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y_2 = (0, +\infty)$. Por consiguiente, si $b$ es un número negativo o es cero, entonces en el conjunto $X_2$ la ecuación (2a) no tiene raíces, y si $b$ es positivo, la ecuación (2a) tiene en el conjunto $X_2$ una raíz única que se denotará con $x_1$. Por cuanto $x_1$ es la raíz de la ecuación (2a), es válida la igualdad numérica $x_1^{-2m+1} = b$, la cual es equivalente,

tomando en consideración que $b$ es un número positivo, a la igualdad numérica $x_1 = \sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}$.

Así, pues, si $b = 0$, la ecuación (2a) no tiene raíces, y para cada $b$ distinto de cero la ecuación (2a) tiene una raíz única $x_1$, con la particularidad de que $x_1 = -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}$, si $b < 0$ y $x_1 = \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}$ si $b > 0$.

2. Sea $n = 2m$, donde $m$ es un número natural fijo, entonces la ecuación (2) adquiere la forma

$$x^{-2m} = b. \tag{2b}$$

Partamos el CVA de la ecuación (2b) en dos conjuntos: $X_1 = (-\infty, 0)$ y $X_2 = (0, +\infty)$, y resolvamos la ecuación (2b) en cada uno de ellos.

En el conjunto $X_2$ la función $y = x^{-2m}$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y = (0, +\infty)$. Por consiguiente, si $b$ es un número negativo o es cero, en el conjunto $X_2$ la ecuación (2b) no tiene raíces, y si $b$ es un número positivo, la ecuación (2b) tiene en el conjunto $X_2$ una raíz única que se denotará con $x_1$. Por cuanto $x_1$ es la raíz de la ecuación (2b), es válida la siguiente igualdad numérica: $x_1^{-2m} = b$, la cual es equivalente, tomando en consideración que $b$ es un número positivo, a la igualdad $x_1 = \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$.

En el conjunto $X_1$ la función $y = x^{-2m}$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y = (0, +\infty)$. Por consiguiente, si $b$ es un número negativo o nulo, la ecuación (2b) no tiene raíces en el conjunto $X_1$, y si $b$ es un número positivo, entonces la ecuación (2b) tendrá en el conjunto $X_1$ una raíz única que se denotará con $x_2$. Por cuanto la función $y = x^{-2m}$ es par en todo el CVA, entonces $x_2 = -x_1$, es decir, $x_2 = -\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$.

Así pues, para cada $b$ no positivo la ecuación (2b) no tiene raíces; para cada $b$ positivo el conjunto de todas las raíces de la ecuación (2b) consta de dos números: $x_1 = \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$ y $x_2 = -\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$.

En la tabla 6 se exponen los resultados que se obtienen al resolver la ecuación (2).

**Ecuaciones potenciales.** Sea $\alpha$ cierto número positivo fijo y no entero, entonces

$$x^{\alpha} = b, \tag{3}$$

$$x^{-\alpha} = b, \tag{4}$$

suelen llamarse *ecuaciones potenciales elementales*.

*Tabla 6*

| | $b>0$ | $b=0$ | $b<0$ |
|---|---|---|---|
| $x^{-(2m-1)}=b$ | $x_1=\sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}$ | no hay soluciones | $x_1=-\sqrt[2m-1]{\frac{1}{\mid b \mid}}$ |
| $x^{-2m}=b$ | $x_1=\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$ <br> $x_2=-\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$ | no hay soluciones | no hay soluciones |

El campo natural de definición de la función $y = x^{\alpha}$ es el conjunto de todos los números no negativos. Quiere decir, el CVA de la ecuación (3) es el conjunto $X = [0, +\infty)$. La función $y = x^{\alpha}$ es estrictamente creciente en el conjunto $X$ y su campo de valores está representado por el rayo $Y = [0, +\infty)$. Por eso, la ecuación (3) no tiene raíces, cuando $b$ es negativo, mientras que para cada $b$ no negativo tiene una raíz única que se denotará con $x_1$. Conforme a la definición de raíz de una ecuación, se verifica la igualdad numérica $x_1^{\alpha} = b$. Esta igualdad numérica es equivalente a:

la igualdad numérica $x_1 = 0$, si $b = 0$;

la igualdad numérica $x_1 = b^{\frac{1}{\alpha}}$, si $b$ es un número positivo.

Así pues, para cada $b$ negativo la ecuación (3) no tiene raíces, y para cada $b$ no negativo la ecuación (3) tiene una raíz única $x_1$, con la particularidad de que $x_1 = 0$, si $b = 0$; $x_1 = b^{\frac{1}{\alpha}}$, si $b > 0$.

El campo natural de definición para la función $y = x^{-\alpha}$ es el conjunto de todos los números positivos. Quiere decir, el CVA de la ecuación (4) es el conjunto $X = (0, +\infty)$. La función $y = x^{-\alpha}$ es estrictamente decreciente en el conjunto $X$ y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y = (0, +\infty)$. Por eso, la ecuación (4) no tiene raíces para cualquier $b$ no positivo y tiene una raíz única para cada $b$ positivo: esta raíz la designamos con $x_1$. Por cuanto $x_1$ es la raíz de la ecuación (4), es válida la igualdad numérica $x_1^{-\alpha} = b$, la cual es equivalente a la igualdad numérica $x_1 = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Así pues, cuando $b$ es no positivo, la ecuación (4) no tiene raíces, y si cada $b$ es positivo la ecuación (4) tiene la única

raíz $x_1 = \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

En la tabla 7 vienen expuestos los resultados de la resolución de las ecuaciones (3) y (4).

*Tabla 7*

| | $b>0$ | $b=0$ | $b<0$ |
|---|---|---|---|
| $x^{\alpha}=b$ | $x_1=b^{\frac{1}{\alpha}}$ | $x_1=0$ | no hay soluciones |
| $x^{-\alpha}=b$ | $x_1=\left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ | no hay soluciones | no hay soluciones |

**Ecuación exponencial.** Sea $a$ un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces, la ecuación

$$a^x = b \tag{5}$$

suele llamarse *ecuación exponencial elemental.*

El campo natural de definición para la función $y = a^x$ es el conjunto de todos los números reales. Quiere decir, el CVA de la ecuación (5) es un conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. La función $y = a^x$ es estrictamente monótona en el conjunto $X$ y el campo de sus valores está representado por el rayo $Y = (0, +\infty)$. Por consiguiente, la ecuación (5) no tiene raíces, cuando cada $b$ es no positivo, mientras que para cada $b$ positivo la ecuación (5) tiene una raíz única que se denotará con $x_1$. Por cuanto $x_1$ es la raíz de la ecuación (5), es válida la igualdad numérica $a^{x_1} = b$, la cual es equivalente a la igualdad numérica $x_1 = \log_a b$.

Así pues, para cada $b$ no positivo la ecuación (5) no tiene raíces, y para cada $b$ positivo tiene una raíz única $x_1 = \log_a b$.

*Tabla 8*

| | $b>0$ | $b=0$ | $b<0$ |
|---|---|---|---|
| $a^x=b$ | $x_1=\log_a b$ | no hay soluciones | no hay soluciones |

En la tabla 8 están expuestos los resultados de la resolución de la ecuación (5)

**Ecuación logarítmica.** Sea $a$ un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces la ecuación

$$\log_a x = b \tag{6}$$

suele llamarse *ecuación logarítmica elemental.*

El campo natural de definición para la función $y = \log_a x$ es el conjunto de todos los números positivos. Quiere decir, el CVA de la ecuación (6) es el conjunto $X = (0, +\infty)$.

La función $y = \log_a x$ es estrictamente monótona en el conjunto $X$ y el campo de sus valores está representado por toda la recta numérica $Y = (-\infty, +\infty)$.

Por eso, para todo $b$ la ecuación (6) tiene una raíz única que se denotará con $x_1$. Por cuanto $x_1$ es la raíz de la ecuación (6), es válida la igualdad numérica $\log_a x_1 = b$, la cual es equivalente a la igualdad numérica $x_1 = a^b$. Por consiguiente para cada $b$ la ecuación (6) tiene la raíz única $x_1 = a^b$.

*Tabla 9*

| | $b > 0$ | $b = 0$ | $b < 0$ |
|---|---|---|---|
| $\log_a x = b$ | $x_1 = a^b$ | $x_1 = 1$ | $x_1 = a^b$ |

El la tabla 9 se exponen los resultados que se obtienen al resolver la ecuación (6).

**Ecuaciones trigonométricas.** Las ecuaciones $\cos x = b$, $\operatorname{sen} x = b$, $\operatorname{tg} x = b$, $\operatorname{ctg} x = b$ suelen llamarse *ecuaciones trigonométricas elementales*.

Hagamos algunas observaciones generales. Supongamos que se pide resolver la ecuación elemental $f(x) = b$, donde $y = f(x)$ es una función trigonométrica elemental fundamental. Diremos que la ecuación elemental $f(x) = b$ tiene $T$ por período principal, si $T$ es el período principal de la función $y = f(x)$. Es evidente que si para cierta ecuación trigonométrica elemental de período principal $T$ se ha hallado una solución $x_0$, entonces cualquier número $x_k = x_0 + kT$ será también solución de esta ecuación para cualquier $k$ entero. En este caso el conjunto de todas las soluciones de la forma $x_k = x_0 + kT$, donde $k$ recorre todos los números enteros, lleva el nombre de *serie de soluciones* de la ecuación citada y se escribirá en adelante en la forma

$$x_k = x_0 + kT, \quad k \in Z.$$

Con el objeto de determinar el conjunto de todas las soluciones de la ecuación trigonométrica elemental dada, cuyo período principal es $T$, se deben hallar todas las soluciones de esta ecuación en el intervalo de longitud $T$, y luego escribir la serie de soluciones correspondiente para cada una de las soluciones halladas. Si se obtienen $n$ series de soluciones de la ecuación trigonométrica elemental $f(x) = b$, se dice que el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $f(x) = b$ lo constituyen $n$ series de soluciones y, a continuación, se escriben todas estas series.

Al resolver una ecuación trigonométrica elemental, el intervalo de longitud igual al período principal $T$ debe elegirse de un modo tal, que contenga un trozo, sobre el cual para la función $y = f(x)$

quede definida la función trigonométrica inversa, y, además, que todas las soluciones de la ecuación en dicho trozo puedan ser fácilmente determinadas.

Observemos además que si la ecuación trigonométrica elemental $f(x) = b$ no tiene solución en el intervalo de longitud igual al período principal $T$, no las tendrá en toda la recta numérica.

Sea dada una ecuación trigonométrica elemental

$$\cos x = b. \tag{7}$$

El campo natural de definición de la función $y = \cos x$ es toda la recta numérica. Quiere decir, el CVA de la ecuación (7) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. Por cuanto la función $y = \cos x$ es en este conjunto $X$ una función periódica de período principal igual a $2\pi$, hallemos, al principio, todas las soluciones de la ecuación (7) en el semiintervalo $(-\pi, \pi]$ de longitud igual al período principal. Partamos este semiintervalo en dos conjuntos: $X_1 = (-\pi, 0)$ y $X_2 = [0, \pi]$ y resolvamos la ecuación (7) en cada uno de ellos.

En el conjunto $X_2$ la función $y = \cos x$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el segmento $Y_2 = [-1; 1]$. Por consiguiente, si $b$ es un número tal que $|b| > 1$, entonces en el conjunto $X_2$ la ecuación (7) no tiene raíces, y si el número $b$ es tal, que $|b| \leqslant 1$, entonces la ecuación (7) tendrá en el conjunto $X_2$ una raíz única que se denotará con $x_0$. Puesto que $x_0 \in [0; \pi]$ y el número $b \in [-1; 1]$, es válida la siguiente cadena de igualdades numéricas equivalentes:

$$\cos x_0 = b \Leftrightarrow \arccos(\cos x_0) = \arccos b \Leftrightarrow x_0 = \arccos b.$$

En el conjunto $X_1$ la función $y = \cos x$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado por el intervalo $Y_1 = (-1; 1)$. Por consiguiente, si $b$ es un número tal, que $|b| \geqslant 1$, entonces la ecuación (7) no tiene raíces en el conjunto $X_1$, y si $b$ es un número tal, que $|b| < 1$, la ecuación (7) tendrá en el conjunto $X_1$ una raíz única que se denotará con $x_0'$. Al tomar en consideración que la función $y = \cos x$ es par en toda la recta numérica, obtenemos: $x_0' = -x_0$, es decir, $x_0' = -\arccos b$.

Así pues, en el semiintervalo $(-\pi, \pi$ la ecuación (7) no tiene soluciones, cualquiera que sea $b$ tal, que $|b| > 1$; cuando $b = 1$, tiene una solución única $x_0 = \arccos 1$, es decir, $x_0 = 0$; cuando $b = -1$, tiene una solución única $x_0 = \arccos(-1)$, es decir, $x_0 = \pi$; cuando cada $b$ es tal, que $|b| < 1$, tiene tan sólo dos soluciones $x_0 = \arccos b$ y $x_0' = -\arccos b$.

Cada una de estas soluciones da una serie de soluciones de la ecuación (7) en toda la recta numérica. Por lo tanto, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (7) lo constituye:

un conjunto vacío, para cada $b$ tal, que $|b| > 1$ (dicho de otra forma, cuando $|b| > 1$, la ecuación (7) no tiene soluciones);

una serie de soluciones $x_k = 2\pi k$, $k \in Z$, para $b = 1$;

una serie de soluciones $x_n = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, para cada $b = -1$;

dos series de soluciones: $x_m = \arccos b + 2\pi m$, $m \in Z$, y $x_p = -\arccos b + 2\pi p$, $p \in Z$, para cada $b$ tal, que $|b| < 1$.

Indiquemos que a veces dos series de soluciones de la encuación (7) se escriben con ayuda de una sola fórmula: $x_q = \pm \arccos b + 2\pi q$, $q \in Z$.

En la tabla 10 se dan los resultados obtenidos al resolver la ecuación (7).

Sea dada la ecuación trigonométrica elemental

$$\operatorname{sen} x = b. \tag{8}$$

El campo natural de definición de la función $y = \operatorname{sen} x$ es el conjunto de todos los números reales. Quiere decir, el CVA de la

*Tabla 10*

| | $b < -1$ | $b = -1$ | $-1 < b < 1$ | $b = 1$ | $b > 1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x = b$ | no hay soluciones | $x_n = (2n+1)\pi$, $n \in Z$ | $x_m = \arccos b + 2\pi m$, $m \in Z$; $x_p = -\arccos b + 2\pi p$, $p \in Z$ | $x_k = 2\pi k$, $k \in Z$ | no hay soluciones |

ecuación (8) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. Por cuanto la función $y = \operatorname{sen} x$ en el conjunto $X$ es una función periódica de período principal igual a $2\pi$, entonces hallemos, primero, todas las soluciones de la ecuación (8) en el semiintervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, cuya longitud es igual a la del período principal. Partamos dicho semiintervalo en dos conjuntos: $X_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $X_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y resolvamos la ecuación (8) en cada uno de ellos.

En el conjunto $X_1$ la función $y = \operatorname{sen} x$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado por el segmento $Y_1 = [-1; 1]$. Por consiguiente, si el número $b$ es tal, que $|b| > 1$, la ecuación (8) no tiene raíces en el conjunto $X_1$, y si $b$ es un número tal, que $|b| \leqslant 1$, la ecuación (7) tiene en el conjunto $X_1$ una solución única que se denotará con $x_0$. Por cuanto $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y, el número $b \in [-1, 1]$, entonces es válida la siguiente cadena de igualdades numéricas equivalentes:

$\operatorname{sen} x_0 = b \Leftrightarrow \arcsen(\operatorname{sen} x_0) = \arcsen b \Leftrightarrow x_0 = \arcsen b$.

En el conjunto $X_2$ la función $y = \operatorname{sen} x$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el intervalo $Y_2 = (-1; 1)$. Por consiguiente, si el número $b$ es tal, que $|b| \geqslant 1$, la ecuación (8) no tiene raíces en el conjunto $X_2$, y si $b$ es un número tal que $b \in (-1, 1)$, la ecuación (8) tendrá en el conjunto $X_2$ una solu-

ción única, que se denotará con $x_0'$. Al tomar en consideración que la función $y =$ sen $x$ es simétrica en toda la recta numérica respecto de una recta vertical que pasa por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, obtenemos que $x_0' = \pi - x_0$, es decir, $x_0' = \pi -$ arcsen $b$. Así pues, en el semiintervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ la ecuación (8):

no tiene soluciones, cuando cada $b$ es tal, que $|b| > 1$;

tiene una solución única $x_0 =$ arcsen 1, es decir $x_0 = \frac{\pi}{2}$, cuando $b = 1$;

tiene una solución única $x_0 =$ arcsen $(-1)$, es decir, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, cuando $b = -1$.

tiene tan sólo dos soluciones: $x_0 =$ arcsen $b$ y $x_0' = \pi -$ arcsen $b$, cuando cada $b$ es tal, que $|b| < 1$. Cada una de las soluciones aducidas da una serie de soluciones de la ecuación (8) en toda la recta numérica. Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (8) lo constituye:

un conjunto vacío, cuando cada $b$ es tal que $|b| > 1$ (en otras palabras, para $|b| > 1$ la ecuación (8) no tiene soluciones);

una serie de soluciones $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, cuando $b = 1$;

una serie de soluciones $x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, cuando $b = -1$;

dos series de soluciones: $x_p =$ arcsen $b + 2\pi p$, $p \in Z$, y $x_m = \pi -$ arcsen $b + 2\pi m$, $m \in Z$, cuando cada $b$ es tal que $|b| < 1$.

*Tabla 11*

| | $b < -1$ | $b = -1$ | $-1 < b < 1$ | $b = 1$ | $b > 1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sen $x = b$ | no hay soluciones | $x_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$ | $x_p =$ arcsen $b + 2\pi p$, $p \in Z$; $x_m = \pi -$ arcsen $b + 2\pi m$, $m \in Z$ | $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$ | no hay soluciones |

Indiquemos que a veces dos series de soluciones de la ecuación (8) se esriben con ayuda de una sola fórmula $x_q = (-1)^q$ arcsen $b + \pi q$, $q \in Z$.

En la tabla 11 se exponen los resultados que se obtienen al resolver la ecuación (8).

Sea dada la ecuación trigonométrica elemental

$$\text{tg } x = b. \tag{9}$$

El campo natural de definición de la función $y =$ tg $x$ es el conjunto de todos los números reales, salvo los números $\frac{\pi}{2} + \pi k$, donde $k$

es un número entero cualquiera. Quiere decir, el CVA de la ecuación (9) es un conjunto $X$ que se compone de todos los números reales distintos de $\frac{\pi}{2}+\pi k$, donde $k$ es un número entero. Por cuanto la función $y=\operatorname{tg} x$ es, en este conjunto $X$, una función periódica de período principal igual a $\pi$, hallemos, al principio, todas las soluciones de la ecuación (9) en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cuya longitud es igual a la del período principal. En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la función $y=$ $=\operatorname{tg} x$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado por toda la recta numérica $Y=(-\infty, +\infty)$. Por consiguiente, para cada $b$ la ecuación (9) tiene en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ una solución única que se denotará con $x_0$. Por cuanto $x_0$ es la solución de la ecuación (9) y $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces es válida la siguiente cadena de igualdades númericas equivalentes: $\operatorname{tg} x_0 = b \Leftrightarrow \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x_0) =$ $= \operatorname{arctg} b \Leftrightarrow x_0 = \operatorname{arctg} b$.

Así pues, para cada $b$ la ecuación (9) tiene en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ una solución única $x_0 = \operatorname{arctg} b$. Esta solución da una serie de soluciones de la ecuación (9) en todo el CVA de esta ecuación.

*Tabla 12*

| | $-\infty < b < \infty$ |
|---|---|
| $\operatorname{tg} x = b$ | $x_n = \operatorname{arctg} b + \pi n,\ n \in Z$ |

*Tabla 13*

| | $-\infty < b < \infty$ |
|---|---|
| $\operatorname{ctg} x = b$ | $x_p = \operatorname{arctg} b + \pi p,\ p \in Z$ |

Quiere decir, para cada $b$ el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (9) lo constituye la serie de soluciones $x_n = \operatorname{arctg} b +$ $+ \pi n,\ n \in Z$.

En la tabla 12 se exponen los resultados obtenidos al resolver la ecuación (9).

Sea dada la ecuación trigonométrica elemental

$$\operatorname{ctg} x = b. \tag{10}$$

La función $y = \operatorname{ctg} x$ está definida en todo el eje numérico, salvo en los puntos $x = \pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera. Esto significa que el CVA de la ecuación (10) es un conjunto $X$ que se compone de todos los números reales distintos de $\pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera. Por cuanto la función $y = \operatorname{ctg} x$ es periódica en este conjunto $X$ y el período principal de ella equivale a $\pi$, hallemos, primero, todas las soluciones de la ecuación (10) en el intervalo $(0, \pi)$ cuya longitud es igual a la del período principal. La función $y = \operatorname{ctg} x$ en el intervalo $(0, \pi)$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores lo constituye toda la recta numérica $Y = (-\infty, +\infty)$. Por consiguiente, para cada $b$ la ecuación (10)

tiene en el intervalo $(0, \pi)$ una solución única, que se denotará con $x_0$. Puesto que $x_0$ es la solución de la ecuación (10) y $x_0 \in (0, \pi)$ es válida la siguiente cadena de igualdades numéricas equivalentes:

$$\text{ctg } x_0 = b \Leftrightarrow \text{arcctg } (\text{ctg } x_0) = \text{arcctg } b \Leftrightarrow x_0 = \text{arcctg } b.$$

Así pues, para cada $b$ la ecuación (10) tiene en el intervalo $(0, \pi)$ una solución única $x_0 = \text{arcctg } b$. Esta solución da una serie de soluciones de la ecuación (10) en todo el CVA.

Quiere decir, para cada $b$ el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (10) lo constituye la serie de soluciones $x_p = \text{arcctg } b + \pi p$, $p \in Z$.

En la tabla 13 se exponen los resultados obtenidos al resolver la ecuación (10).

Veamos, además, las ecuaciones elementales que contienen *funciones trigonométricas fundamentales inversas*, es decir, $\arccos x = b$, $\text{arcsen } x = b$, $\text{arctg } x = b$, $\text{arcctg } x = b$.

Sea dada una ecuación elemental

$$\arccos x = b. \tag{11}$$

El campo natural de definición de la función $y = \arccos x$ es el segmento $X = [-1; 1]$. Quiere decir, el CVA de la ecuación (11) es el conjunto $X = [-1; 1]$. La función $y = \arccos x$ en el conjunto $X$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el segmento $Y = [0, \pi]$. Por consiguiente, para cada $b$ tal que $b < 0$ ó $b > \pi$, la ecuación (11) no tiene raíces; si, en cambio, $b$ es tal, que $0 \leqslant b \leqslant \pi$, entonces la ecuación (11) tiene una raíz única que se denotará con $x_0$. Por cuanto $x_0$ es la raíz de la ecuación (11), $x_0 \in [-1; 1]$ y $b \in [0, \pi]$, entonces es válida la cadena de las igualdades numéricas equivalentes:

$\arccos x_0 = b \Leftrightarrow \cos (\arccos x_0) = \cos b \Leftrightarrow x_0 = \cos b$. Así pues, para cada $b$ tal, que $0 \leqslant b \leqslant \pi$ la ecuación (11) tiene una raíz

*Tabla 14*

| | $b < 0$ | $b = 0$ | $0 < b < \pi$ | $b = \pi$ | $b > \pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\arccos x = b$ | no hay soluciones | $x_1 = 1$ | $x_1 = \cos b$ | $x_1 = -1$ | no hay soluciones |

única $x_0 = \cos b$, y para cada $b$ tal, que $b < 0$ y $b > \pi$, la ecuación (11) no tiene raíces.

En la tabla 14 se exponen los resultados de la resolución de la ecuación (11)

Sea dada la ecuación elemental

$$\text{arcsen } x = b. \tag{12}$$

El campo natural de definición de la función $y = \operatorname{arcsen} x$ es el segmento $[-1; 1]$. Esto significa que el CVA de la ecuación (12) es el conjunto $X = [-1; 1]$. En el conjunto $X$ la función $y = \operatorname{arcsen} x$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado creciente y el campo de sus valores está representado por el segmento $Y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Por consiguiente, la ecuación (12) no tiene soluciones, cuando cada $b$ es tal, que $b < -\frac{\pi}{2}$ ó $b > \frac{\pi}{2}$; si en cambio, $b$ es tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant b \leqslant \frac{\pi}{2}$, entonces la ecuación (12) tendrá una raíz única que se denotará con $x_1$. Puesto que $x_1$ es la raíz de la ecuación (12), $x_1 \in [-1, 1]$ y $b \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, es válida la siguiente cadena de igualdades numéricas equivalentes:

$$\operatorname{arcsen} x_1 = b \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x_1) = \operatorname{sen} b \Leftrightarrow x_1 = \operatorname{sen} b.$$

Así pues, la ecuación (12) tiene la raíz única $x_1 = \operatorname{sen} b$, cuando cada $b$ es tal, que $-\frac{\pi}{2} \leqslant b \leqslant \frac{\pi}{2}$, y no tiene raíces, cuando cada $b$ es tal, que $b < -\frac{\pi}{2}$ ó $b > \frac{\pi}{2}$.

En la tabla 15 se exponen los resultados obtenidos al resolver la ecuación (12)

*Tabla 15*

| | $b < -\frac{\pi}{2}$ | $b = -\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$ | $b = \frac{\pi}{2}$ | $b > \frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{arcsen} x = b$ | no hay soluciones | $x_1 = -1$ | $x_1 = \operatorname{sen} b$ | $x_1 = 1$ | no hay soluciones |

Sea dada la ecuación elemental

$$\operatorname{arctg} x = b. \tag{13}$$

El campo natural de definición de la función $y = \operatorname{arctg} x$ es el conjunto de todos los números reales. Quiere decir, el CVA de la ecuación (13) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. En este conjunto $X$ la función $y = \operatorname{arctg} x$ es estrictamente creciente y el campo de sus valores está representado por el intervalo $Y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Por consiguiente, la ecuación (13) no tiene soluciones, cuando cada $b$ es tal, que $b \leqslant -\frac{\pi}{2}$ ó $b \geqslant \frac{\pi}{2}$; si, en cambio, $b$ es tal, que $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$, la ecuación (13) tendrá una raíz única que se denotará con $x_1$. Por cuanto $x_1$ es la raíz de la ecuación (13), $x_1 \in$

$\in(-\infty, +\infty)$ y $b\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces es válida la siguiente cadena de igualdades numéricas equivalentes:

$$\text{arctg } x_1 = b \Leftrightarrow \text{tg } (\text{arctg } x_1) = \text{tg } b \Leftrightarrow x_1 = \text{tg } b.$$

Así pues, la ecuación (13) tiene la única raíz $x_1 = \text{tg } b$, cuando cada $b$ es tal, que $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$; y para cada $b$ tal, que $b \leqslant -\frac{\pi}{2}$ ó $b \geqslant \frac{\pi}{2}$ la ecuación (13) no tiene raíces.

En la tabla 16 se exponen los resultados que se obtienen al resolver la ecuación (13)

*Tabla 16*

| | $b \leqslant -\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$ | $b \geqslant -\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| arctg $x=b$ | no hay soluciones | $x_1 = \text{tg } b$ | no hay soluciones |

Sea dada la ecuación elemental

$$\text{arcctg } x = b. \tag{14}$$

El campo natural de definición de la función $y = \text{arcctg } x$ es el conjunto de todos los números reales. Quiere decir, el CVA de la ecuación (14) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. En este conjunto $X$ la función $y = \text{arcctg } x$ es estrictamente decreciente y el campo de sus valores está representado por el intervalo $Y = (0, \pi)$. Por consiguiente, la ecuación (14) no tiene soluciones, cuando cada $b$ es tal, que $b \leqslant 0$ ó $b \geqslant \pi$; en cambio, si $b$ es tal, que $0 < b < \pi$, la ecuación (14) tendrá una raíz única que se denotará con $x_1$. Por cuanto $x_1$ es la raíz de la ecuación (14), $x_1 \in (-\infty, +\infty)$ y $b \in (0, \pi)$, es válida la siguiente cadena de igualdades numéricas equivalentes:

$$\text{arcctg } x_1 = b \Leftrightarrow \text{ctg } (\text{arcctg } x_1) = \text{ctg } b \Leftrightarrow x_1 = \text{ctg } b.$$

Así pues, la ecuación (14) tiene la raíz única $x_1 = \text{ctg } b$, para cada $b$ tal, que $0 < b < \pi$, y para cada $b$ tal, que $b \leqslant 0$ ó $b \geqslant \pi$, la ecuación (14) no tiene raíces.

En la tabla 17 se exponen los resultados que se obtienen al resolver la ecuación (14).

*Tabla 17*

| | $b \leqslant 0$ | $0 < b < \pi$ | $b \geqslant \pi$ |
|---|---|---|---|
| arcctg $x=b$ | no hay soluciones | $x_1 = \text{ctg } b$ | no hay soluciones |

## § 3. Transformaciones equivalentes de las ecuaciones

En este párrafo y en el siguiente se analizan algunas transformaciones de las ecuaciones, con ayuda de las cuales una ecuación dada, que no es elemental, puede ser reducida a una ecuación elemental o a un conjunto de tales ecuaciones.

Al resolver una ecuación, que no es elemental, nos vemos obligados, por regla general, a realizar varias transformaciones, a veces bastante numerosas. En este caso, la ecuación se sustituye cada vez por alguna otra nueva y esta nueva ecuación puede tener, naturalmente, otras raíces. Una ecuación dada se resolverá correctamente, si, al realizar la transformación de las ecuaciones, una ecuación se sustituye cada vez por otra ecuación nueva que tenga las raíces de la ecuación anterior, y sólo ellas, es decir, que no haya pérdida o adquisición de raíces. Si una ecuación se sustituye cada vez por la ecuación equivalente, las raíces de la última serán precisamente las raíces de la ecuación de partida.

En el presente párrafo se examinan sólo las transformaciones equivalentes de las ecuaciones. Las transformaciones no equivalentes de las ecuaciones se examinarán en el párrafo siguiente.

Según lo expuesto ya en el § 1, las afirmaciones 1 . . . 4 ofrecen los ejemplos de transformaciones equivalentes. Demos algunos ejemplos más de transformaciones equivalentes de las ecuaciones.

**Transformaciones relacionadas con la aplicación de igualdades idénticas.** Sea dada la ecuación

$$f(x) = g(x) \tag{1}$$

y *supongamos que para todo $x$ real se verifica la igualdad idéntica $g(x) = \varphi(x)$, entonces la ecuación* (1) *es equivalente a la ecuación*

$$f(x) = \varphi(x). \tag{2}$$

Esta afirmación permite emplear diferentes igualdades idénticas, es decir, fórmulas que son lícitas para todos los valores reales con el fin de realizar transformaciones equivalentes de las ecuaciones. Como ejemplos de tales igualdades idénticas sirven las fórmulas de multiplicación reducida de los polinomios, la identidad trigonométrica fundamental y algunas otras fórmulas. Observemos que, realizando las transformaciones equivalentes de las ecuaciones con ayuda de las fórmulas de multiplicación reducida de los polinomios, se han resuelto en el capítulo III las ecuaciones cuadráticas y algunas otras ecuaciones algebraicas. Demos a conocer otros ejemplos en los que se realizan transformaciones equivalentes con ayuda de las igualdades idénticas.

Sea dada la ecuación

$$\cos^2 2x = 1 - 2\cos^2 x. \tag{3}$$

Haciendo uso de la identidad trigonométrica fundamental y de la fórmula para el coseno de un ángulo de arco doble, podemos escribir la igualdad idéntica

$$1 - 2\cos^2 x = -\cos 2x,$$

que será válida para cualquier $x$ real. Quiere decir, la ecuación (3) es equivalente a la ecuación

$$\cos^2 2x = -\cos 2x.$$

Aplicando la afirmación 1 del § 1 y agrupando los términos del primer miembro de la última ecuación, llegamos a que la ecuación (3) es equivalente a la ecuación

$$\cos 2x\,(\cos^2 2x + 1) = 0.$$

La última ecuación es equivalente al conjunto de dos ecuaciones trigonométricas elementales:

$$\cos 2x = 0, \quad \cos^2 2x + 1 = 0$$

El conjunto de todas las soluciones de la primera ecuación de este conjunto es la serie de soluciones $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, mientras que la segunda ecuación del mismo conjunto no tiene soluciones.

Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (3) se compone de la serie $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Analicemos ahora la ecuación

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c.$$

En el caso en que $a = 0$, o bien $b = 0$, esta ecuación se reduce, con ayuda de las afirmaciones 2 y 3 del § 1, a:

la ecuación elemental $\cos x = \frac{c}{b}$, si $a = 0$, $b \neq 0$;

la ecuación elemental $\operatorname{sen} x = \frac{c}{a}$, si $a \neq 0$, $b = 0$.

Supongamos, ahora, que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Esto significa que $a^2 + b^2 \neq 0$. Aplicando la afirmación 3, llegamos a que la ecuación (4) es equivalente a la ecuación

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{sen} x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (5)$$

1. Sea $a$ un número positivo. Examinemos dos casos: $b > 0$ y $b < 0$.

Sea $b > 0$. Construyamos un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud $a$ y $b$. El ángulo opuesto al cateto de longitud $b$ se designará con $\varphi_1$. Entonces tenemos las igualdades numéricas

$$\operatorname{sen} \varphi_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

de las cuales se deduce que $\varphi_1 = \arcsen \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Ahora la ecuación (5) adquiere la forma

$$\cos\varphi_1 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\varphi_1 \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Según la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos tenemos la igualdad idéntica

$$\cos \varphi_1 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \varphi_1 \cos x = \operatorname{sen} (x + \varphi_1).$$

Al aplicar ahora la afirmación enunciada más arriba, llegamos a que la ecuación 4 es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}(x+\varphi_1) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

que es una ecuación elemental.

Sea $b < 0$. Construyamos un triángulo rectángulo con los catetos $a$ y $|b|$. El ángulo opuesto al cateto de longitud $|b|$ se designará con $\varphi_2$. En este caso tenemos las igualdades numéricas

$$\operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

de las cuales se deduce que $\varphi_2 = \arcsen \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Ahora, por cuanto $b = -|b|$, la ecuación (5) toma la forma

$$\cos\varphi_2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\varphi_2 \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Según la fórmula para el seno de la diferencia entre dos ángulos tenemos la igualdad idéntica

$$\cos \varphi_2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \varphi_2 \cos x = \operatorname{sen} (x - \varphi_2)$$

Aplicando ahora la afirmación enunciada más arriba, llegamos a que la ecuación (4) es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}(x-\varphi_2) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

que es una ecuación elemental.

Si designamos $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, veremos con facilidad que $\varphi = \varphi_1$, cuando $b > 0$, y $\varphi = -\varphi_2$, para $b < 0$. Por eso podemos escribir que para $a > 0$ la ecuación (4) es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}\left(x + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

que es también una ecuación elemental.

2. El caso de $a < 0$ se reduce al analizado más arriba, multiplicando ambos miembros de la ecuación (4) por $(-1)$

**Ejemplo.** Resuélvase la ecuación

$$\cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x + 1 = 0. \tag{6}$$

Por cuanto la ecuación (6) es tal, que $a = \sqrt{3}, b = 1, \sqrt{a^2 + b^2} = 2$, entonces ella será equivalente a la ecuación

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Hallemos el ángulo $\varphi : \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$. Quiere decir, la ecuación (6) es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Resolviendo esta ecuación elemental, obtenemos dos series de soluciones:

$$x_k = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z, \quad \text{y} \quad x_m = \pi + 2\pi m, \quad m \in Z.$$

Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (6) lo constituyen dos series de soluciones:

$$x_k = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in Z, \quad \text{y} \quad x_m = \pi + 2\pi m, \quad m \in Z.$$

**Transformaciones relacionadas con las superposiciones de las funciones.** Supongamos que la función $y = f(x)$ es una función compuesta $y = P[g(x)]$ que representa la superposición de dos funciones: la interior $u = g(x)$ (la función elemental fundamental) y la exterior $y = P(u)$, donde $P(u)$ es un trinomio de segundo grado: $P(u) = au^2 + bu + c$. En estos casos la ecuación $f(x) = 0$ se escribe en la forma

$$a[g(x)]^2 + bg(x) + c = 0 \tag{7}$$

y se denomina *ecuación cuadrática respecto de* $g(x)$.

La ecuación (7) se resuelve del modo siguiente. Al principio se resuelve la ecuación cuadrática

$$at^2 + bt + c = 0 \tag{8}$$

Se determina el discriminante $D$ de la ecuación (8): $D = b^2 - 4ac$. Si $D < 0$, la ecuación (8) no tiene soluciones y, por tanto, la ecuación (7) tampoco las tiene. Si $D = 0$, la ecuación (8) tiene la única raíz: el número $\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Por consiguiente, en este caso la ecuación (7) es equivalente a la ecuación

$$g(x) = -\frac{b}{2a} \tag{9}$$

A continuación se resuelve la ecuación (9). En virtud de la equivalencia de las ecuaciones (7) y (9), el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (9) es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (7).

Si $D > 0$, la ecuación (8) tiene tan sólo dos raíces reales que se designarán con $t_1$ y $t_2$. Por consiguiente, en este caso la ecuación (7) será equivalente al conjunto de ecuaciones

$$g(x) = t_1, \quad g(x) = t_2. \tag{10}$$

Luego se resuelve el conjunto de ecuaciones (10). Por ser equivalentes la ecuación (7) y el conjunto de ecuaciones (10), el conjunto de todas las soluciones del conjunto de ecuaciones (10) es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (7).

Observemos que en el cap. III hemos resuelto, empleando este método, ecuaciones trinomias que pueden denominarse ecuaciones cuadráticas respecto de $x^n$, donde $n$ es un número natural y $n \geqslant 2$.

Aduzcamos unos **ejemplos.**

Sea dada la ecuación

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0. \tag{11}$$

Dado que es válida la igualdad idéntica $4^x = (2^x)^2$, la ecuación (11) es equivalente a la ecuación

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0.$$

Esta es una ecuación cuadrática respecto de $2^x$. Al resolver la ecuación cuadrática

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

llegamos a que ella tiene tan sólo dos raíces: $t_1 = 2$, $t_2 = 1$. Por consiguiente, la ecuación (11) es equivalente al conjunto de dos ecuaciones

$$2^x = 2, \quad 2^x = 1.$$

Al resolver cada una de las ecuaciones exponenciales elementales de este conjunto, resulta que dicho conjunto tiene sólo dos raíces: $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$.

Por consiguiente, la ecuación (11) tiene tan sólo dos raíces: $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$.

No siempre se logra transformar la ecuación dada directamente en la forma (7). Con este fin resulta necesario frecuentemente realizar algunas transformaciones equivalentes complementarias. Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$\operatorname{sen} 2x - 12(\operatorname{sen} x - \cos x) + 12 = 0 \tag{12}$$

podemos tomar a título de $g(x)$ la expresión $(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Con el objeto de representar la ecuación (12) en forma de (7), hagamos uso de las fórmulas trigonométricas

$$\operatorname{sen} 2x = 2\cos x \operatorname{sen} x, \quad 1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x,$$

y a continuación, de la igualdad idéntica

$$\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = (\operatorname{sen} x - \cos x)^2.$$

Resulta pues que la ecuación (12) es equivalente a la ecuación

$$-(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 - 12 (\operatorname{sen} x - \cos x) + 13 = 0. \qquad (13)$$

La ecuación (13) es cuadrática respecto de ($\operatorname{sen} x - \cos x$). Resolviendo la ecuación cuadrática

$$-t^2 - 12t + 13 = 0$$

vemos que ella tiene tan sólo dos raíces: $t_1 = 1$ y $t_2 = -13$

Por consiguiente, la ecuación (13) es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$\operatorname{sen} x - \cos x = 1, \quad \operatorname{sen} x - \cos x = -13 \qquad (14)$$

Valiéndose de la identidad $\operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, obtenemos que el conjunto de ecuaciones (14) es equivalente lo conjunto de ecuaciones elementales

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{13\sqrt{2}}{2} \qquad (15)$$

El conjunto de todas las soluciones de la primera ecuación lo constituyen dos series de soluciones:

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z \quad \text{y} \quad x_m = \pi + 2\pi m, \quad m \in Z$$

La segunda ecuación del conjunto (15) no tiene soluciones, puesto que $-\frac{13\sqrt{2}}{2} < -1$.

Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (12) lo constituyen dos series de soluciones

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z, \quad \text{y} \quad x_m = \pi + 2\pi m, \quad m \in Z,$$

Supongamos que la función $y = f(x)$ es una función compuesta, que representa la superposición de varias funciones elementales fundamentales. Por ejemplo, sea $y = f(x)$ la superposición de tres funciones elementales fundamentales $y = g\{\varphi[u(x)]\}$.

En estos casos la ecuación $f(x) = 0$ se escribe en la forma

$$g\{\varphi[u(x)]\} = 0 \qquad (16)$$

y se resuelve del modo siguiente.

Al principio se resuelve la ecuación elemental

$$g(t) = 0. \qquad (17)$$

La ecuación (17) puede no tener soluciones, entonces la ecuación (16), tampoco tiene soluciones.

La ecuación (17) puede tener un número finito o una infinidad de raíces. Supongamos que el conjunto de todas las raíces de la ecuación (17) se compone de los números $t_1$, $t_2$, $t_3$, . . ., $t_n$, . . . . Entonces la ecuación (16) será equivalente al conjunto de ecuaciones

$$\varphi[u(x)] = t_1, \quad \varphi[u(x)] = t_2, \quad \varphi[u(x)] = t_3, \ldots$$
$$\ldots, \varphi[u(x)] = t_n, \ldots . \qquad (18)$$

Ahora se resuelve el conjunto de ecuaciones elementales

$$\varphi(v) = t_1, \quad \varphi(v) = t_2, \quad \varphi(v) = t_3, \ldots, \varphi(v) = t_n, \ldots . \qquad (19)$$

El conjunto de ecuaciones (19) puede no tener soluciones y en este caso el conjunto de ecuaciones (18) no tiene soluciones, por lo cual la ecuación (16) tampoco las tiene.

El conjunto de ecuaciones (19) puede tener un número finito de raíces o una infinidad de ellas.

Supongamos que el conjunto de todas las raíces del conjunto (19) se compone de los números $v_1$, $v_2$, $v_3$, . . ., $v_k$, . . . . Entonces el conjunto de ecuaciones (18) es equivalente al conjunto de ecuaciones

$$u(x) = v_1, \; u(x) = v_2, \; u(x) = v_3, \quad \ldots, u(x) = v_k, \ldots . \qquad (20)$$

El conjunto de todas las raíces del conjunto de ecuaciones elementales (20) es el conjunto de todas las raíces de la ecuación (16).

Analicemos, por ejemplo, la ecuación

$$2^{\operatorname{sen}\sqrt{x}} = 1. \qquad (21)$$

Resolviendo la ecuación elemental $2^t = 1$, obtenemos su única solución $t_1 = 0$. Quiere decir, la ecuación (21) es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}\sqrt{x} = 0. \qquad (22)$$

Al resolver la ecuación elemental

$$\operatorname{sen} v = 0,$$

llegamos a que el conjunto de todas las soluciones lo constituye una serie de soluciones $v_k = \pi k$, $k \in Z$.

Por consiguiente, la ecuación (21) es equivalente al conjunto infinito de ecuaciones

$$\sqrt{x} = k\pi, \qquad (23)$$

donde $k$ es un número entero cualquiera.

Toda ecuación del conjunto (23), en la que $k$ es negativo, no tiene raíces, y cada ecuación, en la que $k$ es no negativo, tiene una raíz única $x_k = (\pi k)^2$.

Por consiguiente, el conjunto de todas las raíces de la ecuación (21) es el conjunto $\{(\pi k)^2 \mid k \in Z_0\}$.

## § 4. Transformaciones no equivalentes de las ecuaciones

En el párrafo anterior se han estudiado solamente las transformaciones equivalentes de las ecuaciones. No obstante, existen ecuaciones que no se resuelven aplicando solamente transformaciones equivalentes; al resolver las ecuaciones mucho más a menudo tenemos que aplicar *transformaciones no equivalentes*. En este caso hay que recordar que por ser no equivalentes las transformaciones, en general, se pueden *perder* algunas raíces de la ecuación de partida o *adquirir* las llamadas raíces extrañas (toda raíz de una ecuación sucesiva que no es la raíz de la ecuación de partida se denominará raíz *extraña*).

A continuación se dan ejemplos de las transformaciones no equivalentes que conducen tanto a la pérdida de las raíces de la ecuación de partida, como a la adquisición de raíces extrañas.

**Transformaciones relacionadas con las fórmulas logarítmicas.** Sea $a$ un número fijo tal, que $a > 0$ y $a \neq 1$. Veamos las siguientes fórmulas logarítmicas:

$$f(x) = a^{\log_a f(x)} \tag{1}$$

$$\log_a [f(x)]^2 = 2 \log_a f(x), \tag{2}$$

$$\log_a [f(x)]^2 = 2 \log_a [-f(x)], \tag{3}$$

$$\log_a [f(x) g(x)] = \log_a f(x) + \log_a g(x), \tag{4}$$

$$\log_a [f(x) g(x)] = \log_a [-f(x)] + \log_a [-g(x)], \tag{5}$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a f(x) - \log_a g(x), \tag{6}$$

$$\log_a \frac{f(x)}{g(x)} = \log_a [-f(x)] - \log_a [-g(x)]. \tag{7}$$

Si, al resolver la ecuación $\varphi(x) = h(x)$, aplicamos *formalmente* al miembro izquierdo o al derecho de esta ecuación cualquiera de las fórmulas en consideración de modo tal, que *el primer miembro de la fórmula citada sea sustituido por el segundo miembro, resultará posible la pérdida de las raíces* de la ecuación de partida, razón por la cual *las transformaciones de este tipo no son admisibles.*

Si aplicamos *formalmente* al primer o segundo miembro de la ecuación $\varphi(x) = h(x)$ cualquiera de las fórmulas en consideración de modo tal, que *el segundo miembro de la fórmula sea sustituido por el primer miembro*, las raíces de la ecuación $\varphi(x) = h(x)$ no se perderán; toda raíz de la ecuación $\varphi(x) = h(x)$ será también la raíz de la ecuación sucesiva, pero, en general, *no cualquier raíz de la ecuación sucesiva será la raíz para la ecuación de partida* y, por esta razón, si tales transformaciones se aplican, al final de la resolución resulta indispensable la *comprobación*, es decir, resulta necesario que cada raíz determinada del último conjunto de ecuaciones elementales o de la última ecuación elemental se sustituya en la ecuación de partida para ver cuáles de las raíces convierten la ecuación de partida en una

igualdad numérica lícita. Aquellas raíces que, siendo sustituidas en la ecuación de partida, la convierten en una igualdad numérica que no se verifica, han de ser despreciadas.

Más abajo se dan **ejemplos** que muestran que la aplicación formal de dichas fórmulas conduce tanto a la pérdida de las raíces de la ecuación de partida, como a la adquisición de raíces extrañas.

Sea dada la ecuación

$$\log_2 (x + 2)^2 = 6.$$

Aplicando formalmente la fórmula (2), obtenemos la ecuación

$$\log_2 (x + 2) = 3,$$

cuya raíz única es $x_1 = 6$.

Por cuanto en el proceso de resolución de la ecuación de partida se ha realizado una transformación, que pudo tener por resultado la pérdida de raíces, no se puede considerar resuelta la ecuación de partida. En efecto, una raíz de la ecuación de partida, a saber, el número (—10), se ha perdido durante esta transformación.

Sea dada la ecuación

$$3^{\log_3 (x^2-4x+3)} = x - 3.$$

Aplicando formalmente la fórmula (1), obtenemos la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = x - 3,$$

la cual tiene tan sólo dos raíces: $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

Por cuanto en el proceso de resolución de la ecuación de partida se ha realizado una transformación que pudo tener por resultado la adquisición de raíces extrañas, resulta indispensable la comprobación. La comprobación muestra que ni el número 2 ni el 3 son raíces de la ecuación de partida.

Por consiguiente, la ecuación de partida no tiene raíces.

Estos ejemplos enseñan que al resolver ecuaciones, las fórmulas logarítmicas han de aplicarse con cuidado, teniendo en memoria que su aplicación formal puede conducir tanto a la pérdida como a la adquisición de raíces.

Esto no puede ocurrir, si aplicamos cada una de las fórmulas (1) . . . (7) en aquél conjunto $M_1$ del CVA de la ecuación a resolver, sobre el cual tiene sentido el segundo miembro de la fórmula correspondiente. En estas condiciones la transformación conducirá a una ecuación que en el conjunto $M_1$ será equivalente a la de partida.

Al encontrar las raíces de la ecuación obtenida y al elegir entre éstas aquellas que pertenecen al conjunto $M_1$, encontraremos todas las raíces de la ecuación de partida en este conjunto $M_1$.

Se debe tener en memoria que la ecuación de partida queda resuelta de esta manera no en todo el CVA, sino que solamente en el conjunto $M_1$. Por esta razón se deben hallar, además, sus soluciones en aquella parte del CVA que queda después de restar el conjunto $M_1$.

Por consiguiente, si en el proceso de resolución de una ecuación surge la necesidad de realizar transformaciones con ayuda de cierta fórmula logarítmica, entonces esta ecuación se puede resolver según el esquema siguiente:

1. *Hallar el CVA de la ecuación.*
2. *Dividir el CVA en dos conjuntos:* $M_1$ y $M_2$ ($M_1$ representa la parte del CVA, donde tienen sentido simultáneamente ambos miembros de la fórmula que se emplea, $M_2$ es la parte del CVA que queda después de restar el conjunto $M_1$).
3. *Resolver la ecuación en el conjunto* $M_1$ (teniendo en cuenta que la transformación de la ecuación con ayuda de esta fórmula es una transformación equivalente en el conjunto $M_1$).
4. *Resolver la ecuación en* $M_2$.
5. *Reunir los conjuntos de raíces encontradas en* $M_1$ y $M_2$.

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, las ecuaciones analizadas más arriba.

Sea dada la ecuación

$$\log_2 (x + 2)^2 = 6.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto de todos los números reales, salvo el número $x = -2$. Dividamos el CVA en dos conjuntos: $M_1 = (-2, +\infty)$ y $M_2 = (-\infty, -2)$.

En el conjunto $M_1$ se verifica la igualdad idéntica

$$\log_2 (x + 2)^2 = 2 \log_2 (x + 2).$$

Quiere decir, en el conjunto $M_1$ la ecuación de partida es equivalente a la ecuación

$$\log_2 (x + 2) = 3,$$

la cual es equivalente en el conjunto $M_1$ a la ecuación $x + 2 = 8$. La última ecuación tiene la raíz única $x_1 = 6$. Por cuanto esta raíz entra en el conjunto $M_1$, la ecuación de partida también tendrá en el conjunto $M_1$ una raíz única $x_1 = 6$.

En el conjunto $M_2$ se verifica la igualdad idéntica

$$\log_2 (x + 2)^2 = 2 \log_2 [-(x + 2)].$$

Quiere decir, en el conjunto $M_2$ la ecuación de partida es equivalente a la ecuación

$$\log_2 (-x - 2) = 3,$$

la cual es equivalente, a su vez, en el conjunto $M_2$ a la ecuación

$$-x - 2 = 8.$$

La última ecuación tiene la única raíz $x_2 = -10$. Por cuanto esta raíz pertenece al conjunto $M_2$, la ecuación de partida también tendrá en el conjunto $M_2$ la única raíz $x_2 = -10$. Al reunir el conjunto de raíces encontradas en $M_1$ y $M_2$, obtenemos que el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida se compone de dos números:

$x_1 = 6$ y $x_2 = -10$.

Sea dada la ecuación $3^{\log_3(x^2-4x+3)} = x - 3$.

El CVA de esta ecuación es el conjunto de todos los $x$, para cada uno de los cuales $x^2 - 4x + 3 > 0$, es decir, el CVA es el conjunto $M = (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. Por cuanto en este conjunto se verifica la igualdad idéntica

$$3^{\log_3(x^2-4x+3)} = x^2 - 4x + 3,$$

la ecuación de partida será equivalente en el conjunto $M$ a la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = x - 3,$$

la cual tiene tan sólo dos raíces: $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$.

Como ninguna de estas raíces integra el CVA de la ecuación de partida, mientras que la última ecuación y la de partida son equivalentes en el CVA de la ecuación de partida, entonces resulta que la ecuación de partida no tiene raíces.

Así pues, la resolución de una ecuación con ayuda de cierta fórmula logarítmica es posible mediante dos procedimientos.

**Primer procedimiento.** Realizar el paso a una ecuación que sirve de consecuencia de la ecuación dada. Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida. Realizar la comprobación y establecer cuáles raíces son extrañas. Todas las raíces halladas, menos las raíces extrañas, constituirán el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

**Segundo procedimiento.** Realizar el paso equivalente en el conjunto $M_1$ ($M_1$ es toda la parte del CVA de la ecuación de partida, donde la fórmula logarítmica representa una igualdad idéntica). Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida en $M_1$. Luego, hallar todas las raíces de la ecuación de partida en el conjunto $M_2$ (en toda la parte restante del CVA de la ecuación de partida después de restar el conjunto $M_1$). Por fin, reunir los conjuntos de todas las raíces de la ecuación dada encontradas en $M_1$ y $M_2$ y obtener de este modo el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

**Transformaciones relacionadas con fórmulas trigonométricas.** Examinemos las siguientes fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \tag{8}$$

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \tag{9}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \tag{10}$$

$$\operatorname{tg}(x - \beta) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \beta}. \tag{11}$$

Si, al resolver la ecuación $\varphi(x) = h(x)$, aplicamos *formalmente* al miembro izquierdo o derecho de esta ecuación cualquiera de las fórmulas en consideración de modo tal, que el *primer miembro de esta fórmula sea sustituido por el segundo miembro, resultará posible la pérdida de raíces* de la ecuación de partida, por lo cual *las transformaciones de este tipo no son admisibles.*

Si aplicamos *formalmente* al miembro izquierdo o derecho de la ecuación $\varphi(x) = h(x)$ cualquiera de las fórmulas en consideración de modo tal, que *el segundo miembro de esta fórmula sea sustituido por el primer miembro, pueden adquirirse raíces extrañas*, por lo cual al final de la resolución es necesaria la comprobación.

He aquí unos **ejemplos** que muestran que la aplicación formal de las fórmulas mencionadas, al resolver una ecuación, puede conducir tanto a la pérdida de raíces, como a la adquisición de raíces extrañas.

Sea dada la ecuación

$$\operatorname{sen} 2x - 3\cos 2x = 3.$$

Al aplicar formalmente las fórmulas (9) y (10), obtendremos la ecuación

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} - \frac{3(1-\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 3.$$

Reescribamos esta ecuación en la forma

$$\frac{2(\operatorname{tg} x - 3)}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 0.$$

De aquí es evidente que el conjunto de todas las raíces de esta ecuación lo constituye la serie de soluciones $x_p = \operatorname{arctg} 3 + \pi p$, $p \in Z$.

Sin embargo, no se puede afirmar que se han hallado todas las raíces de la ecuación de partida, puesto que las transformaciones han sido de tal género que las raíces podían perderse. En efecto, al realizar las transformaciones citadas se ha perdido toda una serie de soluciones $x_m = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in Z$.

Sea dada la ecuación

$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} = 1.$$

Por cuanto $1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$, se puede reescribir la ecuación en la forma

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = 1.$$

Al aplicar formalmente la fórmula (11), obtendremos la ecuación

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

de donde se hace obvio que el conjunto de todas las raíces de esta ecuación lo constituye la serie de soluciones $x_l = \frac{\pi}{2} + \pi l$, $l \in Z$.

Por cuanto durante la transformación podían aparecer raíces extrañas, es indispensable la comprobación. La comprobación muestra que ninguna de las raíces será raíz de la ecuación de partida.

Por consiguiente, la ecuación de partida no tiene raíces.

Estos ejemplos muestran que, al resolver las ecuaciones, se necesita mucho cuidado en aplicar las fórmulas trigonométricas, teniendo en memoria que su aplicación formal puede conducir tanto a la pérdida de raíces como a la adquisición de éstas.

Esto no puede ocurrir, si cada una de las fórmulas (8) . . . (11) se aplica en aquel conjunto $M_1$ del CVA de la ecuación a resolver, donde tiene sentido el segundo miembro de la fórmula correspondiente. En este caso tal transformación conduce a una ecuación equivalente a la de partida en el conjunto $M_1$.

Une vez determinadas las raíces de la ecuación obtenida y elegidas entre ellas las raíces, pertenecientes al conjunto $M_1$, hallemos todas las raíces de la ecuación de partida en el conjunto $M_1$. Hay que acordarse de que la ecuación de partida queda resuelta de este modo no en todo el CVA, sino sólo en el conjunto $M_1$. Por eso, se debe hallar, además, su solución en aquella parte del CVA, la cual queda después de separar el conjunto $M_1$.

Por esta razón, las ecuaciones en cuya resolución resultan aplicables dichas fórmulas trigonométricas se resuelven, frecuentemente, siguiendo el mismo esquema que se ha aducido al examinar las fórmulas logarítmicas:

1. *Hallar el CVA de la ecuación.*

2. *Dividir el CVA en dos partes* $M_1$ y $M_2$ ($M_1$ es la parte del CVA, donde tienen sentido simultáneamente ambos miembros de la fórmula que se emplea, $M_2$ es aquella parte del CVA que queda después de separar el conjunto $M_1$).

3. *Resolver la ecuación en* $M_1$ (tomando en consideración que la transformación con ayuda de esta fórmula es una transformación equivalente en el conjunto $M_1$).

4. *Resolver la ecuación en el conjunto* $M_2$.

5. *Reunir los conjuntos de raíces determinados en* $M_1$ *y* $M_2$.

Resolvamos, siguiendo este esquema, las ecuaciones analizadas más arriba.

Sea dada la ecuación

$$\operatorname{sen} 2x - 3 \cos 2x = 3.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto de todos los números reales. Dividamos el CVA de dicha ecuación en dos conjuntos: $M_1$, que es el conjunto de todos los números reales, a excepción de los números $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera, y $M_2$,

que es el conjunto de los números $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera.

En el conjunto $M_1$ las fórmulas (9) y (10) son igualdades idénticas, por lo cual en el conjunto $M_1$ la ecuación de partida será equivalente a la ecuación

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} - \frac{3(1-\operatorname{tg}^2 x)}{1+\operatorname{tg}^2 x} = 3.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación lo constituye una serie de soluciones $x_m = \operatorname{arctg} 3 + \pi m$, $m \in Z$. Toda raíz de dicha serie pertenece al conjunto $M_1$, por esta razón, el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida en el conjunto $M_1$ lo constituye la serie $x_m = \operatorname{arctg} 3 + \pi m$, $m \in Z$.

Resolvamos la ecuación de partida en $M_2$. Sustituyendo cada número $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, en la ecuación de partida, nos convencemos de que ésta se convierte en una igualdad numérica lícita.

Por consiguiente, el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida en el conjunto $M_2$ lo constituye la serie $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Reuniendo los conjuntos de raíces encontradas en $M_1$ y $M_2$, obtenemos que el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida lo constituyen dos series $x_m = \operatorname{arctg} 3 + \pi m$, $m \in Z$, y $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Sea dada la ecuación

$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} = 1.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto de todos los números reales, salvo los números $x_m = -\frac{\pi}{4} + \pi m$, donde $m$ es un número entero cualquiera, y los números $x_l = \frac{\pi}{2} + \pi l$, donde $l$ es un número entero cualquiera. Por cuanto la fórmula (11) es en el CVA una igualdad idéntica, entonces la ecuación de partida será equivalente en el CVA a la ecuación

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación en el CVA lo constituye la serie $x_p = \pi/2 + \pi p$, donde $p$ es un número entero cualquiera. Es evidente que esta serie no forma parte del CVA de la ecuación de partida. Por consiguiente, la ecuación de partida no tiene raíces.

Así pues, la resolución de la ecuación con ayuda de cierta fórmula trigonométrica es posible mediante dos procedimientos.

**Primer procedimiento.** Realizar el paso a una ecuación que sirve de consecuencia de la ecuación dada. Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida, comprobar y establecer cuáles raíces son extrañas. Todas las raíces halladas, menos las extrañas, constituirán el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

**Segundo procedimiento.** Realizar el paso equivalente en el conjunto $M_1$ ($M_1$ es toda la parte del CVA de la ecuación de partida, donde la fórmula trigonométrica representa una igualdad idéntica). Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida en $M_1$. Luego, hallar todas las raíces de la ecuación de partida en el conjunto $M_2$ (en toda la parte restante del CVA de la ecuación dada después de separar el conjunto $M_1$). Reunir, por fin, los conjuntos de todas las raíces de la ecuación dada encontradas en $M_1$ y $M_2$ y obtener de este modo el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

**Transformaciones relacionadas con elevación a potencia natural.** Supongamos que $n$ es un número fijo natural y sea $n \geqslant 2$. Sea dada la ecuación

$$f(x) = g(x).$$

La sustitución de esta ecuación por la ecuación

$$[f(x)]^n = [g(x)]^n$$

se llama *elevación de la ecuación a la potencia natural n*.

Según se deduce de la afirmación 5, § 1, al elevar una ecuación a una potencia natural, *no se pueden perder raíces* sino, al contrario, sólo pueden *adquirirse raíces extrañas*. Por eso, si se aplica tal transformación, al final de ésta resulta necesaria la *comprobación* de las raíces halladas.

He aquí un **ejemplo** que muestra que dicha transformación puede realmente conducir a la adquisición de raíces extrañas.

Sea dada la ecuación

$$2\cos x = 3\operatorname{sen} x - 2.$$

Elevando al cuadrado esta ecuación y empleando la identidad trigonométrica fundamental, obtenemos la ecuación

$$4(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 9\operatorname{sen}^2 x - 12\operatorname{sen} x + 4,$$

la cual es equivalente al conjunto de dos ecuaciones:

$$\operatorname{sen} x = 0, \quad \operatorname{sen} x = \frac{12}{13}.$$

El conjunto de todas las raíces de la primera ecuación de este conjunto lo constituyen dos series: $x_m = 2\pi m$, $m \in Z$, y $x_q = \pi + 2\pi q$, $q \in Z$. El conjunto de todas las raíces de la segunda ecuación lo constituyen también dos series:

$$x_p = \operatorname{arcsen}\frac{12}{13} + 2\pi p,\ p \in Z, \text{ y } x_k = \pi - \operatorname{arcsen}\frac{12}{13} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Por cuanto, al resolver la ecuación de partida, se realizó la elevación de la ecuación al cuadrado, es posible que entre las raíces halladas haya extrañas, por consiguiente, se necesita la comprobación. La comprobación muestra que toda raíz de la serie $x_m = 2\pi m$, $m \in Z$, es una raíz extraña, y cada raíz de la serie $x_q = \pi + 2\pi q$, $q \in Z$, es la raíz de la ecuación de partida.

Además, la comprobación muestra que toda raíz de la serie $x_k = \pi - \arcsen \frac{12}{13} + 2\pi k$, $k \in Z$, es extraña, mientras que toda raíz de la serie $x_p = \arcsen \frac{12}{13} + 2\pi p$, $p \in Z$, es la raíz de la ecuación de partida.

Por eso el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida lo constituyen dos series: $x_q = \pi + 2\pi q$, $q \in Z$, y $x_p = \arcsen \frac{12}{13} + 2\pi p$, $p \in Z$.

Señalemos, además, que al realizar la elevación de una ecuación a potencia natural, se emplea, a menudo, la siguiente fórmula

$$(\sqrt[n]{f(x)})^n = f(x).$$

Está claro que si, al resolver la ecuación, sustituimos $(\sqrt[n]{f(x)})^n$ por $f(x)$, se pueden adquirir raíces extrañas, por lo cual al final de la resolución es necesaria la comprobación.

Demos un ejemplo de tal transformación de una ecuación.

Sea dada la ecuación

$$\sqrt{x^2 + x - 5} = \sqrt{x - 1}.$$

Elevando esta ecuación al cuadrado y sustituyendo

$$(\sqrt{x^2 + x - 5})^2 \text{ por } (x^2 + x - 5), \text{ y } (\sqrt{x - 1})^2 \text{ por } (x - 1),$$

obtenemos la ecuación

$$x^2 + x - 5 = x - 1.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación se compone de dos números: $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$. Por cuanto, al resolver la ecuación de partida, tuvo lugar la elevación de la ecuación al cuadrado y la sustitución de $(\sqrt[n]{f(x)})^n$ por $f(x)$, pudieron aparecer raíces extrañas, por lo cual es necesaria la comprobación. La comprobación señala que la raíz $x_2 = -2$ no es raíz de la ecuación de partida, mientras que $x_1 = 2$ es raíz de la ecuación citada.

Por consiguiente, la ecuación de partida tiene la raíz única $x_1 = 2$.

Hemos de notar que, corrientemente, al elevar una ecuación a la potencia natural $n$, la sustitución de $(\sqrt[n]{f(x)})^n$ por $f(x)$ no se especifica.

En lugar del procedimiento descrito puede ofrecerse también otro método que se basa en la aplicación de la afirmación 7, § 1.

Si se emplea el método aducido, la ecuación puede ser resuelta según el esquema siguiente:

1. *Hallar el CVA de la ecuación.*

2. *Dividir el CVA en dos conjuntos*: $M_1$ *y* $M_2$ ($M_1$ es la parte del CVA en la cual ambos miembros de la ecuación son simultáneamente o bien no negativos o bien no positivos, $M_2$ es aquella parte del CVA, en la cual los miembros derecho e izquierdo de la ecuación son de signos opuestos).

En este caso se hace claro que en $M_2$ la ecuación no tiene raíces, por lo cual el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida está contenido dentro de $M_1$.

3. *Resolver la ecuación en el conjunto* $M_1$. El conjunto de todas las raíces encontrado en $M_1$ será el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida (aquí se toma en consideración que la elevación de la ecuación de partida a potencia natural conduce a una ecuación que es equivalente en el conjunto $M_1$ a la de partida).

Resolvamos, rigiéndonos por el esquema descrito, la ecuación

$$\sqrt{2x+29}=3-x.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto $X=\left[-\frac{29}{2}, +\infty\right)$.

Dividamos el CVA en dos conjuntos: $M_1=\left[-\frac{29}{2}, 3\right]$ y $M_2=$ $=(3, +\infty)$. En el conjunto $M_2$ la ecuación de partida no tiene raíces, puesto que para todo $x \in M_2$ el primer miembro de la ecuación es positivo y el segundo, negativo. Resolvamos la ecuación en el conjunto $M_1$. Dado que en este conjunto ambos miembros de la ecuación de partida son no negativos, después de elevar al cuadrado la ecuación de partida, se obtiene una ecuación que es equivalente a ella:

$$2x+29=(3-x)^2.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación lo representan dos números, $x_1=-2$ y $x_2=10$. Por cuanto el número $x_2=10$ no pertenece al conjunto $M_1$, no será raíz de la ecuación de partida.

Por cuanto el número $x_1=-2$ pertenece al conjunto $M_1$, será raíz de la ecuación de partida.

Por consiguiente, la ecuación de partida tiene la única solución $x_1=-2$.

Así pues, la resolución de una ecuación elevándola a potencia natural resulta posible mediante dos procedimientos.

**Primer procedimiento.** Realizar el paso a una ecuación que es consecuencia de la ecuación de partida. Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida. Efectuar la comprobación y establecer cuáles raíces son extrañas. Aquellas raíces, pertenecientes al conjunto de todas las raíces halladas, que no son extrañas constituyen precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación.

**Segundo procedimiento.** Realizar el paso equivalente en el conjunto $M_1$ ($M_1$ es la parte del CVA de la ecuación de partida, donde ambos miembros de la ecuación de partida son simultáneamente o bien no negativos o bien no positivos). Hallar en $M_1$ todas las raíces de la ecuación obtenida. Todas estas raíces constituyen precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

**Transformación relacionada con la supresión del denominador.** Sea dada la ecuación

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\varphi(x).$$

La sustitución de esta ecuación por la ecuación

$$f(x)=g(x)\varphi(x)$$

se denomina *supresi´n de la ecuación del denominador*.

Está claro que, al realizar tal transformación de una ecuación, es posible la aparición de raíces extrañas. Por eso, si en el proceso de resolución de una ecuación se suprime el denominador de la ecuación, resulta indispensable la comprobación de todas las raíces halladas.

Pongamos un ejemplo de aplicación de tal transformación. Sea dada la ecuación

$$\frac{2(x-7)}{x^2-6x-7}=1.$$

Suprimiendo el denominador, obtenemos la ecuación

$$2x-14=x^2-6x-7.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación se compone de dos números: $x_1=1$ y $x_2=7$.

En el proceso de resolución de la ecuación de partida se ha realizado una transformación que pudo tener por resultado la aparición de raíces extrañas, por lo cual se necesita la comprobación. La comprobación muestra que el número $x_2-7$ no es raíz de la ecuación de partida, mientras que el número $x_1=1$ es la raíz de la ecuación mencionada. Así pues, la ecuación de partida tiene la única raíz $x_1=1$.

Observemos que, de acuerdo con la afirmación 9, § 1, la ecuación

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\varphi(x)$$

es equivalente en su CVA a la ecuación

$$f(x)=g(x)\varphi(x).$$

Por ello, la resolución de tales ecuaciones puede realizarse según el siguiente esquema:

1. *Hallar el CVA de la ecuación* $\frac{f(x)}{g(x)}=\varphi(x)$.

2. *Resolver en el CVA de la ecuación dada la ecuación equivalente* $f(x) = g(x)\,\varphi(x)$.

Por cuanto las ecuaciones $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$ y $f(x) = g(x)\,\varphi(x)$ son equivalentes en el CVA de la primera ecuación, todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)\,\varphi(x)$ que integran el CVA de la primera ecuación constituirán el conjunto de todas las raíces de la ecuación $\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x)$.

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, la ecuación

$$\frac{\operatorname{sen}^4 x - 1}{\cos^4 x} = 1.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto $M$ de todos los números reales, salvo los números $x_m = \frac{\pi}{2} + \pi m$, donde $m$ es un número entero cualquiera. En el conjunto $M$ la ecuación de partida es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}^4 x - 1 = \cos^4 x.$$

Por cuanto en el conjunto de todos los números reales se verifican las igualdades idénticas

$$\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x),$$
$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1, \quad \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x,$$

entonces en dicho conjunto será válida también la igualdad idéntica

$$\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x.$$

Por eso la ecuación de partida será equivalente en el conjunto $M$ a la ecuación

$$\cos 2x = -1.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última ecuación es la serie $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Como esta serie no pertenece al conjunto $M_1$, la ecuación no tiene raíces.

Así pues, la resolución de una ecuación suprimiendo el denominador es posible mediante dos procedimientos:

**Primer procedimiento.** Realizar el paso a una ecuación que representa una consecuencia de la ecuación de partida. Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida, comprobar y establecer cuáles raíces son extrañas. Las raíces del conjunto de todas las raíces halladas que no son extrañas constituirán precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación.

**Segundo procedimiento.** Realizar el paso equivalente en el CVA de la ecuación de partida. Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida. Todas estas raíces constituirán el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

**Transformaciones relacionadas con la potenciación de una ecuación.** Sea $a$ un número fijo positivo cualquiera, distinto de la unidad. Sea dada la ecuación

$$\log_a f(x) = \log_a g(x).$$

La sustitución de esta ecuación por la ecuación

$$f(x) = g(x)$$

se llama *potenciación de la ecuación.*

Según se deduce de la afirmación 6 del § 1, al realizar la potenciación de una ecuación, *no se pueden perder raíces, sino sólo adquirir extrañas.* Por eso, si, al resolver una ecuación, se realiza la potenciación, resulta necesaria la *comprobación* al final de la resolución.

Resolvamos mediante este procedimiento la ecuación

$$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 (4x - 7).$$

Al realizar la potenciación de la ecuación dada, obtenemos otra ecuación

$$x^2 - 4 = 4x - 7.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación se compone de dos números $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$.

En el transcurso de la resolución de la ecuación de partida se ha realizado la potenciación de la ecuación, por lo cual es posible la aparición de raíces extrañas y esto requiere la comprobación. La comprobación señala que el número $x_2 = 1$ no es raíz de la ecuación de partida, mientras que $x_1 = 3$ es la raíz de la ecuación de partida. Por eso la ecuación de partida tiene la única raíz $x_1 = 3$.

Observemos que según la afirmación 8 del § 1, la ecuación

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

es equivalente en su CVA a la ecuación

$$f(x) = g(x).$$

Por eso la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ puede resolverse según el esquema siguiente:

1. *Hallar el CVA de la ecuación* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.
2. *Resolver en el CVA de esta ecuación la ecuación equivalente* $f(x) = g(x)$.

Todas las raíces de la última ecuación constituirán precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, el ejemplo examinado más arriba.

Sea dada la ecuación

$$\log_2 (x^2 - 4) = \log_2 (4x - 7).$$

Al CVA de esta ecuación es el conjunto $M = (2, +\infty)$. En el conjunto $M$ la ecuación dada es equivalente a la ecuación $x^2 - 4 = 4x - 7$.

El conjunto de todas las soluciones de la última ecuación se compone de dos números: $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$. Por cuanto el número $x_2 = 1$ no pertenece al conjunto $M$, mientras que el número $x_1 = 3$ pertenece a $M$, entonces la última ecuación tiene en $M$ tan sólo una raíz que es $x_1 = 3$. Como la última ecuación y la de partida son equivalentes en el conjunto $M$, resulta, pues, que la ecuación de partida tiene la única raíz $x_1 = 3$.

Así pues, la resolución de una ecuación aplicando la potenciación es posible mediante dos procedimientos.

**Primer procedimiento.** Realizar el paso a una ecuación que representa una consecuencia de la ecuación de partida. Hallar todas las raíces de la ecuación obtenida. Comprobar y establecer cuáles raíces son extrañas. Las raíces del conjunto de todas las raíces halladas que no son extrañas constituirán precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación.

**Segundo procedimiento.** Realizar el paso equivalente en el CVA de la ecuación de partida, hallar todas las raíces de la ecuación obtenida en el CVA de la ecuación de partida. Todas estas raíces constituirán precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

**Transformación relacionada con la logaritmación de una ecuación.** Supongamos que $a$ es un número positivo fijo distinto de la unidad. Sea dada la ecuación

$$f(x) = g(x).$$

La sustitución de esta ecuación por la ecuación

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

se denomina *logaritmación de la ecuación.*

Según se desprende de la afirmación 6 § 1, al logaritmar una ecuación se pueden perder raíces. Por eso *la aplicación formal de esta transformación se prohíbe.*

Cabe señalar que la logaritmación de la ecuación $f(x) = g(x)$ puede realizarse sólo en el conjunto $M$, es decir, en toda la parte del CVA, donde ambos miembros de la ecuación citada son positivos. En este caso, como se deduce de la afirmación 6 § 1, las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ son en el conjunto $M$ equivalentes.

Por esta razón, la resolución de la ecuación $f(x) = g(x)$ aplicando la logaritmación de la ecuación, resulta posible sólo según el siguiente esquema:

1. *Hallar el CVA de la ecuación dada.*

2. *Dividir el CVA en dos conjuntos*: $M_1$ *y* $M_2$ ($M_1$ es la parte del CVA, donde ambos miembros de la ecuación dada son positivos;

$M_2$ es la parte del CVA que queda después de restar de éste el conjunto $M_1$).

3. *Resolver la ecuación en* $M_1$ (tomando en consideración que en $M_1$ la ecuación $f(x) = g(x)$ es equivalente a la ecuación $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

4. *Resolver la ecuación en* $M_2$.

5. *Reunir los conjuntos de todas las raíces determinadas en* $M_1$ *y* $M_2$.

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, la ecuación

$$3^{x^2-x} = 3^{1-(\sqrt{x})^2}.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto $M = [0, +\infty)$. Por cuanto ambos miembros de la ecuación dada son positivos en el conjunto $M$, en este conjunto la ecuación citada es equivalente a la ecuación

$$x^2 - x = 1 - (\sqrt{x})^2.$$

La ecuación obtenida es, a su vez, equivalente en el conjunto $M$ a la ecuación

$$x^2 = 1.$$

La última ecuación tiene tan sólo dos raíces: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$. La raíz $x_1 = 1$ pertenece al conjunto $M$, mientras que la raíz $x_2 = -1$ no pertenece al conjunto $M$. Por consiguiente, la última ecuación tiene en el conjunto $M$ una sola raíz $x_1 = 1$. Como la ecuación de partida es equivalente a la última ecuación en el conjunto $M$ (todo el CVA de la ecuación de partida), la ecuación de partida tiene la única raíz $x_1 = 1$.

**Transformaciones relacionadas con la simplificación de la ecuación por el factor común.** Sea dada la ecuación

$$\varphi(x) f(x) = \varphi(x) g(x).$$

Esta ecuación se sustituye a menudo por la ecuación

$$f(x) = g(x),$$

es decir la ecuación de partida se simplifica por el factor común $\varphi(x)$, lo que constituye un gran error que puede conducir tanto a la *pérdida de raíces* de la ecuación de partida, como a la *adquisición de raíces extrañas*.

Veamos un ejemplo. Sea dada la ecuación

$$\sqrt{x-2}\,(x^2+3) = 4x\sqrt{x-2}.$$

Simplificando esta ecuación por el factor común $\sqrt{x-2}$, llegamos a la ecuación

$$x^2 + 3 = 4x.$$

El conjunto de todas las raíces de la última ecuación se compone de dos números: $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$.

Es fácil ver, sin embargo, que el número $x_1 = 1$ no es raíz de la ecuación de partida, es decir, este número es una raíz extraña para la ecuación de partida. Al mismo tiempo resulta evidente que el número $x_3 = 2$ es raíz de la ecuación de partida que se ha perdido al realizar la transformación.

Por lo tanto, efectivamente, al simplificar una ecuación por el factor común $\varphi(x)$, se pueden perder las raíces de la ecuación de partida y se pueden adquirir raízes extrañas.

Las ecuaciones de este tipo se deben resolver de la manera siguiente.

1. *Hallar el CVA de la ecuación* $\varphi(x) f(x) = \varphi(x) g(x)$.

2. *Escribir una ecuación equivalente a la mencionada:* $\varphi(x) \times \times [f(x) - g(x)] = 0$.

3. *Pasar de esta ecuación al conjunto de ecuaciones, equivalente en el CVA a la ecuación de partida*

$$\varphi(x) = 0, \quad f(x) - g(x) = 0.$$

4. *Resolver este conjunto de ecuaciones en el CVA de la ecuación de partida.* En este caso el conjunto de todas las raíces de este conjunto, cada una de las cuales pertenece al CVA de la ecuación de partida, constituirá precisamente el conjunto de todas las raíces de la ecuación de partida.

Resolvamos, mediante este procedimiento la ecuación

$$\sqrt{x-2}\,(x^2+3) = 4x\sqrt{x-2}.$$

El CVA de esta ecuación es el conjunto $M = [2, +\infty)$. Escribamos la ecuación, equivalente a la de partida,

$$\sqrt{x-2}\,(x^2-4x+3) = 0.$$

Esta ecuación es equivalente en el conjunto $M$ al conjunto de ecuaciones

$$\sqrt{x-2} = 0, \quad x^2-4x+3 = 0.$$

La primera ecuación de este conjunto tiene la única raíz $x_1 = 2$. La segunda ecuación tiene tan sólo dos raíces: $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. Quiere decir, el conjunto de todas las raíces de este conjunto consta de tres números: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$. Las raíces $x_1$ y $x_2$ integran el conjunto $M$, mientras que la raíz $x_3$ no figura en el conjunto $M$.

Por consiguiente, la ecuación de partida tiene solamente dos raíces: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

**Transformaciones relacionadas con la simplificación de la ecua-**

**ción por el factor común.** Sea dada la ecuación

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_m(x)| - |f_{m+1}(x)| - \ldots$$
$$\ldots - |f_k(x)| = g(x), \qquad (12)$$

donde $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ son polinomios enteros respecto de $x$. Para resolver semejantes ecuaciones *es menester*, como regla, *suprimir los signos de valores absolutos*. Observemos que *la supresión formal de los signos de valores absolutos puede conducir tanto a la pérdida de raíces de la ecuación de partida, como a la adquisición de raíces extrañas*. Mostrémoslo.

Sea dada la ecuación

$$|x - 1| = 2x + 4.$$

Si suprimimos formalmente el signo de valor absoluto, obtendremos la ecuación

$$x - 1 = 2x + 4,$$

la cual tiene la única raíz $x_1 = -5$. Es fácil ver, sin embargo, que esta raíz no es raíz de la ecuación de partida, es decir, para la ecuación de partida es extraña. Al mismo tiempo podemos ver con facilidad que el número $x_2 = -1$ es la raíz de la ecuación de partida y esta raíz se ha perdido al realizar la transformación. Por lo tanto, efectivamente, al suprimir formalmente los signos de valor absoluto, se pueden perder raíces de la ecuación de partida y se pueden adquirir raíces extrañas.

Para resolver las ecuaciones de este tipo se emplea con mayor frecuencia el así llamado *método de intervalos*. La esencia de este método consiste en lo siguiente:

Sea dada la ecuación (12). Al principio se resuelve el conjunto de ecuaciones

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad \ldots, f_m(x) = 0, \quad \ldots, f_k(x) = 0, \qquad (13)$$

a continuación se marcan en la recta numérica todas las raíces de este conjunto de ecuaciones.

De este modo, toda la recta numérica se divide en cierto número de intervalos y en cada uno de estos intervalos la ecuación se sustituye por otra ecuación que no contiene signos de valor absoluto y es equivalente en dicho intervalo a la ecuación de partida. En cada intervalo se hallan las raíces de la ecuación que se obtiene en el intervalo dado y, a continuación, de las raíces halladas se escogen aquellas que caen en el intervalo dado. Estas últimas serán precisamente raíces de la ecuación de partida en el intervalo que se conside-

ra. Por fin, para escribir todas las raíces de la ecuación de partida se reúnen todas las raíces de ella, determinadas en todos los intervalos.

Ilustremos este método con algunos ejemplos.

Sea dada la ecuación

$$| x - 1 | = 2x + 4. \qquad (14)$$

En este caso el conjunto de ecuaciones (13) consta de una ecuación

$$x - 1 = 0,$$

que tiene la única raíz: el número 1. Quiere decir, la recta numérica se divide en dos intervalos: $(-\infty, 1)$ y $[1, +\infty)$.

Veamos cómo se resuelve la ecuación (14) en cada uno de estos intervalos.

1. En el intervalo $(-\infty, 1)$ tenemos, por definición de valor absoluto:

$$| x - 1 | = -(x - 1)$$

Por eso, en dicho intervalo la ecuación (14) es equivalente a la ecuación

$$-(x - 1) = 2x + 4,$$

que tiene la única raíz $x_1 = -1$. Esta raíz cae en el intervalo $(-\infty, 1)$. Esto significa que en dicho intervalo la ecuación (14) tiene la única raíz $x_1 = -1$.

2. Por definición de valor absoluto en el intervalo $[1, +\infty)$

$$| x - 1 | = x - 1.$$

Por eso en este intervalo la ecuación (14) es equivalente a la ecuación

$$x - 1 = 2x + 4,$$

que tiene la única raíz $x_2 = -5$. Esta raíz no cae en el intervalo $[1, +\infty)$. Quiere decir, en el intervalo dado la ecuación (14) no tiene raíces.

Al resumir, llegamos a que la ecuación de partida (14) tiene la única raíz $x_1 = -1$.

Sea dada la ecuación

$$| x^2 - 1 | - | x | + | 2x + 3 | = 4x - 6. \qquad (15)$$

Veamos el conjunto de ecuaciones

$$x^2 - 1 = 0, \quad x = 0, \quad 2x + 3 = 0.$$

El conjunto de todas las raíces de este conjunto de ecuaciones se compone de cuatro números: 1; $-1$; 0; $-\frac{3}{2}$. Quiere decir, la recta numérica se divide en cinco intervalos: $\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right)$, $\left[-\frac{3}{2};\ -1\right)$, $[-1;\ 0)$, $[0;\ 1)$, $[1;\ +\infty)$.

Señalemos la resolución de la ecuación (15) en cada uno de los intervalos citados.

1. En el intervalo $\left(-\infty,\ -\frac{3}{2}\right)$, de acuerdo con la definición de valor absoluto, tenemos

$$|x^2 - 1| = (x^2 - 1),\quad |x| = -x,\quad |2x + 3| = -(2x + 3).$$

Por eso, en dicho intervalo la ecuación (15) es equivalente a la ecuación

$$(x^2 - 1) - (-x) - (2x + 3) = 4x - 6,$$

la cual tiene tan sólo dos raíces:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2},\quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}.$$

Ninguna de estas raíces entra en el intervalo en consideración, razón por la cual la ecuación (15) no tiene raíces en dicho intervalo.

2. En el intervalo $\left[-\frac{3}{2};\ -1\right]$, por definición de valor absoluto, tenemos

$$|x^2 - 1| = (x^2 - 1),\quad |x| = -x,\quad |2x + 3| = (2x + 3).$$

Por eso, la ecuación (15) es equivalente en este intervalo a la ecuación

$$(x^2 - 1) - (-x) + (2x + 3) = 4x - 6.$$

Esta ecuación cuadrática no tiene raíces reales. Por consiguiente, la ecuación (15) no tiene raíces en este intervalo.

3. Por definición de valor absoluto en el intervalo $[-1;\ 0)$

$$(x^2 - 1) = -(x^2 - 1),\quad |x| = -x,\quad |2x + 3| = (2x + 3).$$

Por eso, en dicho intervalo la ecuación (15) es equivalente a la ecuación

$$-(x^2 - 1) - (-x) + (2x + 3) = 4x - 6,$$

la cual tiene solamente dos raíces:

$$x_3=\frac{-1-\sqrt{41}}{2}, \quad x_4=\frac{-1+\sqrt{41}}{2}.$$

Ninguna de estas raíces entra en el intervalo en consideración, por lo cual la ecuación (15) no tiene raíces dentro del intervalo indicado.

4. Por definición de valor absoluto, en el intervalo [0; 1)

$$|x^2-1|=-(x^2-1), \quad |x|=x, \quad |2x+3|=2x+3.$$

Por eso, en este intervalo la ecuación (15) es equivalente a la ecuación

$$-(x^2-1)-x+(2x+3)=4x-6,$$

que tiene solamente dos raíces: $x_5=-5$, $x=2$. Ninguna de estas raíces entra en el intervalo en consideración, por lo cual la ecuación (15) no tiene raíces en dicho intervalo.

5. En el intervalo $[1; +\infty)$, por definición de valor absoluto, tenemos

$$|x^2-1|=(x^2-1), \quad |x|=x, \quad |2x+3|=(2x+3).$$

Por eso, en este intervalo la ecuación (15) es equivalente a la ecuación

$$(x^2-1)-x+(2x+3)=4x-6.$$

Esta ecuación cuadrática no tiene raíces reales, por lo cual la ecuación (15) no tiene raíces en dicho intervalo.

Al resumir, llegamos a que la ecuación (15) no tiene raíces en toda la recta numérica.

Indiquemos, como conclusión que en este párrafo se han considerado no todas las transformaciones posibles, sino sólo aquellas que se usan con mayor frecuencia. Se puede, por supuesto, dar también otros ejemplos de transformaciones no equivalentes, como, por ejemplo, supresión de los términos semejantes, paso a una base nueva de logaritmos que contenga una magnitud desconocida u otras. No nos detendremos en ello detalladamente, sino enunciemos solamente una regla general.

Al resolver las ecuaciones, se debe emplear uno de los siguientes dos procedimientos:

1. Sustitución de la ecuación dada por otra ecuación que sea equivalente a la dada en cierto conjunto; en este caso se muestra explícitamente tanto el propio conjunto, como el hecho de que las ecuaciones son equivalentes precisamente en dicho conjunto (se deben analizar todos los conjuntos en que se divide el CVA).

2. Sustitución de la ecuación dada por otra ecuación que sea una consecuencia de la dada; en este caso se indica por qué la ecuación nueva es una consecuencia de la anterior, y al fin de la resolución resulta ser obligatoria la comprobación.

¿Será el número 2 una raiz de las siguientes ecuaciones (1 . . . 15):

1. $3+\frac{x}{4}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[x-\frac{1}{5}(27-x)+\frac{1}{2}(x-8)\right]-1-\frac{x}{2}\right\}\div\frac{x+1}{2}$;

2. $\frac{3x-4}{3}-\frac{(8x-11)(x+1)}{4}=\frac{(6x-1)(2x-3)}{12}$;

3. $4x^2+5x-2\sqrt{3x^2-5x+2}=x(15-2x)$;

4. $\sqrt{14+25x}-\sqrt{1+4x}=\sqrt{9x+7}$;

5. $|x-1|+|2x-6|=3$; 6. $|2-|1-|x|||=1$;

7. $3^{2x+1}+9=28\cdot 3^x$; 8. $27^x+3^{1+x}+3^{1-x}+27^{-x}=\frac{551\,368}{729}$;

9. $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$;

10. $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=(2\sqrt{2})^x-\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x$;

11. $2^{\log_5 3}\cdot x^{1-\log_5\left(\frac{15x}{2}\right)}=1$;

12. $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{3x}{8}}+3\log_{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{3x}{8}\right)=\log_{\frac{1}{16}}\left|\left(1-\frac{9x^2}{64}\right)^2+2\right.$;

13. $\sqrt{\log_{\frac{x}{4}}\sqrt{\frac{x}{8}}\cdot\log_2\frac{x}{4}}=1$;

14. $\operatorname{sen}^2\frac{x}{\pi}+\cos\frac{2x}{\pi}-2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{8}\cos\frac{x}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

15. $2\arccos\left(\frac{x}{2}\right)=\arccos(3-x)$?

¿Serán equivalentes la ecuación $x = 2$ y las siguientes ecuaciones (16 . . . . . . 30):

16. $3\{10-2[3x-2(x-5)]+7x\}=3x-4$;

17. $\sqrt{4x^2+8x-28}-x=2-\sqrt{3x^2+8x-24}$;

18. $(x^2-5x-7)^2-(x-2)(x-3)=1$;

19. $x^2+\frac{4}{x^2}=15\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)-17\frac{1}{2}$;

20. $|5x-x^2-6|=x^2-5x+6$; 21. $\sqrt{x^2-6x+9}=(x-3)^2$;

22. $2^{x+2}=15+2^{2-x}$; 23. $2^x+5^{x-1}=5^x-2^{x+2}$;

24. $5^{2x-1}+5^{x+1}=250$; 25. $3^x\sqrt[3]{8^x}=36$;

26. $\lg\sqrt[3]{75+5^{\sqrt{3x-2}}}=\frac{2}{3}$;

27. $\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)]\}=\frac{1}{2}$;

28. $\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=1-\lg(2^{x-2}+1)$;

29. $\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_4(3^{x-1}+1)^2$;

30. $\frac{\cos(\pi x)-1}{\sqrt{(1-x)(x+3)}}=0$?

¿Serán equivalentes las siguientes dos ecuaciones (31 . . . 66):

31. $x+1=0$ y $(x+1)(x+4)=0$;

32. $(x-1)=0$ y $(\sqrt{x}+1)(x-1)=0$;

33. $x^2=2-x$ y $\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{2-x}{x^2-1}$;

34. $x+4=0$ y $\frac{x+4}{x^2-2x+9}=0$;

35. $x-4=8-x$ y $x-4+\frac{7}{x-6}=8-x+\frac{7}{x-6}$;

36. $2x-6=9+x$ y $2x-6+\sqrt{x^2+1}=9+x+\sqrt{x^2+1}$;

37. $x(x+4)=x+4$ y $\frac{x(x+4)}{\log_2(1-x^2)}=\frac{x+4}{\log_2(1-x^2)}$;

38. $(x-3)=2x+1$ y $(x-3)\sqrt{x+4}=(2x+1)\sqrt{x+4}$;

39. $x^2-2=0$ y $x^4-4=0$;

40. $x^2-4x+3=0$ y $\frac{x^2-4x+3}{x-1}=0$;

41. $x^2+3=4x$ y $(x^2+3)(x-1)=4x(x-1)$;

42. $\frac{x-3}{x+2}=\frac{x^2-9}{x^2+x-2}$ y $(x-3)(x^2+x-2)=(x^2-9)(x+2)$;

43. $\frac{x+3}{x^2+3}+\frac{1}{3}=\frac{x^2}{x^2+3}$ y $3(x+3)+x^2+3=3x^2$;

44. $x^2+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-2}=2x$ y $x^2=2x$;

45. $\frac{x^2-25}{x+5}=-14$ y $x-5=-14$;

46. $\frac{x^2-25}{x+5}=-10$ y $x-5=-10$;

47. $(x+3)(x-1)=2(x-1)$ y $x+3=2$;

48. $(x+2)(x-1)=3(x-1)$ y $x+2=3$;

49. $x^2-2x=8$ y $(x^2-2x)\,2^{\sqrt{x}}=8\cdot 2^{\sqrt{x}}$;

50. $(2x-3)=3x-2$ y $(2x-3)^2=(3x-2)^2$;

51. $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x^2+2x-4}$ y $x^2-2=x^2+2x-4$;

52. $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+2}=0$ y $\sqrt{(1+x)(x+2)}=0$;

53. $\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-3}=\sqrt{6}$ y $\sqrt{(x+2)(x-3)}=\sqrt{6}$;

54. $x^2-7=3^{\log_3 6x}$ y $x^2-7=6x$;

55. $\sqrt{(x+2)^2}=1$ y $x+2=1$;

56. $\sqrt{(x^2-4x+4)^2}=4$ y $x^2-4x+4=4$;

57. $\sqrt[4]{(x+1)^4}=2$ y $|x+1|=2$;

58. $\log_4(x-1)^2=0$ y $2\log_4(x-1)=0$;

59. $\log_5 x^4=0$ y $4\log_5|x|=0$;

60. $\log_7 x^5=0$ y $5\log_7 x=0$;

61. $\log_{(x+2)^2}(x+1)^2=0$ y $\log_{x+2}(x+1)=0$;

62. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(x+3)=0$ y $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+3)=0$;

63. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} 2x=0$ y $\frac{1}{\operatorname{tg} x}+\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}=0$;

64. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{tg} 2x=0$ y $\operatorname{sen} 3x=0$;

65. $\operatorname{sen} x \cos x = \cos^2 x$ y $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}^2 x$;

66. $\operatorname{sen} x \cos x = \cos^2 x$ y $\operatorname{tg} x = 1$?

Indíquese cuál de las dos ecuaciones siguientes es consecuencia de la otra (67 ... 92):

67. $(x+2)(x+1)^2 = 3(x+1)^2$ y $x+2=3$.

68. $x^2+4x+3=0$ y $(x^2+4x+3)\cdot 2^{\sqrt{x+2}}=0$.

69. $x^3-\dfrac{4x(x+2)}{x+2}=0$ y $x^3-\dfrac{4x^2}{x}=0$.

70. $\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}$ y $x^2=4$.

71. $x^2-7x=8$ y $\sqrt{4-x^2}\,(x^2-7x)=8\sqrt{4-x^2}$.

72. $x^2=16$ y $x^2\log_2(x-5)=16\cdot\log_2(x-5)$.

73. $x^2-6=5x$ y $\dfrac{x^2-6}{\sqrt{5-x^2}}=\dfrac{5x}{\sqrt{5-x^2}}$.

74. $x-4=2x+3$ y $\dfrac{x-4}{\lg x}=\dfrac{2x+3}{\lg x}$.

75. $x^2-\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{4}{x+3}+3x=0$ y $x^2+3x=0$.

76. $x^3-2x=0$ y $x^3-\dfrac{2x^2}{x}=0$.

77. $\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-4}=\sqrt{30}$ y $\sqrt{(x+3)(x-4)}=\sqrt{30}$.

78. $\sqrt{x^2-5x-6}=4$ y $x^2-5x-6=16$.

79. $\log_2(x+1)^2=2$ y $\log_2(x+1)=1$.

80. $\log_2(x+2)+\log_2(x-3)=1$ y $\log_2(x+2)(x-3)=1$.

81. $\sqrt{3}\cdot\operatorname{sen} x\cos x=\cos^2 x$ y $\sqrt{3}\operatorname{tg} x=1$.

82. $\dfrac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{\cos x}{\sqrt{x-1}}$ y $\operatorname{sen} x=1$.

83. $\cos 2x\cdot\sqrt{4-x^2}=\operatorname{sen} 4x\cdot\sqrt{4-x^2}$ y $\cos 2x=\operatorname{sen} 4x$.

84. $\operatorname{tg} x+\dfrac{1}{\log_2 x}-\dfrac{1}{\log_2 x}=\operatorname{tg}^2 x$ y $\operatorname{tg} x=1$.

85. $\cos x\cdot\log_5(x-1)=\operatorname{sen} x\cdot\log_5(x-1)$ y $\cos x=\operatorname{sen} x$.

86. $\operatorname{arcsen} x^2=\dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{\operatorname{arcsen} x^2}{\log_3(-x)}=\dfrac{\pi}{2\log_3(-x)}$.

87. $\arccos x=\pi$ y $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{x}}=\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$.

88. $|x^2-1|=x+1$ y $x^2-1=x+1$.

89. $|x^2-4|=x+2$ y $4-x^2=x+2$.

90. $|x+1|+|x-1|=6$ y $x=3$.

91. $|x+1|+|x-1|=-x^2+3$ y $2x=-x^2+3$.

92. $|x+1|+|x-1|=-x^2+2$ y $2x=-x^2+2$.

¿Serán equivalentes la ecuación y el conjunto de ecuaciones (93 . . . 124):

| Ecuación | Conjunto de ecuaciones |
| --- | --- |
| 93. $(x^2-1)(x+2)=0$ | $x=-1,\ x=1,\ x=-2;$ |
| 94. $2x^4-3x^3-4x^2+3x+2=0$ | $x=1,\ x=2;$ |
| 95. $\frac{5(6-x)}{x-2}=\frac{10(5-x)}{3(x-4)}-\frac{11(6-x)}{3(x-4)}$ | $x=\frac{7}{2},\ x=7;$ |
| 96. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$ | $x=81,\ x=64;$ |
| 97. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$ | $x=1,\ x=5;$ |
| 98. $\sqrt{x+1}=x-1$ | $x=0,\ x=3;$ |
| 99. $\sqrt{22-x}=2+\sqrt{10-x}$ | $x=4,\ x=6;$ |
| 100. $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{2x+3}$ | $x=-1,\ x=3;$ |
| 101. $x^2-\sqrt{x^2-9}=21$ | $x=-5,\ x=5;$ |
| 102. $\sqrt{14+25x}-\sqrt{1+4x}=\sqrt{7+9x}$ | $x=1,\ x=2;$ |
| 103. $\sqrt{2x^2+3x-2}+\sqrt{8x^2-2x-1}=\sqrt{18x^2+5x-7}$ | $x=2,\ x=-\frac{1}{2};$ |
| 104. $\frac{x^2}{3}+\frac{3}{x^2}=5\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{x}\right)$ | $x=-1,\ x=\frac{3-\sqrt{21}}{2},\ x=3,\ x=\frac{3+\sqrt{21}}{2};$ |
| 105. $\lvert x-3\rvert=\lvert x-3\rvert^2$ | $x=0,\ x=2;$ |
| 106. $\lvert x-1\rvert+\lvert x+2\rvert=4+\lvert x-3\rvert$ | $x=-8,\ x=2;$ |
| 107. $\lvert 2-\lvert 1-\lvert x\rvert\rvert\rvert=1$ | $x=-4,\ x=-2,\ x=2,\ x=4;$ |
| 108. $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=(2\sqrt{2})^x-\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x$ | $x=2,\ x=0;$ |
| 109. $8^{\frac{x}{x+1}}=4\cdot 3^{2-x}$ | $x=-\frac{\lg 6}{\lg 3},\ x=2;$ |
| 110. $2\cdot 4^{2x}-17\cdot 4^x+8=0$ | $x=\frac{3}{2},\ x=-\frac{1}{2};$ |
| 111. $x^{x^2-5x+6}=1$ | $x=2,\ x=3;$ |
| 112. $x^x+139x^{-x}-108x^{-2x}=32$ | $x=1,\ x=2,\ x=3;$ |
| 113. $\log_2(9-2^x)=3-x$ | $x=0,\ x=3;$ |

| Ecuación | Conjunto de ecuaciones |
|---|---|
| **114.** $\log_{\frac{5x}{2}} \frac{x}{10} + \log_5^2 \frac{x}{2} = 1$ | $x=2,\ x=10;$ |
| **115.** $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$ | $x=4,\ x=8;$ |
| **116.** $\log_2 (9^{x-1}+7) = 2 + \log_2 (2^{x-1}+1)$ | $x=1,\ x=2;$ |
| **117.** $\sqrt{3 \log_2 (-x)} = \log_2 \sqrt{x^2}$ | $x=-8,\ x=-1;$ |
| **118.** $\lg \left\| \frac{x^2-x-1}{x^2+x-2} \right\| = 0$ | $x=-\frac{\sqrt{6}}{2},\ x=\frac{1}{2},\ x=\frac{\sqrt{6}}{2};$ |
| **119.** $4\cos^3 x + 3\cos(\pi - x) = 0$ | $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k \in Z;$ |
| **120.** $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$ | $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2},\ k \in Z;$ $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi m}{2},\ m \in Z;$ |
| **121.** $\operatorname{ctg} x \operatorname{sen} 3x (\cos x - 2) = 0$ | $x=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l \in Z;\ x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n \in Z;$ |
| **122.** $\arccos x = \pi + \operatorname{arc\,sen} \frac{4x}{3}$ | $x=-\frac{3}{5},\ x=-\frac{2}{3};$ |
| **123.** $\cos(4 \arccos x) = -\frac{1}{2}$ | $x=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ x=-\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{2},$ $x=\frac{\sqrt{3}}{2};$ |
| **124.** $\operatorname{arc\,sen} x - \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{2} - \operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{3}\,x}{2} = 0$ | $x=-1,\ x=0,\ x=1?$ |

Resuélvanse las siguientes ecuaciones (125...326)

**125.** $\left(2x+1\frac{1}{2}\right)\left(3x-\frac{5}{2}\right) = (x-1{,}125)(2x-1{,}25).$

**126.** $\frac{x+1}{x+3}+\frac{4}{x+7}=1.$ **127.** $\frac{x-5}{2}+\frac{2x-1}{2+3x}=\frac{5x-1}{10}-1\frac{2}{5}.$

**128.** $\frac{6x-5}{4x-3}=\frac{3x+3}{2x+5}.$ **129.** $\frac{3-5x}{x+2}=2+\frac{x-11}{x+4}.$

**130.** $\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x+2}=\frac{3}{x}.$ **131.** $\frac{7}{x^2+x-12}-\frac{6}{x^2+2x-8}=0.$

**132.** $\frac{x-3}{x^2-3x-4}=\frac{x-1}{x^2-x-2}.$ **133.** $\frac{x^2-7x+10}{x^2-7x+12}=\frac{x^2+3x-10}{x^2+3x-8}.$

**134.** $x^2+4x-\frac{7}{x^2+4x+5}=1.$ **135.** $\frac{3}{x+1}+\frac{7}{x+2}=\frac{6}{x-1}.$

136. $\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+8}=0.$

137. $\frac{2}{x-14}-\frac{5}{x-13}=\frac{2}{x-9}-\frac{5}{x-11}.$

138. $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{30}.$ 139. $\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2}=\frac{5(2-x^2)}{2x}.$

140. $x^3-x^2-100=0.$ 141. $x^3-7x^2+14x-8=0.$

142. $2x^4-5x^3-5x^2+18=0.$ 143. $6x^4-2x^3-17x^2+2x+11=0.$

144. $3x^5-5x^3+2=0.$ 145. $x^7-6x^6+13x^5-12x^4+4x^3=0.$

146. $1-|x|=\frac{1}{2}.$ 147. $|-x+2|=2x+1.$

148. $\frac{7x+4}{5}-x=\frac{|3x-5|}{2}.$ 149. $|x-1|+|x-2|=1.$

150. $|x-1|+|x+2|-|x-3|=4.$ 151. $|4(1-x)|=|5x-4|+x.$

152. $|1-x^2|=1-x^2.$ 153. $|x^2-1|=1-|x|.$

154. $|x^2-9|+|x^2-4|=5.$ 155. $\left|\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\right|+\left|\frac{1}{2}x^2-3x+4\right|=\frac{3}{4}.$

156. $|x^2-3x+2|=4-x^2+|x|.$ 157. $\frac{7}{|x-1|-3}=|x+2|.$

158. $\frac{|x^2-3x|+5}{x^2+|x+3|}=1.$ 159. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2+5x+4}\right|=1.$

160. $|3-|x+2||=4.$ 161. $\left|\frac{x^2-6|x|+7}{x^2+6x+7}\right|=1.$

162. $\sqrt{x+8}=\sqrt{5x+20}-2.$ 163. $\sqrt{10-x}-\sqrt{x}=\sqrt{x-5}.$

164. $\sqrt{x-10}-\sqrt{4-x}+x=4.$ 165. $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4.$

166. $x^2-3=\sqrt{4x^2-4x+1}.$ 167. $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=3+x^2.$

168. $\sqrt{x+5}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-1}.$

169. $\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{1-x}.$

170. $\sqrt{9+4x^2-12x}+\sqrt{10x-x^2-21}=2x+3{,}5.$

171. $\sqrt{x^2-8x+7}+\sqrt{5x-x^2-4}=-|1-x^3|.$

172. $\sqrt{4x^2+25-10x}-7=|x-2|-3x.$

173. $(x+1)\sqrt{10x-21-x^2}=x^2-11x+24.$

174. $\sqrt{x}=1-\sqrt{x-\sqrt{1-x}}.$

175. $\left(1-\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)\sqrt{1+\sqrt{x}}=\sqrt{x}.$

176. $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}}=1-\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}.$

177. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1.$

178. $\frac{x+2}{\sqrt{-1-x}+1}=1-\frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}.$

179. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-7}+\sqrt{x^2+1}+7=0.$

180. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{\sqrt{x-1}+2}=2.$

181. $\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2-2x+1}.$

182. $x^2+4x-16\sqrt{2x}+20=0.$

183. $\sqrt{\sqrt{x+4}+1}+\sqrt{\sqrt{3-x}+2}=x^2-x-42.$

184. $\sqrt[4]{512}=8^{3x}2^{1-x}$. 185. $125^{2-3x}=\sqrt{\frac{1}{25}}$.

186. $\left(\frac{5}{9}\right)^{2x-7}=\sqrt[3]{\left(\frac{5}{9}\right)^{1-3x}}$. 187. $\left(\frac{4}{7}\right)^{x}\left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1}-\frac{16}{49}=0$.

188. $9^x\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x}=\sqrt{27^x}\sqrt[3]{81^{x+3}}$.

189. $3^{x(x-2)-\frac{8x+5}{2}}-9\sqrt{243}=0$.

190. $[(\sqrt{0{,}11})^{x+2}]^{3-x}=0{,}001331$.

191. $(32^{\frac{1}{x-7}})^{x+5}=[\sqrt{0{,}0625}\,(2\cdot\sqrt{4096})^{x+17}]^{\frac{1}{x-3}}$.

192. $3^{2+\log_3 2}\cdot\sqrt{729}=2\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{81}\right)^{x+1}}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

193. $2\cdot5^{x+2}-5^{x+3}=375$. 194. $3\cdot4^{x-2}=2\,(256-16^{\frac{x+1}{2}})$.

195. $6^x-2^{x-1}\cdot3^{x-2}=2\sqrt{5^{\log_5 289}}$.

196. $3\sqrt{2^{x-31}}-5\sqrt{2^{x-35}}-32=0$.

197. $3^{\sqrt{x^2}+2}-3^{\sqrt{x^2}+1}-3^{\sqrt{x^2}-1}=68$. 198. $2^{(3^x)}=3^{(2^x)}$.

199. $5^x\,(3x+5^x)=4\,(3x+4)$. 200. $14\cdot7^{x-1}=3\cdot5^{x+2}$.

201. $3\cdot13^x+13^{x+1}-2^{x+2}=5\cdot2^{x+1}$.

202. $2\cdot5^{x+1}-\frac{1}{5}\cdot4^{x+2}-\frac{1}{3}\cdot5^{x+2}=3\cdot4^{x-1}$.

203. $3\,(10^x-6^{x+2})+4\cdot10^{x+1}=5\,(10^{x-1}+6^{x-1})$.

204. $9^x-8\cdot3^x+7=0$. 205. $4-2^{x+2}=3$.

206. $2^x\,(7-2^x)=2\cdot7^{\log_7 3}$. 207. $4^{2x-1}=13\cdot4^{x-2}-21$.

208. $2^x=26+3\cdot2^{\frac{x-3}{2}}$. 209. $2\,(9^x+4^x)-5\cdot6^x=0$.

210. $3\cdot16^x+36^x=2\cdot81^x$. 211. $4^{-\frac{1}{x}}+6^{-\frac{1}{x}}=9^{-\frac{1}{x}}$.

212. $4^{3x^2+x}-8=2\cdot8^{x^2+\frac{x}{3}}$. 213. $2^{2x+6}+4\,(4^{2x}-8^{x+1})=0$.

214. $\sqrt[3]{25^x}-\sqrt[3]{9^x}-\sqrt[3]{15^x}=0$.

215. $7^{2x}+7^{-2x}-7^{x+1}-7^{1-x}+8=0$.

216. $\left(\frac{1}{2}\right)^x\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^x+1\right]=2^x+1$.

217. $2^x\,(2^{3x}-2^x+2)=2\cdot8^x-1$. 218. $5^x-32=\frac{108-139\cdot5^x}{25^x}$.

219. $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\frac{101}{10\,(2-\sqrt{3})}$.

220. $\log_2(x+4)=\log_2 4\,(\log_2 7-\log_2 5)$.

221. $\log_7 x=2\log_7(2x-15)$.

222. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{2}}(x-3)=1$.

223. $2\log_\pi(x-1)+\log_\pi(x-30)^2=4$.

224. $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$.

225. $\log_3 \log_8 \log_2 (x+5) = \log_8 2 - 1$.

226. $\log_8 (2 \log_3 (1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 x))) = \frac{1}{3}$.

227. $1 + \lg (1 + x^2 + 2x) - \lg (x^2 + 6) = 2 \lg (x + 1)$.

228. $\lg (2x - 3)^2 - \lg (3x - 1)^2 = 2$.

229. $\log_{\frac{1}{2}} (4 - x) = \log_{\frac{1}{2}} 2 - \log_{\frac{1}{2}} (x - 1)$.

230. $2 - \log_2 (x^2 + 3x) = 0$.

231. $\log_4 (x^2 - 1) - \log_4 (x - 1)^2 = \log_4 \sqrt{(2 - x)^2}$.

232. $\log_9 (x^2 + 2x - 3) = \log_9 \frac{x - 1}{x + 3}$.

233. $\log_6 (x + 1) = \log_6 (1 - x) + \log_6 (2x + 3)$.

234. $\frac{\lg 2 + \lg (4 - 5x - 6x^2)}{\log (2x - 1)} = 3$.

235. $\log_{\sqrt{2}} \left| \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x - 2} \right| = 0$.

236. $\log_{\frac{1}{2}} (x - 1) + \log_{\frac{1}{2}} (x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} (7 - x) = 1$.

237. $\lg \sqrt{1 + x} + 3 \lg \sqrt{1 - x} = \lg \sqrt{1 - x^2} + 2$.

238. $\sqrt{\log_2 x^4} + 4 \log_2 \sqrt[4]{\frac{2}{x}} = 2$.

239. $\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \log_4 x - 2} = 4$.

240. $\sqrt{\log_9 (9x^3) \cdot \log_3 (9x)} = \log_3 x^2$.

241. $\sqrt{2 \left( \log_2 \frac{x^2}{64} - 1 \right) (2 + \log_4 (8x))} = \log_2 (2x)$.

242. $\frac{1}{5 - 4 \lg (x + 1)} = 3 - \frac{1}{1 + \lg (x + 1)}$.

243. $\log_2 (4^x + 4) = x + \log_2 (2^{x+1} - 3)$.

244. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$.

245. $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$.

246. $\log_{5x} \frac{5}{x} + \log_5^2 x = 1$.

247. $\lg (3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4 - \sqrt{4x+1}}) = 2 - \sqrt{x + 0,25} \lg 4 + \frac{\lg 16}{4}$.

248. $\lg \sqrt[3]{75 + 5^{\sqrt{3x-5}}} = \frac{2}{3}$.

249. $2 \log_2 (\log_2 x) + \log_{1/2} (\log_2 (2 \sqrt{2} x)) = 1$.

250. $\log_{1-2x} (6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x} (4x^2 - 4x + 1) = 2$.

251. $\log_{5x-1} (10x^2 - 7x + 1)^4 = 2 + \log_{2x-1} (25x^2 - 10x + 1)$.

252. $\log_{(x-6)^2} (x^2 - 5x + 9) = \frac{1}{2}$.

253. $\log_{(x-1)^2} (4 - 4x + x^2) = 2 + \log_{(x-1)^2} (x + 5)^2$.

254. $\log_{x+1} (x^2 + x - 6)^2 = 4$. 255. $\log_4 [(x - 1)^{\log_4 (x-1)^2}] = 2$.

256. $\log_2 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6$.

257. $x+\lg(1+2^x)=x\lg 5+\lg 6$.
258. $\log_4 \log_2 x+\log_2 \log_4 x=2$. 259. $|\log_2|x||=2$;
260. $\operatorname{sen}\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}$. 261. $\sqrt{100-x^2}\cdot\operatorname{sen} 2x=0$.
262. $\cos(4x+2)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 263. $\frac{\cos 3x}{\sqrt{81-x^2}}=0$.
264. $\operatorname{tg}\left(\frac{x+1}{2}\right)=-10$. 265. $\operatorname{ctg}\frac{3x+2}{4}=11\sqrt{2}$.
266. $\sqrt{4x+77-x^2}\cdot\operatorname{tg} x=0$. 267. $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\log_2(14+5x-x^2)}=0$.
268. $4\cos x+5\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 269. $2\operatorname{sen} x-3\cos x=-\frac{1}{2}$.
270. $\operatorname{tg} x^2=-\sqrt{3}$. 271. $\operatorname{ctg}\sqrt{x}=1$.
272. $\sqrt{\operatorname{sen} x}=\cos x$. 273. $\sqrt{5-2\operatorname{sen} x}=6\operatorname{sen} x-1$.
274. $\sqrt{9-4\sqrt{3}-(16-8\sqrt{3})\operatorname{sen} x}=4\operatorname{sen} x-3$.
275. $\operatorname{sen}\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\operatorname{sen} x$.
276. $\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 3x+4\cos^3 x=0$.
277. $\operatorname{tg} 2x-4\operatorname{sen} x\cos x+1=4\operatorname{sen}^2 x$.
278. $4+\operatorname{sen}^2 x=(3+\sqrt{3})\operatorname{sen} 2x-2(2-\sqrt{3})\cos^2 x$.
279. $\operatorname{sen} 2x=1+\sqrt{2}\cos x+\cos 2x$.
280. $\operatorname{sen} 2x+\operatorname{sen} 3x=2$.
281. $4(\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} x)^2-\operatorname{sen} 3x=5$.
282. $\cos^{40} 2x-\operatorname{sen}^{40} 2x=1$.
283. $\sqrt{1+\operatorname{sen} 2x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}=1$.
284. $\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x=1$, 285. $\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x=\operatorname{sen} 2x$.
286. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.
287. $\operatorname{sen} 2x-12(\operatorname{sen} x-\cos x)+12=0$.
288. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\operatorname{sen}\alpha\left(1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.
289. $\cos x+\operatorname{sen} x=\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}$.
290. $\operatorname{tg} 2x\cos 4x(4-\operatorname{sen}^2 7x)=0$.
291. $8\cos^4 x=3+5\cos 4x$.
292. $2(\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x)=\operatorname{sen} 4x$.
293. $\operatorname{sen} 4x\operatorname{sen} 6x=2(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 5x)$.
294. $1-\operatorname{tg} 2x=4\operatorname{sen}^2 2x$.
295. $\operatorname{sen} 5x\operatorname{sen} 4x=-\cos 6x\cos 3x$.
296. $\cos x=\cos 3x+2\operatorname{sen} 2x$.
297. $\operatorname{sen}^4 x+5\cos 2x+4=0$.
298. $\operatorname{tg}^2 x+8\cos 2x\operatorname{ctg} 2x=\operatorname{ctg}^2 x$.
299. $\cos 7x-\operatorname{sen} 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\operatorname{sen} 7x)$.
300. $(\cos x-\operatorname{sen} x)\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)+\operatorname{sen} x=2\cos^2 x$.

**301.** $2\,\text{sen}^2 2x + \text{sen}^2 4x = \frac{5}{4}$.

**302.** $\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2} = 3\,\text{sen}^2\frac{x}{2}$.

**303.** $\text{sen}\,x - 2\,\text{sen}\,2x + \text{sen}\,3x = |1 - 2\cos x + \cos 2x|$.

**304.** $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) - \sqrt{6}\,\text{sen}\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{12}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{x}{5} + \frac{2\pi}{3}\right) -$
$- 2\,\text{sen}\left(\frac{3x}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$.

**305.** $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) - \text{ctg}\,(\pi\,\text{sen}\,x) = 0$.

**306.** $2\,\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\,\text{sen}\,2x\cos^2 2x}$.

**307.** $2 - \sqrt{3}\cos 2x + \text{sen}\,2x = 4\cos^2 3x$.

**308.** $5^{\sqrt{(\log_5 x + \log_5 9)\log_5 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 1,8}}$.

**309.** $\text{sen}^2 2^{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}$. **310.** $\log_{\frac{1}{8\cos^2 x}} \text{sen}\,x = \frac{1}{2}$.

**311.** $|\cos x|^{\text{sen}^2 x - \frac{3}{2}\text{sen}\,x + \frac{1}{2}} = 1$. **312.** $81^{\text{sen}^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$.

**313.** $4^{\text{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$, **314.** $2^{1 + 2\cos 5x} + 16^{\text{sen}^2 \frac{5}{2} x} = 9$.

**315.** $81^{(\text{sen}\,2x - 1)\cos 3x} - 9^{(\text{sen}\,x - \cos x)^2} = 0$.

**316.** $3^{\text{sen}\,2x + 2\cos^2 x} + 3^{1 - \text{sen}\,2x + 2\,\text{sen}^2 x} = 28$.

**317.** $x^2\log_3 x^2 - (2x^2 + 3)\log_9(2x + 3) = 3\log_3\frac{x}{2x + 3}$.

**318.** $x^2 3^{x-2} + 3^{\sqrt{x} + 2} = 3^x + x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}}$.

**319.** $\sqrt{x}\,(9^{\sqrt{x^2 - 3}} - 3^{\sqrt{x^2 - 3}}) = 3^{2\sqrt{x^2 - 3} + 1} - 3^{\sqrt{x^2 - 3} + 1} + 6\sqrt{x} - 18$.

**320.** $x^2\log_6\sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x\log_{1/6}(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x$.

**321.** $3^{-\frac{1}{2}} + 6^{-\frac{1}{2} + \log_6 \text{sen}\,x} = 3^{-\frac{1}{2} + \log_2 \cos x}$.

**322.** $4^{\text{tg}^2 x} - 4^{\frac{1}{1 + \cos 2x}} \log_{2\sqrt[3]{2}} 4 = -\log_{\text{sen}\,x} \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

**323.** $4 \cdot 2^{4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} - 16,5 \cdot 4^{\cos x + \text{sen}\,x} = -\frac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{4}} 16$.

**324.** $\text{sen}\,\pi x + \text{sen}\,(\log_x x^{3\pi x}) = \cos\pi x - \cos(\log_{\sqrt[3]{x}} x^{\pi x})$.

**325.** $\cos 2x + \log_4\left(\frac{1}{2}\text{sen}\,x\right) + 2\cos x \cdot \log_{1/2}\text{sen}\,x =$
$= 2\cos x + \text{sen}^2 x \cdot \log_2 \text{sen}^2 x$.

**326.** $2\log_{25}(5^{2\,\text{sen}\,x} - 4) = 2\,\text{sen}\,x + \text{sen}\,\frac{3\pi}{2}$.

CAPÍTULO

# VIII

# DESIGUALDADES CON UNA SOLA INCÓGNITA

Sean dadas dos funciones: $y = f(x)$ e $y = g(x)$, cuyos campos de existencia son $P$ y $L$, respectivamente. Supongamos que el campo $M$ es una intersección de los campos de existencia de las funciones citadas, es decir, $M = P \cap L$ (en particular, el campo $M$ puede ser un conjunto vacío).

Planteemos un problema: hállense todos los números $\alpha$ del campo $M$, para cada uno de los cuales se verifica la desigualdad numérica $f(\alpha) > g(\alpha)$. En estos casos se dice que el problema consiste en *resolver la desigualdad* $f(x) > g(x)$ *con una sola incógnita* $x$, *o bien que está dada la desigualdad* $f(x) > g(x)$ *con una sola incógnita* $x$.

En este capítulo se analizan algunos métodos destinados para resolver solamente desigualdades con una sola incógnita. Por eso en lo que sigue diremos simplemente «desigualdad $f(x) > g(x)$» en lugar de «desigualdad $f(x) > g(x)$ con una sola incógnita». De modo análogo se enuncian y se entienden los problemas: resuélvase la desigualdad $f(x) < g(x)$; resuélvase la desigualdad $f(x) \geqslant g(x)$; resuélvase la desigualdad $f(x) \leqslant g(x)$.

## § 1. Conceptos fundamentales y afirmaciones sobre la equivalencia de las desigualdades

Se denomina *campo de valores admisibles* (CVA) *de una desigualdad* $f(x) > g(x)$ *la parte común* (*intersección*) de los campos de existencia de las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$, es decir, el conjunto de todos los valores de la incógnita $x$, para cada uno de los cuales tienen sentido (están definidos) los miembros primero y segundo de la desigualdad.

El número $\alpha$ del CVA de la desigualdad recibe el nombre *de solución de la desigualdad* $f(x) > g(x)$, siempre que al sustituirlo en lugar de la incógnita $x$ la desigualdad se convierte en la desigualdad numérica $f(\alpha) > g(\alpha)$ que se verifica.

*Resolver la desigualdad* $f(x) > g(x)$ significa hallar el conjunto de todas sus soluciones. Observemos que este conjunto puede resultar ser vacío, lo que es posible solamente en dos casos:

a) si el CVA de la desigualdad dada es un conjunto vacío:

b) si el CVA de la desigualdad dada es un conjunto no vacío $Q$, mas no existe ningún número $\alpha \in Q$ para el cual se verifique la desigualdad numérica $f(\alpha) > g(\alpha)$.

Si el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad dada es vacío, suele decirse que la *desigualdad dada no tiene soluciones*. Por eso, a veces se dice así: resolver la desigualdad $f(x) > g(x)$ significa hallar todas sus soluciones o demostrar que dicha desigualdad no tiene soluciones.

Sean dadas dos desigualdades: $f(x) > g(x)$ y $p(x) > \varphi(x)$. Si cualquier solución de la primera desigualdad es, a la vez, solución para la segunda desigualdad, y cualquier solución de la segunda desigualdad es, a la vez, la solución de la primera, estas dos desigualdades se denominan *equivalentes*.

En este caso se sobreentiende, en particular, que si cada una de las desigualdades mencionadas no tiene soluciones, las desigualdades son *equivalentes*. La sustitución de una desigualdad por otra desigualdad, equivalente a la primera, se llama *paso equivalente de una desigualdad a la otra*.

Sean dadas dos desigualdades: $f(x) > g(x)$ y $p(x) > \varphi(x)$ y sea dado cierto conjunto $M$ de valores de la incógnita $x$. Si cualquier solución de la primera desigualdad, perteneciente al conjunto $M$, es a la vez la solución de la segunda desigualdad y cualquier solución de la segunda desigualdad, perteneciente al conjunto $M$, es a la vez la solución de la primera, entonces dichas dos desigualdades se llaman *equivalentes en el conjunto* $M$.

En este caso se sobreentiende, en particular, que si cada una de estas desigualdades no tiene soluciones en el conjunto $M$, estas dos ecuaciones *son equivalentes en el conjunto* $M$.

La sustitución de una desigualdad por la otra, equivalente a la primera en el conjunto $M$, se llama *paso equivalente en el conjunto* $M$ de una desigualdad a la otra.

Señalemos que de modo análogo se enuncian los problemas en los que se pide resolver las desigualdades $f(x) < g(x)$, $f(x) \geqslant g(x)$ y $f(x) \leqslant g(x)$, y asimismo las principales definiciones para ellos.

**Observaciones:** 1. Al tratar las desigualdades, *no* usamos, a diferencia de las ecuaciones, *el término «raíz»*.

2. Puesto que a título de conjunto de soluciones de una desigualdad interviene, de ordinario, cierto intervalo y como la comprobación de todos los números pertenecientes al intervalo citado es prácticamente imposible, el concepto de *consecuencia no se usa en la resolución de las desigualdades*.

Demos a conocer unos cuantos ejemplos que ilustran los conceptos introducidos.

Sea dada la desigualdad

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-5}\sqrt{3-x}.$$

El CVA de esta desigualdad es un conjunto $M$ que representa la intersección de los campos de existencia de las funciones $y=\sqrt{x-2}$, $y=\sqrt{x-5}$ e $y=\sqrt{3-x}$, es decir, $M$ es la intersección de los conjuntos $[-2, +\infty)$, $[5, +\infty)$ y $(-\infty, 3]$. Esta intersección es vacía. Por consiguiente, la desigualdad queda resuelta, puesto que no existe ningún valor de la incógnita, para el cual todas las funciones, que figuran en la desigualdad dada, tengan sentido. De este modo, la igualdad dada no tiene soluciones.

Sea dada la desigualdad

$$\sqrt{x} < -5.$$

Puesto que al sustituir en la desigualdad dada cualquier valor numérico del CVA de esta desigualdad, ella se convierte en una desigualdad numérica ilícita y, por lo tanto, la desigualdad dada no tiene soluciones.

Las desigualdades $x+5>0$ y $(x^4+1)(x+5)>0$ son equivalentes en el conjunto de todos los números reales; las desigualdades $\sqrt{x}>1$ y $x^2>1$ no son equivalentes en el conjunto de todos los números reales, pero lo son, por ejemplo, en el conjunto de números positivos.

He aquí algunas **afirmaciones** sobre la equivalencia de las desigualdades:

1. *Las desigualdades* $f(x)>g(x)$ *y* $f(x)-g(x)>0$ *son equivalentes.*

2. *Las desigualdades* $f(x)>g(x)$ y $f(x)+\alpha>g(x)+\alpha$ *son equivalentes para cualquier* $\alpha$ *real.*

3a. *Las desigualdades* $f(x)>g(x)$ *y* $\alpha f(x)>\alpha g(x)$ *son equivalentes para cualquier* $\alpha$ *positivo.*

3b. *Las desigualdades* $f(x)>g(x)$ y $\alpha f(x)<\alpha g(x)$ *son equivalentes para cualquier número negativo* $\alpha$.

4a. *Las desigualdades* $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ y $f(x)>g(x)$ *son equivalentes para cualquier número fijo a tal, que* $a>1$.

4b. *Las desigualdades* $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ y $f(x)<g(x)$ *son equivalentes para cualquier número fijo a tal, que* $0<a<1$.

**La validez de estas afirmaciones se demuestra** de modo semejante, **razón por la cual** aduzcamos aquí sólo **la demostración** de la afirmación 3a.

Supongamos que el número $x_1$ es cierta solución de la desigualdad $f(x)>g(x)$, es decir, que existen los números $f(x_1)$ y $g(x_1)$, para los cuales se verifica la desigualdad numérica $f(x_1)>g(x_1)$. Al multiplicar esta desigualdad numérica por un número positivo $\alpha$, vemos que se verifica la desigualdad numérica $\alpha f(x_1)>\alpha g(x_1)$, lo que significa que el número $x_1$ es una solución de la desigualdad $\alpha f(x)>\alpha g(x)$. Este razonamiento puede realizarse para toda solu-

ción de la desigualdad $f(x) > g(x)$. Quiere decir, cualquier solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$ es una solución de la desigualdad $\alpha f(x) > \alpha g(x)$.

Demostremos ahora lo contrario. Supongamos que el número $x_2$ es cierta solución de la desigualdad $\alpha f(x) > \alpha g(x)$. es decir, que existen los números $f(x_2)$ y $g(x_2)$, para los cuales se verifica la desigualdad numérica $\alpha f(x_2) > \alpha g(x_2)$. La validez de esta desigualdad predetermina, en virtud de las propiedades de las desigualdades numéricas, la validez de la desigualdad numérica $f(x_2) > g(x_2)$, lo que significa que el número $x_2$ es la solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$. Este razonamiento puede realizarse para toda solución de la desigualdad $\alpha f(x) > \alpha g(x)$. Quiere decir, cualquier solución de la desigualdad $\alpha f(x) > \alpha g(x)$ es una solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$.

Así pues, si cada una de las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $\alpha f(x) > \alpha g(x)$ tiene soluciones, las desigualdades son equivalentes. Observemos que de lo demostrado se desprende, en particular, que si una de estas desigualdades no tiene soluciones, tampoco las tiene la segunda, es decir, en este caso las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $\alpha f(x) > \alpha g(x)$ son también equivalentes.

Con esto queda demostrada completamente la afirmación 3a.

Ahora aduzcamos algunas **afirmaciones** sobre la equivalencia de las desigualdades en los conjuntos.

5. *Sea $n$ un número natural y supongamos que en cierto conjunto $M$ dos funciones, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, son simultáneamente no negativas. Entonces, en dicho conjunto serán equivalentes las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $[f(x)]^n > [g(x)]^n$.*

6a. *Sea $a$ un número fijo tal, que $a > 1$, y supongamos que en cierto conjunto $M$ las dos funciones, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, son simultáneamente positivas. Entonces, en dicho conjunto serán equivalentes las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.*

6b. *Sea $a$ un número fijo cualquiera tal, que $0 < a < 1$, y supongamos que en cierto conjunto $M$ las dos funciones, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, son simultáneamente positivas. Entonces en dicho conjunto serán equivalentes las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $\log_a f(x) < \log_a g(x)$.*

7a. *Supongamos que en cierto conjunto $M$ la función $y = \varphi(x)$ es positiva, entonces en dicho conjunto son equivalentes las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $f(x)\varphi(x) > g(x)\varphi(x)$.*

7b. *Supongamos que en cierto conjunto $M$ la función $y = \varphi(x)$ es negativa, entonces en dicho conjunto son equivalentes las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $f(x)\varphi(x) < g(x)\varphi(x)$.*

Demostremos la **afirmación** 5.

Si $n = 1$, la afirmación 5 es justa.

Por eso, en adelante consideraremos que $n \geqslant 2$. Supongamos que el número $x_1$ pertenece al conjunto $M$ y representa cierta solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$, es decir, que existen los números no negativos $f(x_1)$ y $g(x_1)$ tales, que para ellos se verifica la desi-

gualdad numérica $f(x_1) > g(x_1)$. De la validez de esta igualdad se deduce, en particular, que el número $f(x_1)$ es positivo. Mas, en este caso, para cualquier número natural $k$ el número $[f(x_1)]^k$ es positivo, y el número $[g(x_1)]$ , no negativo. Quiere decir, la suma

$$[f(x_1)]^{n-1} + [f(x_1)]^{n-2} g(x_1) + \ldots + f(x_1)[g(x_1)]^{n-2} + \\ + [g(x_1)]^{n-1}$$

es positiva, puesto que su primer sumando es positivo y los demás, no negativos. De la desigualdad numérica $f(x_1) > g(x_1)$ se desprende, además, que el número $f(x_1) - g(x_1)$ es positivo. Como el producto de números positivos es positivo, lo es también el número

$$[f(x_1) - g(x_1)]\{[f(x_1)]^{n-1} + [f(x_1)]^{n-2} g(x_1) + \ldots \\ \ldots + f(x_1)[g(x_1)]^{n-2} + [g(x_1)]^{n-1}\}.$$

Aplicando ahora la fórmula de multiplicación reducida (véase el cap. II), llegamos a que es válida la desigualdad numérica

$$[f(x_1)]^n - [g(x_1)]^n > 0,$$

de donde se deduce la validez de la igualdad numérica

$$[f(x_1)]^n > [g(x_1)]^n.$$

Así pues, se ha mostrado que para cualquier número $x_1$ del conjunto $M$ la validez de la desigualdad numérica $f(x_1) > g(x_1)$ predetermina la validez de otra desigualdad numérica $[f(x_1)]^n > [g(x_1)]^n$. Quiere decir, cualquier solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$, perteneciente al conjunto $M$, será la solución de la desigualdad $[f(x)]^n > [g(x)]^n$.

Mostremos ahora lo contrario. Supongamos que el número $x_2$ pertenece al conjunto $M$ y que existe una solución de la desigualdad $[f(x)]^n > [g(x)]^n$, es decir, supongamos que existen los números no negativos $f(x_2)$ y $g(x_2)$, para los cuales se verifica la desigualdad numérica $[f(x_2)]^n > [g(x_2)]^n$. Mostremos que el número $f(x_2)$ es positivo. Admitamos que $f(x_2)$ es igual a cero, entonces de la desigualdad $[f(x_2)]^n > [g(x_2)]^n$ se desprende que el número $[g(x_2)]^n$ es negativo. Mas, por cuanto el número $g(x_2)$ es no negativo, lo será también el número $[g(x_2)]^n$. La contradicción obtenida significa que el número $f(x_2)$ es positivo. Por consiguiente será positiva la suma

$$[f(x_2)]^{n-1} + [f(x_2)]^{n-2} g(x_2) + \ldots \\ \ldots + f(x_2)[g(x_2)]^{n-2} + [g(x_2)]^{n-1}.$$

Además, de la validez de la desigualdad $[f(x_2)]^n > [g(x_2)]^n$ se deduce que el número $[f(x_2)]^n - [g(x_2)]^n$ es positivo. Examinemos ahora la igualdad numérica

$$[f(x_2)]^n - [g(x_2)]^n = [f(x_2) - g(x_2)]\{[f(x_2)]^{n-1} + \\ + [f(x_2)]^{n-2} g(x_2) + \ldots + f(x_2)[g(x_2)]^{n-2} + [g(x_2)]^{n-1}\}.$$

En el primer miembro de esta igualdad figura un número positivo, en el segundo, el producto de dos números, uno de los cuales es positivo, y, por tanto, el segundo número es también positivo, es decir, se verifica la desigualdad numérica $f(x_2) - g(x_2) > 0$. La validez de esta desigualdad numérica predetermina la validez de la desigualdad $f(x_2) > g(x_2)$. Así pues, se ha mostrado que para cualquier número $x_2$ del conjunto $M$ la validez de la desigualdad numérica $[f(x_2)]^n > [g(x_2)]^n$ predetermina la validez de la desigualdad numérica $f(x_2) > g(x_2)$. Quiere decir, cualquier solución de la desigualdad $[f(x)]^n > [g(x)]^n$, perteneciente al conjunto $M$, es la solución de la desigualdad $f(x) > g(x)$.

Así pues, si cada una de las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $[f(x)]^n > [g(x)]^n$ tiene soluciones en el conjunto $M$, dichas desigualdades serán equivalentes.

Observemos que de lo demostrado se deduce, en particular, que si una de las desigualdades no tiene soluciones en el conjunto $M$, la otra tampoco las tiene en dicho conjunto, es decir, en este caso las desigualdades $f(x) > g(x)$ y $[f(x)]^n > [g(x)]^n$ son también equivalentes, con lo que se acaba la demostración de la afirmación 5. La justeza de las afirmaciones 6a, 6b, 7a, 7b se demuestran análogamente.

Sean dadas $m$ desigualdades $f_1(x) > g_1(x)$, $f_2(x) > g_2(x)$, . . . . . ., $f_m(x) > g_m(x)$. Denotemos con $M$ un campo que sirve de intersección para los campos de valores admisibles de todas estas desigualdades. Si se pide hallar todos los números $\alpha$ del campo $M$, cada uno de los cuales sea la solución de cualquiera de las desigualdades mencionadas, suele decirse que está dado *un sistema de m desigualdades*

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x), \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x) > g_m(x) \end{cases} \qquad (1)$$

y el campo $M$ se llama *campo de valores admisibles* (CVA) *de este sistema*. Indiquemos que las desigualdades del sistema se escriben, de ordinario, en una columna y se reúnen mediante una llave.

El número $\alpha$ del CVA del sistema de desigualdades (1) se denomina *solución* de este sistema, si es la solución para cada una de las desigualdades.

*Resolver el sistema de desigualdades* (1) significa hallar el conjunto de todas sus soluciones. Si este conjunto resulta ser vacío, se dice que el sistema de desigualdades (1) no tiene soluciones. El sistema de desigualdades (1) se resuelve habitualmente del modo siguiente. Al principio se resuelve cada desigualdad en el CVA de este sistema, es decir, se hallan los conjuntos $N_1$, $N_2$, . . ., $N_m$, donde $N_i$ es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $f_i(x) > g_i(x)$, pertenecientes al CVA de este sistema. Luego se determina el con-

junto $N_0$ que es la intersección de todos los conjuntos citados, $N_1, N_2, \ldots, N_m$, es decir, $N_0 = N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_m$. El conjunto $N_0$ será precisamente el conjunto de todas las soluciones del sistema de desigualdades (1).

Supongamos que los números $a$ y $b$ son tales que $a < b$ y sea dado el sistema de desigualdades

$$\begin{cases} f(x) > a, \\ f(x) < b. \end{cases} \tag{2}$$

En este caso suele decirse que esta dada una *desigualdad doble*

$$a < f(x) < b. \tag{3}$$

Observemos que si $y = f(x)$ es una función elemental fundamental, resulta, a menudo, más simple resolver la desigualdad doble (3) que el sistema de desigualdades (2).

Sean dados ahora $k$ sistemas de desigualdades

$$\begin{cases} f_{11}(x) > g_{11}(x), \\ f_{21}(x) > g_{21}(x), \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{n1}(x) > g_{n1}(x) \end{cases} \begin{cases} f_{12}(x) > g_{12}(x), \\ f_{22}(x) > g_{22}(x), \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{m2}(x) > g_{m2}(x) \end{cases} \cdots \begin{cases} f_{1k}(x) > g_{1k}(x) \\ f_{2k}(x) > g_{2k}(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{lk}(x) > g_{lk}(x). \end{cases} \tag{4}$$

Denotemos con $Q$ el campo que sirve de intersección para los campos de valores admisibles de todos estos sistemas de desigualdades.

Si se pide hallar en el campo $Q$ todos los números $\alpha$, cada uno de los cuales sea solución de, al menos, uno de los sistemas citados, se dice que está dado el *conjunto de k sistemas de desigualdades* y el campo $Q$ se denomina *campo de valores admisibles* (CVA) *de este conjunto.* Indiquemos que los sistemas de desigualdades de un conjunto de sistemas se escriben, de ordinario, en una línea (véase (4)).

El número $\alpha$ del CVA del conjunto de sistema de desigualdades (4) se llama *solución* de dicho conjunto, si es solución de, por lo menos, un sistema de desigualdades del conjunto (4).

*Resolver el conjunto de sistemas de desigualdades* (4) significa hallar el conjunto de todas sus soluciones. Si dicho conjunto resulta ser vacío, se dice que el conjunto de sistemas de desigualdades (4) no tiene soluciones.

El conjunto de sistemas de desigualdades (4) se resuelve, corrientemente, del modo siguiente. Al principio se resuelve cada sistema de desigualdades en el CVA del conjunto (4), es decir, se determinan los conjuntos $M_1, M_2, \ldots, M_k$, donde $M_i$ es el conjunto de todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} f_{1i}(x) > g_{1i}(x), \\ f_{2i}(x) > g_{2i}(x), \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{pi}(x) > g_{pi}(x) \end{cases}$$

en el CVA de este conjunto. Luego se determina el conjunto $M_0$ que representa la unión de todos los conjuntos $M_1, M_2, \ldots, M_k$, es decir, $M_0 = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_k$. El conjunto $M_0$ será precisamente el conjunto de todas las soluciones del conjunto de sistemas de desigualdades (4).

Observemos que si cada uno de los $k$ sistemas del conjunto (4) contiene una sola desigualdad, se dice que está dado un *conjunto de $k$ desigualdades.*

Si $k = 1$, el conjunto (4) representa, de hecho, *un sistema de desigualdades.*

Se dice que *la desigualdad*

$$f(x) > g(x) \qquad (5)$$

*es equivalente al conjunto de sistemas de desigualdades* (4), si cualquiera de las soluciones de la desigualdad (5) es solución del conjunto (4), y toda solución del conjunto (4) es solución de la desigualdad (5).

En este caso se sobreentiende, en particular, que si la desigualdad (5) no tiene soluciones y si el conjunto de sistemas de desigualdades (4) no tiene soluciones, *la desigualdad* (5) *es equivalente al conjunto* (4).

Si en el conjunto de sistemas de desigualdades (4) $n = m = \ldots$ $\ldots = p = \ldots = l = 1$, se dice que *la desigualdad* (5) *es equivalente al conjunto de desigualdades* (4).

Si en el conjunto de sistemas de desigualdades (4) $k = 1$, se dice que *la desigualdad* (5) *es equivalente al sistema de desigualdades* (4).

La sustitución de la desigualdad (5) por el conjunto (4), equivalente a la desigualdad (5), se llama *paso equivalente* de la desigualdad (5) al conjunto (4).

A veces surge la necesidad de realizar un paso equivalente de una desigualdad a un conjunto de sistemas de desigualdades en el conjunto $M$.

Se dice que *la desigualdad* (5) *es equivalente en el conjunto $M$ al conjunto de desigualdades* (4), si cualquier solución de la desigualdad (5), perteneciente al conjunto $M$, es solución del conjunto (4), y cualquier solución, perteneciente al conjunto $M$, del conjunto (4) es solución de la desigualdad (5).

Señalemos que en el conjunto de sistemas (4) puede haber una infinidad de sistemas de desigualdades.

La sustitución de una desigualdad por otra desigualdad o por un conjunto de sistemas de desigualdades se denominará en adelante *transformación de la desigualdad.*

Por fin, aduzcamos la noción de *conjunto mixto*, es decir, de conjunto de ecuaciones y desigualdades.

Sean dadas $k$ ecuaciones $f_1(x) = g_1(x)$, $f_2(x) = g_2(x)$, $\ldots$ $\ldots$, $f_k(x) = g_k(x)$ y $m$ desigualdades $f_{k+1}(x) > g_{k+1}(x)$, $f_{k+2}(x) >$ $> g_{k+2}(x)$, $\ldots$, $f_{k+m}(x) > g_{k+m}(x)$. Denotemos con $Q$ el campo que sirve de intersección de los campos de valores admisibles de estas ecuaciones y de todas estas desigualdades.

Si se pide hallar en el campo $Q$ todos los números $\alpha$, cada uno de los cuales sea la solución de al menos una de las $k$ ecuaciones citadas o de al menos una de dichas $m$ desigualdades, se dice que está dado un *conjunto mixto*

$$f_1(x) = g_1(x),\quad f_2(x) = g_2(x),\ \ldots,\ f_k(x) = g_k(x)$$
$$f_{k+1}(x) > g_{k+1}(x),\quad f_{k+2}(x) > g_{k+2}(x),\ \ldots$$
$$\ldots,\ f_{k+m}(x) > g_{k+m}(x), \tag{6}$$

y el campo $Q$ se llama *campo de valores admisibles* (CVA) *de este conjunto.*

Indiquemos que las ecuaciones y desigualdades de un conjunto mixto se escriben, de ordinario, en una línea.

El número $\alpha$ del CVA del conjunto mixto (6) se denomina *solución de este conjunto*, si es solución de al menos una de las $k$ ecuaciones o de al menos una de las $m$ desigualdades del conjunto citado.

*Resolver el conjunto mixto* (6) significa hallar el conjunto de todas sus soluciones. Si este conjunto resulta ser vacío, se dice que el *conjunto mixto* (6) *no tiene soluciones.*

El conjunto mixto (6) se resuelve, corrientemente, del modo siguiente. Al principio se resuelve cada ecuación y cada desigualdad en el CVA de dicho conjunto, es decir, se hallan los conjuntos $M_1$, $M_2, \ldots, M_{k-1}, M_k$, donde $M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $f_i(x) = g_i(x)$, pertenecientes al CVA del conjunto (6), y los conjuntos $M_{k+1}, M_{k+2}, \ldots, M_{k+m}$, donde $M_{k+j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $f_{k+j}(x) > g_{k+j}(x)$, pertenecientes al CVA del conjunto (6). A continuación se determina el conjunto $M_0$ que es la unión de los conjuntos $M_1, M_2, \ldots, M_k, M_{k+1}, \ldots, M_{k+m}$, es decir, $M_0 = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k \cup M_{k+1} \cup \ldots \cup M_{k+m}$. El conjunto $M_0$ será precisamente el *conjunto de todas las soluciones del conjunto mixto* (6).

Diremos que la *desigualdad*

$$f(x) \geqslant g(x) \tag{7}$$

*es equivalente al conjunto mixto* (6), si toda solución de la desigualdad (7) es solución del conjunto mixto (6) y toda solución del conjunto mixto (6) es la solución de la desigualdad (7).

En este caso se sobreentiende, en particular, que si la desigualdad (7) no tiene soluciones y no las tiene el conjunto mixto (6), la desigualdad (7) será equivalente al conjunto mixto (6).

De lo dicho más arriba se desprende que una *desigualdad no estricta*

$$f(x) \geqslant g(x) \tag{8}$$

*es equivalente al conjunto mixto*

$$f(x) = g(x),\quad f(x) > g(x). \tag{9}$$

Con este motivo se analizan, de ordinario, solamente desigualdades estrictas, pues la solución de una desigualdad no estricta es la unión de soluciones de la ecuación y de la desigualdad estricta correspondientes.

## § 2. Desigualdades elementales

Sea $y = f(x)$ una función elemental fundamental y $b$, un número real fijo. Entonces las desigualdades

$$f(x) > b, \tag{1}$$

$$f(x) < b \tag{2}$$

suelen llamarse *desigualdades elementales.*

Es evidente que el CVA de una desigualdad elemental coincide con el campo de existencia de la función elemental fundamental $y = f(x)$.

Como se señaló más arriba, la desigualdad no estricta $f(x) \geqslant b$ es equivalente al conjunto de la desigualdad estricta $f(x) > b$ y de la ecuación $f(x) = b$, mientras que la desigualdad no estricta $f(x) \leqslant b$ esequivalente al conjunto de la desigualdad estricta $f(x) < b$ y de la ecuación $f(x) = b$. Por esta razón en el párrafo presente se analizará solamente la resolución de las desigualdades elementales (1) y (2).

Cabe notar ante todo que al resolver una desigualdad, no se puede es cribir formalmente la solución de la ecuación correspondiente y sustituir, a continuación, el signo de igualdad por el de desigualdad. En lo que sigue más abajo se mostrará que para resolver las desigualdades elementales (1) y (2) es preciso conocer bien las propiedades de la función elemental fundamental $y = f(x)$, y, además, saber emplearlas.

La resolución de una desigualdad elemental va acompañada, a menudo, de la construcción de las gráficas para las funciones $y = f(x)$ e $y = b$. En este caso se hace uso de la siguiente afirmación obvia: si se debe resolver una desigualdad $f(x) > b$, o $f(x) < b$, donde la función $y = f(x)$ no es obligatoriamente elemental fundamental, se construyen en un mismo dibujo las gráficas de las funciones $y = f(x)$ e $y = b$. Entonces, la solución de la desigualdad $f(x) > b$ serán aquellos valores de $x$, para cada uno de los cuales el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ se dispone por arriba de la recta $y = b$ (fig. 149), y la solución de la desigualdad $f(x) < b$ serán los valores de $x$, para cada uno de los cuales el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$ se dispone por debajo de la recta $y = b$ (fig. 150).

Por eso tal dibujo ilustra de inmediato cuál conjunto es la solución de la desigualdad $f(x) > b$, y cuál, la solución de la desigualdad

$f(x) < b$. Sin embargo, hemos de subrayar que las gráficas sirven sólo de medio ilustrativo auxiliar al resolver las desigualdades. Estas gráficas sólo sugieren una respuesta, mientras que el hecho de

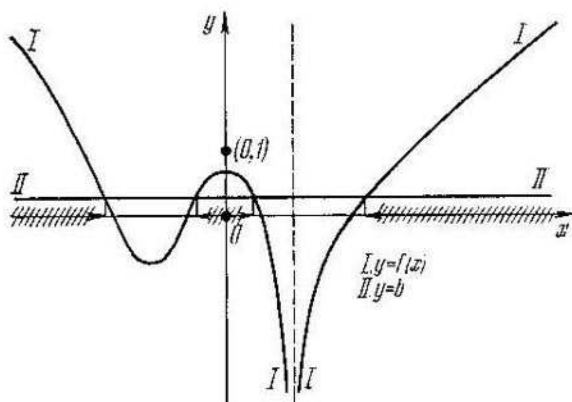


Fig. 149

que un conjunto, evidente en el dibujo, es una solución de tal o cual desigualdad ha de ser obligatoriamente demostrado.

Notemos además que frecuentemente el dibujo da la idea en qué conjuntos se debe dividir el campo de existencia de la función $y =$

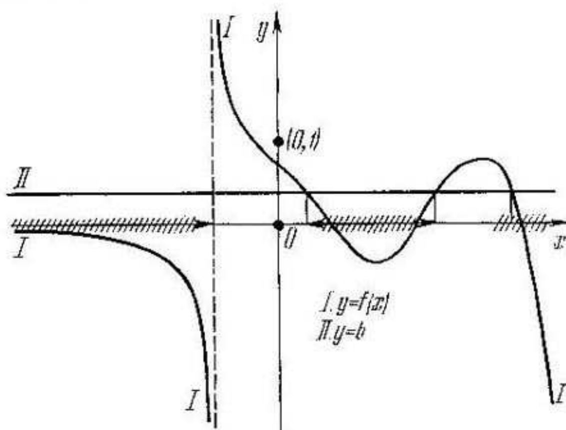


Fig. 150

$= f(x)$ y qué propiedades de esta función han de emplearse para realizar la demostración mencionada. Por eso, en lo sucesivo, previamente a la resolución de ciertas desigualdades elementales se analizarán las gráficas de las funciones $y = f(x)$ e $y = b$.

**Desigualdades algebraicas.** Sea $n$ un número natural fijo, entonces las desigualdades

$$x^n > b, \tag{3}$$

$$x^n < b \tag{4}$$

suelen llamarse *desigualdades algebraicas elementales.*

La función $y = x^n$ está definida en toda la recta numérica, por lo cual el CVA de las desigualdades (3) y (4) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$.

Por cuanto las propiedades de la función $y = x^n$ que se emplean al resolver las desigualdades (3) y (4) son diferentes para $n$ par y $n$ impar, analicemos dos casos:

I. Sea $n = 2m - 1$, donde $m$ es un número natural fijo, entonces las desigualdades (3) y (4) adquieren la forma

$$x^{2m-1} > b, \tag{3a}$$

$$x^{2m-1} < b. \tag{4a}$$

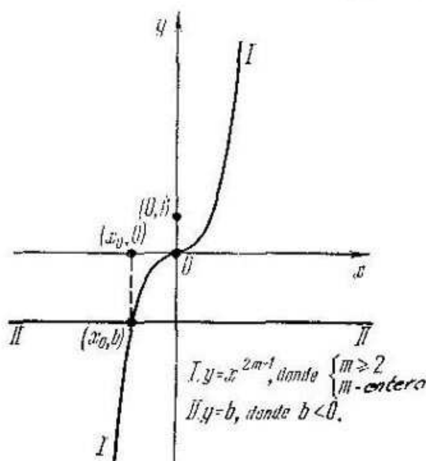


Fig. 151

El campo de valores de la función $y = x^{2m-1}$ en el conjunto $X$ lo constituirá el conjunto $Y = (-\infty, +\infty)$. En vista de que la función $y = x^{2m-1}$ es creciente en el conjunto $X$, ella adquiere cada valor númerico de $Y$ sólo una vez. Por eso, si dicha función toma el valor $b$ para $x = x_0$, para cada $x > x_0$ ella toma un valor mayor que el número $b$, y para cada $x < x_0$, un valor inferior al número $b$.

Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3a) es el intervalo $(x_0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (4a) es el intervalo $(-\infty, x_0)$, donde, según lo expuesto en el § 2, cap. VII,

$$x_0 = \begin{cases} \sqrt[2m-1]{b}, & \text{para } b \text{ positivo;} \\ 0, & \text{para } b = 0; \\ -\sqrt[2m-1]{b}, & \text{para } b \text{ negativo.} \end{cases}$$

En la fig. 151 se ilustran de la manera adecuada los razonamientos aducidos más arriba.

II. Sea $n = 2m$, donde $m$ es un número natural fijo, entonces las desigualdades (3) y (4) toman la forma

$$x^{2m} > b, \tag{3b}$$

$$x^{2m} < b. \tag{4b}$$

La función $y = x^{2m}$ es no negativa en toda la recta numérica. Por eso, si $b$ es un número negativo, la desigualdad (3b) será válida para cualquier valor de $x$, y la desigualdad (4b) no es válida, cualquiera que sea el valor de $x$. Quiere decir, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3b) se representa

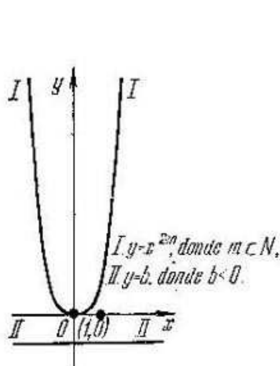


Fig. 152

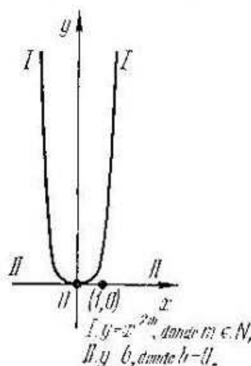


Fig. 153

por toda la recta numérica $(-\infty, +\infty)$, mientras que la desigualdad (4b) no tiene soluciones. En la fig. 152 se ilustran los razonamientos realizados.

Si, en cambio, $b = 0$, entonces para $x = 0$ la función $y = x^{2m}$ toma el valor nulo, y para todos los $x$ restantes esta función es positiva, por lo cual la desigualdad (3b) será válida en este caso para cualquier valor de $x$, salvo el valor de $x = 0$; la desigualdad (4b) no es válida, cualquiera que sea el valor de $x$. Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3b) se representa en este caso por la unión de dos rayos $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (fig. 153), mientras que la desigualdad (4b) no tiene soluciones.

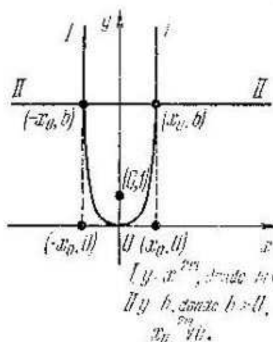


Fig. 154

Por fin, sea $b$ un número positivo. Construyamos las gráficas de las funciones $y = x^{2m}$ o $y = b$ (fig. 154). La recta $y = b$ corta la gráfica de la función $y = x^{2m}$ en dos puntos $(x_0, b)$ y $(-x_0, b)$, donde $x_0 = \sqrt[2m]{b}$. La gráfica de la función $y = x^{2m}$ se dispone por debajo de la recta $y = b$ en el conjunto $(-x_0, x_0)$ y por encima, en el conjunto $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$. Por consiguiente, estos conjuntos deben representar precisamente los conjuntos de todas las soluciones de las desigualdades (4b) y (3b). No obstante, esta afirmación ha de

ser demostrada. La figura (fig. 154) muestra que para demostrarla es preciso emplear el hecho de que en el intervalo $X_1 = [0, +\infty)$ la función $y = x^{2m}$ es creciente, y después, el hecho de que esta función es par.

Dividamos el campo de existencia de la función $y = x^{2m}$ en dos conjuntos, $X_1 = [0, +\infty)$ y $X_2 = (-\infty, 0)$ y veamos la resolución de las desigualdades (3b) y (4b) en cada uno de estos conjuntos.

En el conjunto $X_1$ el campo de valores de la función $y = x^{2m}$ es $Y = [0, +\infty)$ y la función es creciente, por eso todo valor numérico de $Y$ ella lo adquiere sólo una vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X_1$ la función toma el valor $b$, para todo $x > x_0$ tal que $x \in X_1$ ella toma un valor superior a $b$, y para cada $x < x_0$ tal que $x \in X_1$, un valor inferior a $b$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3b) en $X_1$ es el intervalo $(x_0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (4b) en $X_1$ es el intervalo $[0, x_0)$. Por cuanto la función $y = x^{2m}$ es par, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3b) en $X_2$ es el intervalo $(-\infty, -x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (4b) en $X_2$ es el intervalo $(-x_0, 0)$. Al reunir las soluciones halladas en $X_1$ y en $X_2$, resulta que en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3b) es la unión de dos rayos $(-\infty, -x_0) \cup \cup (x_0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (4b), el intervalo $(-x_0, x_0)$, donde $x_0 = \sqrt[2m]{b}$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3b) se representa por:

1) la recta numérica $(-\infty, +\infty)$, para cada $b$ negativo;

2) el conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, para $b = 0$;

3) el conjunto $(-\infty, -\sqrt[2m]{b}) \cup (\sqrt[2m]{b}, +\infty)$, para cada $b$ positivo.

El conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (4b) se representa por:

1) un conjunto vacío, para cada $b$ no positivo;

2) el intervalo $(-\sqrt[2m]{b}, \sqrt[2m]{b})$, para cada $b$ positivo.

En la Tabla 18 se dan los resultados que se obtienen al resolver las desigualdades (3) y (4).

**Desigualdades fraccionarias.** Sea $n$ un número natural fijo, entonces las desigualdades

$$x^{-n} > b, \tag{5}$$

$$x^{-n} < b$$

suele llamarse *desigualdades fraccionarias elementales*.

La función $y = x^{-n}$ está definida en toda la recta numérica, a excepción del punto cero, por lo cual el CVA de las desigualdades (5) y (6) es un conjunto $X = X_1 \cup X_2$, donde $X_1 = (0, +\infty)$, y $X_2 = (-\infty, 0)$.

Por cuanto las propiedades de la función $y = x^{-n}$ que se emplean

| | $b > 0$ | $b=0$ | $b < 0$ |
|---|---|---|---|
| $x^{2m-1} > b$ | $(\sqrt[2m-1]{b};\ \infty)$ | $(0;\ \infty)$ | $(-\sqrt[2m-1]{\mid b\mid};\ \infty)$ |
| $x^{2m-1} < b$ | $(-\infty;\ \sqrt[2m-1]{b})$ | $(-\infty;\ 0)$ | $(-\infty;\ -\sqrt[2m-1]{\mid b\mid})$ |
| $x^{2m} > b$ | $(-\infty;\ -\sqrt[2m]{b}) \cup$ $\cup (\sqrt[2m]{b};\ \infty)$ | $(-\infty;\ 0) \cup$ $\cup (0,\ \infty)$ | $(-\infty;\ \infty)$ |
| $x^{2m} < b$ | $(-\sqrt[2m]{b};\ \sqrt[2m]{b})$ | no hay soluciones | no hay soluciones |

al resolver las desigualdades (5) y (6) son diferentes para $n$ par y $n$ impar, analicemos dos casos:

1. Sea $n = 2m - 1$, donde $m$ es un número natural fijo, entonces las desigualdades (5) y (6) toman la forma

$$x^{-m2+1} > b, \tag{5a}$$

$$x^{-m2+1} < b. \tag{6a}$$

A título de campo de valores de la función $y = x^{-2m+1}$ en el conjunto $X_1$ interviene el rayo $Y_1 = (0, +\infty)$, y en el conjunto $X_2$, el rayo $Y_2 = (-\infty, 0)$.

Si $b = 0$, entonces, tomando en consideración que la función $y = x^{-2m+1}$ es positiva en el conjunto $X_1$ y negativa en el conjunto $X_2$, llegamos a que que $X_1$ es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5a) y $X_2$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6a) (fig. 155).

Sea $b$ un número positivo. Construyamos las gráficas de las funciones $y = x^{-2m+1}$ e $y = b$ (fig. 156). La recta $y = b$ corta la gráfica de la función $y = x^{-2m+1}$ en el punto $(x_0, b)$, donde $x_0 = \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}$. La gráfica de la función $y = x^{-2m+1}$ se dispone por arriba de la recta en el conjunto $(0, x_0)$ y por debajo de la recta, en el conjunto $(-\infty, 0) \cup (x_0, +\infty)$. Por consiguiente, los conjuntos citados tienen que ser precisamente los conjuntos de todas las soluciones de las desigualdades (5a) y (6a). No obstante, esta afirmación ha de ser demostrada. El dibujo sugiere que para demostrarla es necesario analizar la solución de la desigualdad en cada conjunto $X_1$ y $X_2$ por separado y aprovechar el hecho de que la función $y = x^{-2m+1}$ es negativa en el conjunto $X_2$, y decreciente en el conjunto $X_1$.

Analicemos la solución de las desigualdades (5a) y (6a) en el conjunto $X_2$. En dicho conjunto la función $y = x^{-2m+1}$ es negativa, por

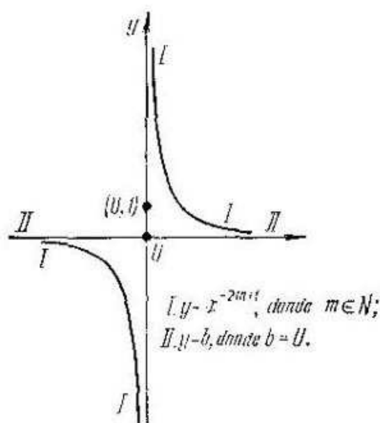



Fig. 155

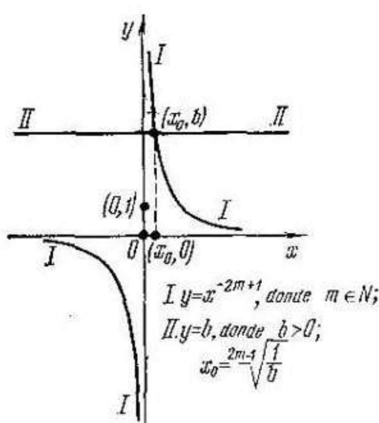



Fig. 156

eso en el conjunto $X_2$ no hay soluciones de la desigualdad (5a), pero todo el conjunto $X_2$ está contenido dentro del conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6a).

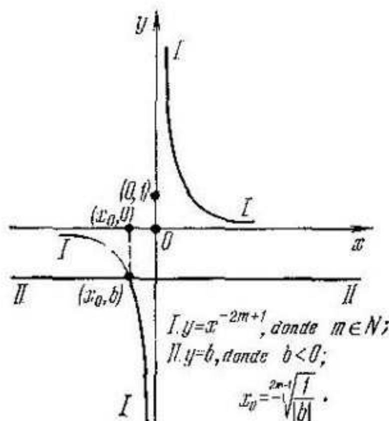



Fig. 157

En el conjunto $X_1$ la función $y = x^{-2m+1}$ decrece, por lo cual cada valor numérico de $Y_1$ ella lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0$ la función toma el valor $b$, entonces para cada $x < x_0$ tal, que $x \in X_1$, ella toma un valor superior a $b$, y para cada $x > x_0$ tal, que $x \in X_1$, un valor inferior a $b$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5a) en el conjunto $X_1$ es el intervalo $(0, x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6a), el rayo $(x_0, +\infty)$.

Al reunir las soluciones, obtenidas en $X_1$ y en $X_2$, llegamos a que en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5a) es el intervalo $(0, x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6a) es la unión de dos rayos $(-\infty, 0) \cup (x_0, +\infty)$.

Si $b$ es un número negativo, entonces, razonando análogamente, (fig. 157) llegamos a la deducción de que en este caso el conjunto

de todas las soluciones de la desigualdad (5a) es la unión de dos rayos $(-\infty, x_0) \cup (0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6a), el intervalo $(x_0, 0)$, donde $x_0 = -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5a) es

1) el conjunto $\left(0, \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}\right)$, para cada $b$ positivo;

2) el conjunto $(0, +\infty)$, para $b = 0$;

3) el conjunto $\left(-\infty, -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}\right) \cup (0, +\infty)$, para cada $b$ negativo.

El conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6a) es

1) el conjunto $(-\infty, 0) \cup \left(\sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}, +\infty\right)$, para cada $b$ positivo;

2) el conjunto $(-\infty, 0)$, para cada $b = 0$;

3) el conjunto $\left(-\sqrt[2m-1]{\frac{1}{|b|}}, 0\right)$, para cada $b$ negativo

II. Sea $n = 2m$, donde $m$ es un número natural fijo, entonces las desigualdades (5) y (6) toman la forma

$$x^{-2m} > b, \tag{5b}$$

$$x^{-2m} < b. \tag{6b}$$

El campo de valores de la función $y = x^{-2m}$ en el conjunto $X = X_1 \cup X_2$, donde $X_1 = (0, +\infty)$ y $X_2 = (-\infty, 0)$, es el rayo $Y = (0, +\infty)$.

Si $b$ es un número no positivo, entonces, tomando en consideración que la función $y = x^{-2m}$ es en el conjunto $X$ positiva, obtenemos que $X$ es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5b), y la desigualdad (6b) no tiene soluciones (fig. 158).

Sea $b$ un número positivo. Construyamos las gráficas de las funciones $y = x^{-2m}$ e $y = b$ (fig. 159). La recta $y = b$ corta la gráfica de la función $y = x^{-2m}$ en dos puntos $(x_0, b)$ y $(-x_0, b)$, donde $x_0 = \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}$. La gráfica de la función $y = x^{-2m}$ se dispone por encima de la recta $y = b$ en el conjunto $(-x_0, 0) \cup (0, x_0)$ y por debajo de ella, en el conjunto $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$. Por consiguiente, dichos conjuntos tienen que ser precisamente los conjuntos de todas las soluciones de las desigualdades (5b) y (6b). No obstante, esta afirmación ha de ser demostrada. El dibujo sugiere que para demostrarla es preciso aprovechar el hecho de que en el conjunto $X_1$ la función $y = x^{-2m}$ decrece, y, luego, la paridad de esta función.

Veamos la resolución de las desigualdades (5b) y (6b) en el conjunto $X_1$. En este conjunto la función $y = x^{-2m}$ decrece y su campo de valores se representa por $Y = (0, +\infty)$, por lo cual cada valor numérico de $Y$ la función lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X_1$ la función toma el valor $b$, entonces para cada $x < x_0$ tal que $x \in X_1$, ella toma un valor superior a $b$, y para cada $x > x_0$

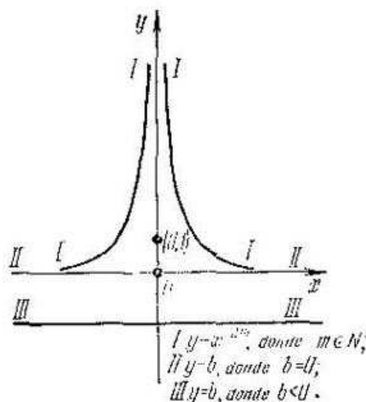



Fig. 158

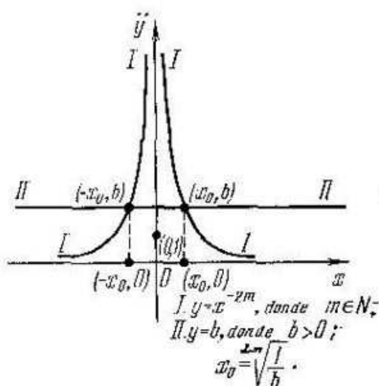



Fig. 159

tal, que $x \in X_1$, un valor inferior a $b$. Por consiguiente, en $X_1$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5b) es el intervalo $(0, x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6b) es el rayo $(x_0, +\infty)$.

Por cuanto la función $y = x^{-2m}$ es par, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5b) en $X_2$ es el intervalo $(-x_0, 0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6b), es el rayo $(-\infty, -x_0)$.

Al reunir las soluciones halladas en $X_1$ y en $X_2$, obtenemos que en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5b) es la unión de dos intervalos $(-x_0, 0) \cup (0, x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6b) es la unión de dos rayos $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5b) es

1. el conjunto $\left(-\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}\right)$, para cada $b$ positivo;

2. el conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, para cada $b$ no positivo.

El conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6b) es

1. el conjunto $\left(-\infty, -\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}\right) \cup \left(\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}, +\infty\right)$, para cada $b$ positivo;

2. un conjunto vacío, para cada $b$ no positivo.

En la tabla 19 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (5) y (6).

**Desigualdades potenciales.** Sea $\alpha$ un número real no entero y fijo, entonces las desigualdades

$$x^{\alpha} > b, \tag{7}$$

$$x^{\alpha} < b \tag{8}$$

suelen llamarse *desigualdades potenciales elementales.*

*Tabla 19*

| | $b > 0$ | $b = 0$ | $b < 0$ |
|---|---|---|---|
| $x^{-2m+1} > b$ | $\left(0;\ \sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}}\right)$ | $(0;\ \infty)$ | $\left(-\infty;\ -\sqrt[2m-1]{\frac{1}{\lvert b\rvert}}\right) \cup$ $\cup\ (0;\ \infty)$ |
| $x^{-2m+1} < b$ | $(-\infty;\ 0) \cup$ $\cup \left(\sqrt[2m-1]{\frac{1}{b}};\ \infty\right)$ | $(-\infty;\ 0)$ | $\left(-\sqrt[2m-1]{\frac{1}{\lvert b\rvert}};\ 0\right)$ |
| $x^{-2m} > b$ | $\left(-\sqrt[2m]{\frac{1}{b}};\ 0\right) \cup$ $\cup \left(0;\ \sqrt[2m]{\frac{1}{b}}\right)$ | $(-\infty;\ 0) \cup$ $\cup\ (0;\ \infty)$ | $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$ |
| $x^{-2m} < b$ | $\left(-\infty;\ -\sqrt[2m]{\frac{1}{b}}\right) \times$ $\times \left(\sqrt[2m]{\frac{1}{b}};\ \infty\right)$ | no hay soluciones | no hay soluciones |

Por cuanto las propiedades de la función $y = x^{\alpha}$, que se emplean al resolver las desigualdades (7) y (8), son diferentes para $\alpha$ no entero positivo y para $\alpha$ no entero negativo, analicemos dos casos:

I. Sea $\alpha$ un número positivo no entero. El campo de existencia de la función $y = x^{\alpha}$ se representa por el conjunto de todos los números no negativos, por lo cual el CVA de las desigualdades (7) y (8) es el conjunto $X = [0,\ +\infty)$. El campo de valores de la función $y = x^{\alpha}$ en todo el conjunto $X$ está representado por el rayo $Y = [0,\ +\infty)$.

Si $b$ es un número negativo, entonces, tomando en consideración que en el conjunto $X$ la función $y = x^{\alpha}$ es no negativa, llegamos a la conclusión de que $X$ es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7), y la desigualdad (8) no tiene soluciones (fig. 160).

Si $b = 0$, entonces para $x = 0$ la función $y = x^{\alpha}$ toma el valor cero, mientras que para todos los demás $x \in X$ dicha función es

positiva, razón por la cual la desigualdad (7) es válida en este caso con cualquier valor de $x \in X$, salvo el valor $x = 0$, y la desigualdad (8) no es válida, cualquiera que sea el valor de $x \in X$.

Quiere decir, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7) se representa por el rayo $(0, +\infty)$, mientras que la desigualdad (8) no tiene soluciones (fig. 161).

Sea, por fin, $b$ un número positivo. En el conjunto $X$ la función $y = x^\alpha$ es creciente y por eso cada valor numérico de $Y$ ella lo toma

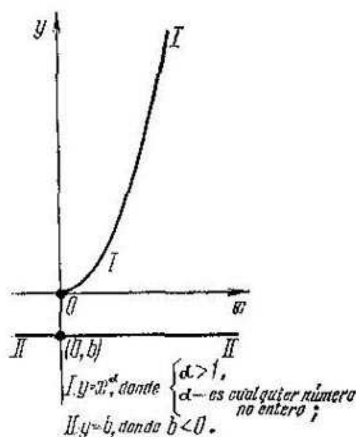


Fig. 160

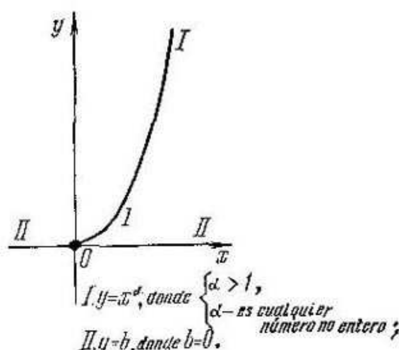


Fig. 161

una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X$ la función toma el valor $b$, entonces para cada $x > x_0$ tal, que $x \in X$ ella toma un valor superior a $b$, y para cada $x < x_0$ tal, que $x \in X$, un valor inferior a $b$. Por consiguiente, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7) está representado por el rayo $(x_0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (8), por el intervalo $[0, x_0)$, donde $x_0 = b^{\frac{1}{\alpha}}$ (fig. 162).

Así pues, si $\alpha > 0$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7) es

1. el conjunto $(b^{\frac{1}{\alpha}}, +\infty)$, para cada $b$ positivo;
2. el conjunto $(0, +\infty)$, para $b = 0$;
3. el conjunto $[0, +\infty)$, para cada $b$ negativo;

y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (8) es

1. el conjunto $[0, b^{\frac{1}{\alpha}})$, para cada $b$ positivo;
2. un conjunto vacío, para cada $b$ no positivo.

II. Sea $\alpha$ un número no entero negativo.

El campo de existencia de la función $y = x^\alpha$ es el conjunto de

todos los números positivos y, por eso, el CVA de las desigualdades (7) y (8) está representado por el conjunto $X = (0, +\infty)$. El campo de valores de la función $y = x^{\alpha}$ en todo el conjunto $X$ lo representa el rayo $Y = (0, +\infty)$.

Si $b$ es un número no positivo, entonces, al tomar en consideración que en el conjunto $X$ la función $y = x^{\alpha}$ es positiva, llegamos

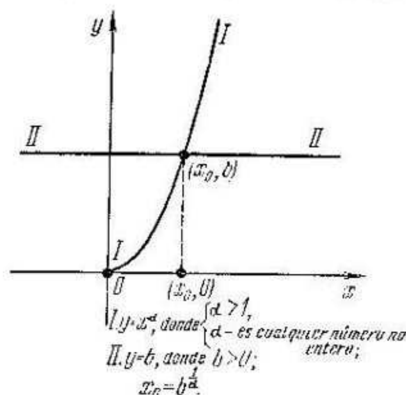



Fig. 162

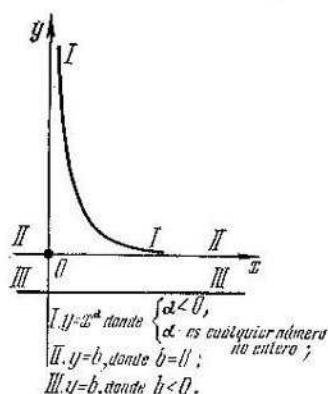



Fig. 163

a que $X$ es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7), mientras que la (8) no tiene soluciones (fig. 163).

Sea $b$ un número positivo. En el conjunto $X$ la función $y = x^{\alpha}$ es decreciente, por lo cual cada valor numérico de $Y$ la función lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X$ la función toma el valor $b$, entonces para cada $x < x_0$ tal, que $x \in X$ toma un valor mayor que $b$, y para cada $x > x_0$ tal, que $x \in X$, toma un valor menor que $b$. Por consiguiente, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7) será el intervalo $(0, x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (8), el rayo $(x_0, +\infty)$, donde $x_0 = b^{\frac{1}{\alpha}}$ (fig. 164).

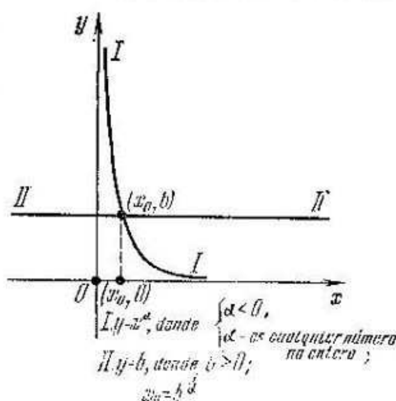



Fig. 164

Así pues, si $\alpha < 0$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (7) es

1. el conjunto $(0, b^{\frac{1}{\alpha}})$, para cada $b$ positivo;

2. el conjunto $(0, +\infty)$, para cada $b$ no positivo; y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (8) es

1. el conjunto $(b^{\frac{1}{\alpha}}, +\infty)$, para cada $b$ positivo;
2. un conjunto vacío, para cada $b$ no positivo.

En la tabla 20 se dan los resultados que se obtienen al resolver las desigualdades (7) y (8).

**Desigualdades exponenciales.** Sea $a$ un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces las desigualdades

$$a^x > b, \tag{9}$$

$$a^x < b \tag{10}$$

suelen llamarse *desigualdades potenciales elementales*. El campo de existencia de la función $y = a^x$ es el conjunto de todos los números

*Tabla 20*

| | $b > 0$ | $b=0$ | $b < 0$ |
|---|---|---|---|
| $x^\alpha > b\ (\alpha > 0)$ | $(b^{\frac{1}{\alpha}};\ \infty)$ | $(0;\ \infty)$ | $[0;\ \infty)$ |
| $x^\alpha < b\ (\alpha > 0)$ | $[0;\ b^{\frac{1}{\alpha}})$ | no hay soluciones | no hay soluciones |
| $x^\alpha > b\ (\alpha < 0)$ | $(0;\ b^{\frac{1}{\alpha}})$ | $(0;\ \infty)$ | $(0;\ \infty)$ |
| $x^\alpha < b\ (\alpha < 0)$ | $(b^{\frac{1}{\alpha}};\ \infty)$ | no hay soluciones | no hay soluciones |

reales, por lo cual el CVA de las desigualdades (9) y (10) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. El campo de valores de la función $y = a^x$ en todo el conjunto $X$ es el rayo $Y = (0, +\infty)$.

Si $b$ es un número no positivo, entonces, tomando en consideración que en el conjunto $X$ la función $y = a^x$ es positiva, concluimos que $X$ es el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9), mientras que la desigualdad (10) no tiene soluciones.

Si $b$ es un número positivo, analicemos dos casos:

1. Sea $a > 1$. En toda la recta numérica, es decir, en el conjunto $X$ la función $y = a^x$ es creciente, por lo cual cada valor numérico de $Y$ ella lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X$ la función toma el valor $b$, entonces para cada $x > x_0$ toma un valor superior a $b$, y para cada $x < x_0$, un valor inferior a $b$. Por consiguiente, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) será el rayo $(x_0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (10), el rayo $(-\infty, x_0)$, donde $x_0 = \log_a b$ (fig. 165).

2. Sea $0 < a < 1$. En el conjunto $X$, es decir, en toda la recta numérica la función $y = a^x$ decrece. Por eso, razonando semejantemente, concluimos que en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) es el rayo $(-\infty, x_0)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (10) es el rayo $(x_0, +\infty)$, donde $x_0 = \log_a b$ (fig. 166).

Así pues, si $a > 1$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) es

1. el conjunto $(\log_a b, +\infty)$, para cada $b$ positivo;
2. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b$ no positivo; el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (10) es
1. el conjunto $(-\infty, \log_a b)$, para cada $b$ positivo;
2. un conjunto vacío, para cada $b$ no positivo.

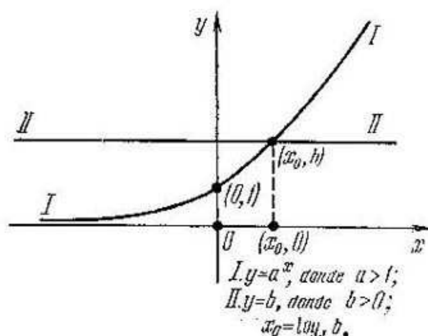



Fig. 165

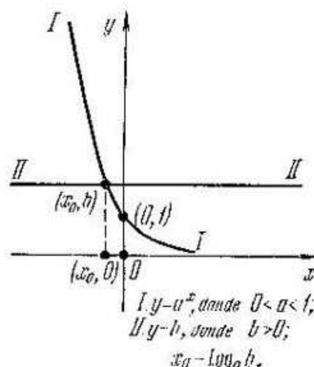



Fig. 166

Si $0 < a < 1$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) es

1. el conjunto $(-\infty, \log_a b)$, para cada $b$ positivo;
2. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b$ no positivo, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (10) es
1. el conjunto $(\log_a b, +\infty)$, para cada $b$ positivo;
2. un conjunto vacío, para cada $b$ no positivo.

En la tabla 21 se dan los resultados que se obtienen al resolver las desigualdades (9) y (10).

*Tabla 21*

| | $b > 0$ | $b = 0$ | $b < 0$ |
|---|---|---|---|
| $a^x > b \ (a > 1)$ | $(\log_a b;\ \infty)$ | $(-\infty;\ \infty)$ | $(-\infty;\ \infty)$ |
| $a^x < b \ (a > 1)$ | $(-\infty;\ \log_a b)$ | no hay soluciones | no hay soluciones |
| $a^x > b \ (0 < a < 1)$ | $(-\infty;\ \log_a b)$ | $(-\infty;\ \infty)$ | $(-\infty;\ \infty)$ |
| $a^x < b \ (0 < a < 1)$ | $(\log_a b;\ \infty)$ | no hay soluciones | no hay soluciones |

**Desigualdades logarítmicas.** Sea $a$ un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces las desigualdades

$$\log_a x > b, \tag{11}$$

$$\log_a x < b \tag{12}$$

suelen llamarse *desigualades logarítmicas elementales.*

El campo de existencia de la función $y = \log_a x$ se representa por el conjunto de todos los números positivos, por lo cual el CVA de las desigualdades (11) y (12) será un conjunto $X = (0, +\infty)$.

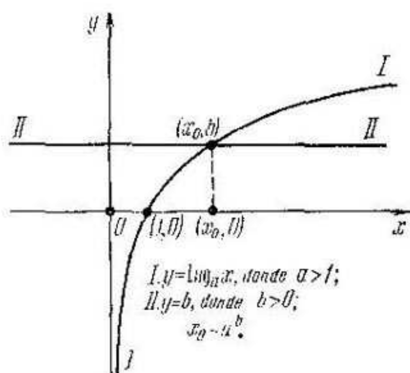


Fig. 167

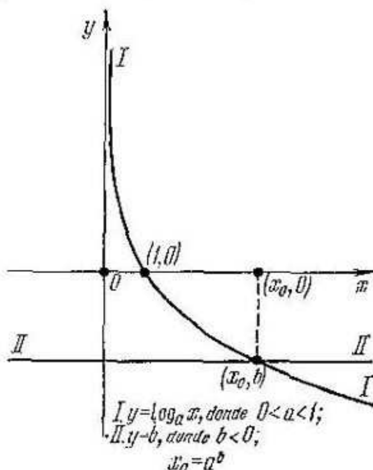


Fig. 168

El campo de valores de la función $y = \log_a x$ en todo el conjunto $X$ será todo el eje numérico $Y = (-\infty, +\infty)$.

Como las propiedades de la función $y = \log_a x$, que se emplean al resolver las desigualdades (11) y (12), son diferentes para $a > 1$ y para $0 < a < 1$, entonces examinemos dos casos:

1. Sea $a > 1$. En el conjunto $X$ la función $y = \log_a x$ es creciente, por lo cual cada valor numérico ella lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X$ la función toma el valor $b$, entonces para cada $x > x_0$ tal, que $x \in X$ la función toma un valor mayor que $b$, y para cada $x < x_0$ tal, que $x \in X$, ella toma un valor menor que $b$. Por consiguiente, en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (11) es el rayo $(x_0, +\infty)$, y el de todas las soluciones de la desigualdad (12), el intervalo $(0, x_0)$, donde $x_0 = a^b$ (fig. 167).

2. Sea $0 < a < 1$. En el conjunto $X$ la función $y = \log_a x$ decrece. Por eso, razonando de manera semejante, concluimos que en este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (11) es el intervalo $(0, x_0)$ y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (12), el rayo $(x_0, +\infty)$, donde $x_0 = a^b$ (fig. 168).

Así pues, si $a > 1$, entonces para cada $b$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (11) se representa por el conjunto $(a^b, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (12), es el conjunto $(0, a^b)$; si $0 < a < 1$, entonces para cada $b$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (11) será el conjunto $(0, a^b)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (12), es el conjunto $(a^b, +\infty)$.

*Tabla 22*

| | $-\infty < b < \infty$ |
|---|---|
| $\log_a x > b \ (a > 1)$ | $(a^b; \infty)$ |
| $\log_a x < b \ (a > 1)$ | $(0; a^b)$ |
| $\log_a x > b \ (0 < a < 1)$ | $(0; a^b)$ |
| $\log_a x < b \ (0 < a < 1)$ | $(a^b; \infty)$ |

En la tabla 22 se dan los resultados que se obtienen al resolver las desigualdades (11) y (12).

**Desigualdades trigonométricas.** Las desigualdades

$$\cos x > b, \ \text{sen}\, x > b, \ \text{tg}\, x > b, \ \text{ctg}\, x > b,$$

$$\cos x < b, \ \text{sen}\, x < b, \ \text{tg}\, x < b, \ \text{ctg}\, x < b$$

suelen llamarse *desigualdades trigonométricas elementales*.

He aquí algunas observaciones de carácter general.

Sea $y = f(x)$ una función trigonométrica elemental fundamental de período principal igual a $T$, y sea dada la desigualdad

$$f(x) > b \ \ (\text{o bien } f(x) < b). \qquad (13)$$

Elijamos un intervalo de longitud igual a $T$ y hallemos en dicho intervalo la solución de la desigualdad (13). Supongamos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (13) en el intervalo citado está representado por el intervalo $X_0 = (\alpha, \beta)$, donde $\alpha < \beta$ y $\beta - \alpha \leqslant T$. Entonces, haciendo uso de la periodicidad de la función $y = f(x)$, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (13) es la unión de una infinidad de todos los intervalos $X_k = (\alpha + kT, \beta + kT)$, donde $k$ es un número entero cualquiera. Llamaremos esta unión infinita serie de intervalos y la escribiremos posteriormente en la forma: $X_k = (\alpha + kT, \ \beta + kT)$, $k \in Z$. De este modo, en adelante diremos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (13) se representa por la serie de intervalos $X_k = (\alpha + kT, \beta + kT)$, $k \in Z$.

Notemos, además, que el intervalo de longitud igual al período principal $T$ puede ser cualquiera, mas se elige, corrientemente, de modo tal, que satisfaga dos condiciones: ha de contener un trozo en el que para la función dada $y = f(x)$ está definida una función trigonométrica inversa y, además, que el conjunto de todas las solu-

ciones de la desigualdad dada en dicho trozo represente en sí un intervalo.

Sea dada la desigualdad trigonométrica elemental

$$\cos x > b. \qquad (14)$$

La función $y = \cos x$ está definida en toda la recta numérica, por lo cual el CVA de la desigualdad (14) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. El campo de valores de la funcion $y = \cos x$ en el conjunto $X$ es el segmento $Y = [-1; 1]$.

Por eso, cuando $b < -1$, la desigualdad (14) se verifica para cualquier valor de $x$, y cuando $b \geqslant 1$, no se verifica, cualquiera que

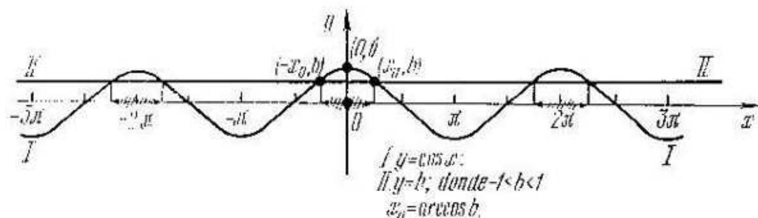



Fig. 169

sea el valor de $x$. Quiere decir, para $b < -1$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) será toda la recta numérica, es decir, el conjunto $(-\infty, +\infty)$, y para $b \geqslant 1$ la desigualdad (14) no tiene soluciones.

Si $b = -1$, entonces, evidentemente, la desigualdad (14) se verifica para todo valor de $x$, a excepción de aquellos, donde $\cos x = -1$. Quiere decir, cuando $b = -1$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) es toda la recta numérica, a excepción de los puntos $x_k = \pi + 2\pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera. Este conjunto puede ser escrito en forma de una serie de intervalos: $X_k = (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Sea $b \in (-1; 1)$; con el fin de resolver la desigualdad (14) es preciso elegir en este caso un trozo de longitud igual al período principal de la función $y = \cos x$, es decir, de longitud $2\pi$. A título de trozo de longitud $2\pi$ podemos tomar el trozo $[0, 2\pi)$, o bien el trozo $(-\pi, \pi]$. Estos trozos de longitud igual al período principal de la función $y = \cos x$ contienen enteramente el segmento $[0, \pi]$, en el cual está definida la función inversa $y = \arccos x$.

Construyamos las gráficas de las funciones $y = \cos x$ e $y = b$ (fig. 169). El dibujo muestra que resulta más conveniente elegir el trozo $(-\pi, \pi)$ que el $[0, 2\pi)$, puesto que en el primer caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) representa un intervalo, y en el segundo caso, la unión de dos intervalos. El dibujo sugiere, además, que el trozo $(-\pi, \pi]$ ha de ser dividido en dos trozos: $M_1 = [0, \pi]$ y $M_2 = (-\pi, 0)$, después de lo cual se hace uso de la paridad de esta función.

En el segmento $M_1 = [0, \pi]$ el campo de valores de la función $y = \cos x$ es $Y = [-1; 1]$ y la función decrece, por lo cual cada valor numérico de $Y$ ella lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in M_1$ la función toma el valor $b$, entonces para cada $x < x_0$ tal, que $x \in M_1$, ella toma un valor superior a $b$, y para cada $x > x_0$ tal, que $x \in M_1$, un valor inferior a $b$. Por consiguiente, en $M_1$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) es el trozo $[0, x_0)$. Como la función $y = \cos x$ es par en el trozo $(-\pi, \pi)$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) en $M_2 = (-\pi, 0)$ será el intervalo $(-x_0, 0)$.

Al reunir las soluciones halladas en $M_1$ y $M_2$, concluimos que en el trozo $(-\pi, \pi)$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) será el intervalo $(-x_0, x_0)$, donde, según lo expuesto en el § 2 cap. VII, $x_0 = \arccos b$.

Haciendo uso de la periodicidad de la función $y = \cos x$, obtenemos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) es la serie de intervalos $X_k = (-\arccos b + 2\pi k, \arccos b + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (14) es

1. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b \in (-\infty, -1)$;
2. la serie de intervalos $X_k = (-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$, para $b = -1$;
3. la serie de intervalos $X_k = (-\arccos b + 2\pi k, \arccos b + 2\pi k)$, $k \in Z$, para dada $b \in (-1; 1)$;
4. un conjunto vacío, para cada $b \in [1, +\infty)$.

Sea dada la desigualdad

$$\cos x < b. \tag{15}$$

El CVA de la desigualdad (15) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. El campo de valores de la función $y = \cos x$ en el conjunto $X$ es el segmento $Y = [-1; 1]$.

Por eso, cuando $b > 1$, la desigualdad (15) se verifica para cualquier valor de $x$, y, cuando $b \leqslant -1$, no se verifica, cualquiera que sea el valor de $x$. Quiere decir, cuando $b > 1$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) será $(-\infty, +\infty)$ y, cuando $b \leqslant -1$, la desigualdad (15) no tiene soluciones.

Si $b = 1$, entonces, evidentemente, la desigualdad (15) se verifica para cualquier valor de $x$, a excepción de aquellos, para los cuales $\cos x = 1$. Quiere decir, para $b = 1$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) es toda la recta numérica, salvo los puntos $x_k = 2\pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera. Este conjunto puede escribirse en forma de una serie de intervalos: $X_k = (2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Sea $b \in (-1; 1)$. Construyamos las gráficas de las funciones $y = \cos x$ e $y = b$ (fig. 170). El dibujo muestra que en calidad de trozo de longitud $2\pi$ aquí conviene más elegir el trozo $[0, 2\pi)$, puesto que en tal caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad

(15) representa en sí un intervalo. El dibujo sugiere, además, que el trozo $[0, 2\pi)$ ha de dividirse en dos: $M_1 = [0, \pi]$ y $M_2 = (\pi, 2\pi)$, después de lo cual es preciso aprovechar el decrecimiento de la función $y = \cos x$ en el trozo $[0, \pi]$, y luego, la simetría de la función $y = \cos x$ respecto de la recta vertical que pasa por el punto $(\pi, 0)$.

Razonando igual que en el caso anterior, conluimos que en $M_1$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) será el trozo $(x_0, \pi]$. Tomando en consideración que la función $y = \cos x$

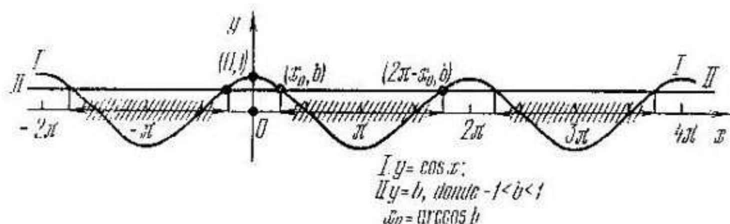



Fig. 170

es simétrica respecto de la recta vertical que pasa por el punto $(\pi, 0)$, concluimos que en $M_2$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) es el intervalo $(\pi, 2\pi - x_0)$.

Al reunir las soluciones halladas en $M_1$ y $M_2$, obtenemos que en el intervalo $[0, 2\pi)$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) es el intervalo $(x_0, 2\pi - x_0)$, donde, según lo expuesto en el § 2, cap. VII, $x_0 = \arccos b$.

Haciendo uso de la periodicidad de la función $y = \cos x$, obtenemos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) es una serie de intervalos: $X_k = (\arccos b + 2\pi k, 2\pi - \arccos b + 2\pi k)$, $k \in Z$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) se representa por:

1. un conjunto vacío, para cada $b \in (-\infty, -1]$;
2. una serie de intervalos $X_k = (\arccos b + 2\pi k, 2\pi - \arccos b + 2\pi k)$, $k \in Z$, para cada $b \in (-1; 1)$;
3. una serie de intervalos $X_k = (2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$, para $b = 1$;
4. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b \in (1, +\infty)$.

En la tabla 23 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (14) y (15).

Sean dadas las desigualdades trigonométricas elementales

$$\operatorname{sen} x > b, \tag{16}$$

$$\operatorname{sen} x < b. \tag{17}$$

Razonando análogamente, concluimos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (16) es:

| | $b<-1$ | $b=-1$ | $-1<b<1$ | $b=1$ | $b>1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x>b$ | $(-\infty;\ \infty)$ | $(-\pi+2\pi k;$ $\pi+2\pi k)$ $k\in Z$ | $(-\arccos$ $b+2\pi k;$ $\arccos\ b+2\pi k)$ $k\in Z$ | no hay soluciones | no hay soluciones |
| $\cos x<b$ | no hay soluciones | no hay soluciones | $(\arccos\ b+$ $+2\pi k;\ 2\pi-$ $-\arccos\ b+$ $+2\pi k),$ $k\in Z$ | $(2\pi k;$ $2\pi+2\pi k)$ $k\in Z$ | $(-\infty;\ \infty)$ |

1. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b\in(-\infty, -1)$;
2. la serie de intervalos

$$X_k=\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right),\quad k\in Z,$$

para $b=-1$;

3. la serie de intervalos $X_k=(\text{arcsen } b+2\pi k,\ \pi-\text{arcsen } b+2\pi k)$, $k\in Z$, para cada $b\in(-1;\ 1)$ (fig. 171);

Fig. 171

4. un conjunto vacío, para $b\in[1, +\infty)$; y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (17) está representado por:

1. un conjunto vacío, para $b\in(-\infty, -1]$;
2. la serie de desigualdades $X_k=(-\pi-\text{arcsen } b+2\pi k,\ \text{arcsen } b+2\pi k)$, $k\in Z$, para cada $b\in(-1;\ 1)$ (fig. 172);
3. la serie de intervalos $X_k=\left(-\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$, para $b=1$:
4. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b\in(1, +\infty)$.

En la tabla 24 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (16) y (17).

Sean dadas las desigulddades trigonométricas elementales

$$\text{tg } x>b, \tag{18}$$

$$\text{tg } x<b. \tag{19}$$

| | $b<-1$ | $b=-1$ | $-1<b<1$ | $b=1$ | $b<1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{sen} x>b$ | $(-\infty;\ \infty)$ | $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$ $k\in Z$ | $(\operatorname{arcsen} b+$ $+2\pi k;\ \pi-$ $-\operatorname{arcsen} b+$ $+2\pi k)$ $k\in Z$ | no hay soluciones | no hay soluciones |
| $\operatorname{sen} x<b$ | no hay soluciones | no hay soluciones | $(-\pi-$ $-\operatorname{arcsen} b+$ $+2\pi k;$ $\operatorname{arcsen} b+2\pi k)$ $k\in Z$ | $\left(-\frac{3\pi}{2}+\right.$ $+2\pi k;$ $\left.\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$ $k\in Z$ | $(-\infty;\ \infty)$ |

El campo de existencia de la función $y=\operatorname{tg} x$ es toda la recta númerica, salvo los puntos $x_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera. Por eso el CVA de las desigualdades (18) y (19) es

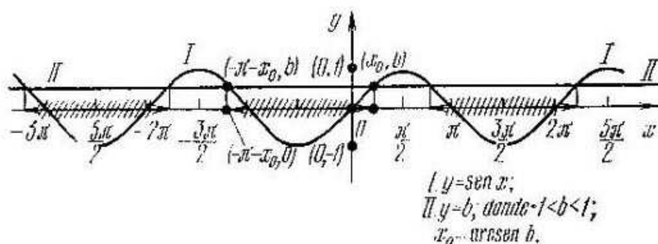



Fig. 172

un conjunto $X$ que se compone de todos los números reales, a excepción de los números $x_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera. El campo de valores de la función $y=\operatorname{tg} x$ en el conjunto $X$ es el conjunto $Y=(-\infty,\ \infty)$.

Construyamos las gráficas de las funciones $y=\operatorname{tg} x$ e $y=b$ (fig. 173). El dibujo muestra que al principio se debe analizar la resolución de las desigualdades (18) y (19) en el trozo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de longitud igual al período principal de la función $y=\operatorname{tg} x$. El dibujo sugiere, además, que en dicho trozo es menester aprovechar el crecimiento de la función $y=\operatorname{tg} x$.

En el trozo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ la función $y=\operatorname{tg} x$ tiene el campo de valores $Y=(-\infty,\ +\infty)$ y es creciente, por lo cual cada valor

numérico de $Y$ la función lo toma una sola vez. Quiere decir, si para $x=x_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ ella toma el valor $b$, entonces para cada $x>x_0$ tal, que $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ la función toma un valor superior a $b$, y para cada $x<x_0$ tal, que $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, ella toma un

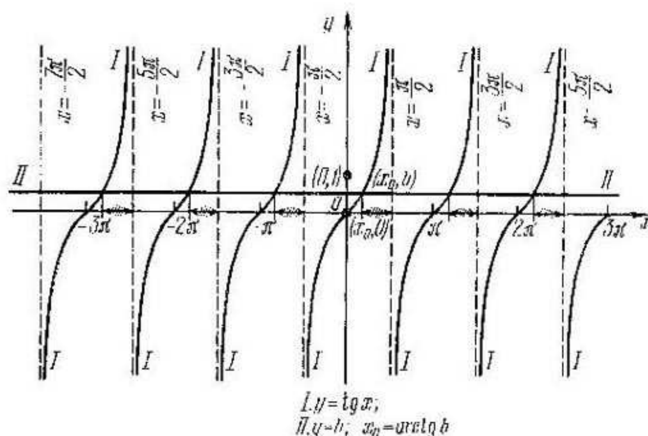



Fig. 173

valor inferior a $b$. Por consiguiente, en $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (18) (véase la fig. 173) es el intervalo $\left(x_0,\ \frac{\pi}{2}\right)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (19) (fig. 174), es el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\ x_0\right)$, donde, de acuerdo con lo expuesto en el § 2, cap. VII, $x_0=\operatorname{arctg} b$.

Haciendo uso de la periodicidad de la función $y=\operatorname{tg} x$, obtenemos que para cualquier $b$ el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (18) es una serie de intervalos: $X_k=\left(\operatorname{arctg} b+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (19) es la serie de intervalos $X_k=\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \operatorname{arctg} b+\pi k\right)$, $k\in Z$.

En la tabla 25 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (18) y (19).

Sean dadas las desigualdades trigonométricas elementales

$$\operatorname{ctg} x>b, \tag{20}$$
$$\operatorname{ctg} x<b. \tag{21}$$

*Tabla 25*

| | $-\infty < b < \infty$ |
|---|---|
| $\operatorname{tg} x > b$ | $\left(\operatorname{arctg} b + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$ |
| $\operatorname{tg} x < b$ | $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} b + \pi k\right)$, $k \in Z$ |

Razonando análogamente, llegamos a que para cualquier $b$, el conjunto de todas las soluciones de las desigualdades (20) (fig.

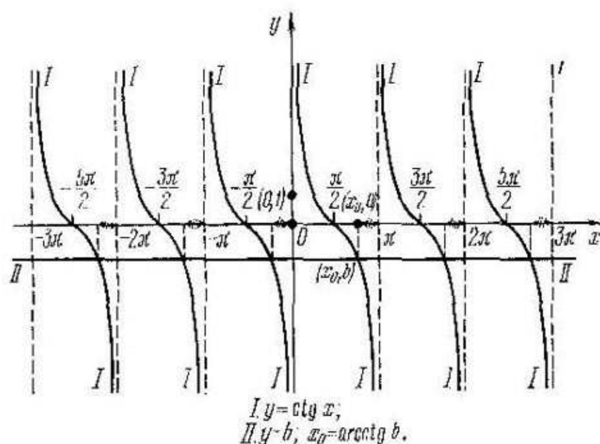



Fig. 174

175) es la serie de intervalos $X_k = (\pi k, \operatorname{arcctg} b + \pi k)$, $k \in Z$ y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (21) (fig. 176) es la serie de intervalos $X_k = (\operatorname{arcctg} x + \pi k, \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

En la tabla 26 se dan los resultados que se obtienen al resolver las desigualdades (20) y (21).

*Tabla 26*

| | $-\infty < b < \infty$ |
|---|---|
| $\operatorname{ctg} x > b$ | $(\pi k; \operatorname{arcctg} b + \pi k)$, $k \in Z$ |
| $\operatorname{ctg} x < b$ | $(\operatorname{arcctg} b + \pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$ |

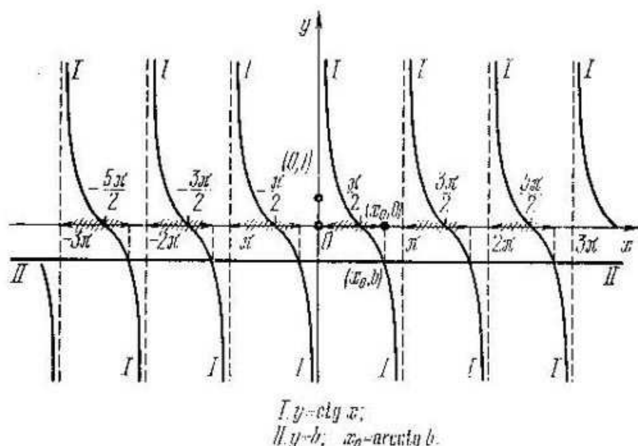
Analicemos además algunas desigualdades elementales que contienen funciones trigonométricas fundamentales inversas.

Sean dadas las desigualdades elementales

$$\arccos x > b \tag{22}$$

$$\arccos x < b. \tag{23}$$

El campo de existencia de la función $y = \arccos x$ es el segmento $[-1, 1]$. Quiere decir, el CVA de las desigualdades (22) y (23) es



I. $y = \operatorname{ctg} x$;
II. $y = b$; $x_0 = \operatorname{arcctg} b$.

Fig. 175

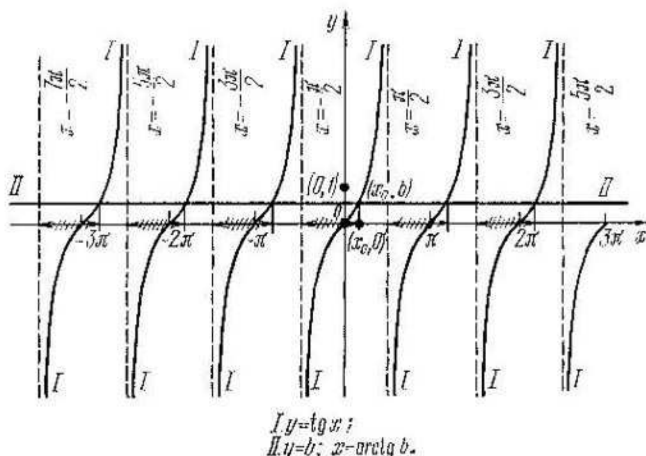
el conjunto $X = [-1; 1]$. El campo de valores de la función $y = \arccos x$ en todo el conjunto $X$ es el segmento $Y = [0, \pi]$.

Por eso, cuando $b$ es negativo, la desigualdad (22) se verifica para cualquier valor de $x \in X$, mientras que la desigualdad (23) no se verifica, cualquiera que sea el valor de $x \in X$; si, en cambio, $b > \pi$, entonces la desigualdad (22) no se verifica, para ningún valor de $x \in X$, y la desigualdad (23) se verifica para cualquier valor de $x \in X$.

Por lo tanto, cuando $b$ es negativo, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (22) es el conjunto $[-1; 1]$, mientras que la desigualdad (23) no tiene soluciones; cuando $b > \pi$, la desigualdad (22) no tiene soluciones, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (23) es el conjunto $[-1; 1]$.

Cuando $b = 0$, la desigualdad (22) se verifica para cualquier valor de $x \in X$, salvo para $x = 1$, y la desigualdad (23) no se verifica para ningún valor de $x \in X$. Quiere decir, cuando $b = 0$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (22) es el conjunto $[-1; 1)$, mientras que la desigualdad (23) no tiene soluciones.

Si $b = \pi$, la desigualdad (22) no se verifica cualquiera que sea el valor de $x \in X$, y la desigualdad (23) se verifica para cualquier valor de $x \in X$, salvo el valor de $x = -1$. Quiere decir, para $b = \pi$




I. $y = \operatorname{tg} x$;
II. $y = b$; $x = \operatorname{arctg} b$.

Fig. 176

la desigualdad (22) no tiene soluciones, mientras que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (23) es el conjunto $(-1; 1]$.

Sea $b \in (0, \pi)$. La función $y = \arccos x$ en el conjunto $X$ es decreciente, por lo cual cada valor de $Y$ ella lo toma una sola vez. Quiere

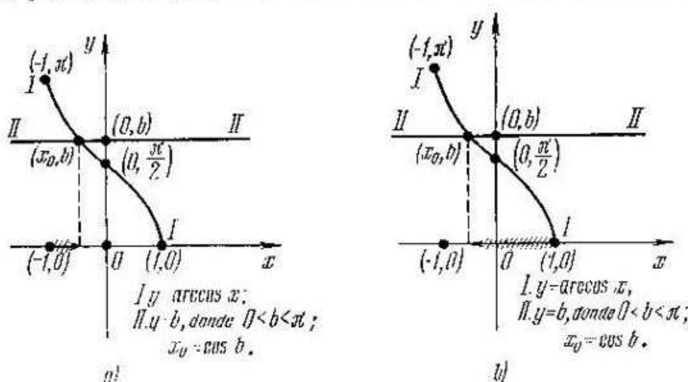



Fig. 177

decir, si para $x = x_0 \in X$ la función toma el valor $b$, entonces para cada $x < x_0$ tal, que $x \in X$ ella toma un valor superior a $b$, y para cada $x > x_0$ tal, que $x \in X$, ella toma un valor inferior a $b$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (22) (fig. 177, a) es en este caso el intervalo $[-1, x_0)$, y el conjunto de

todas las soluciones de la desigualdad (23) (fig. 177, b). el intervalo $(x_0, 1]$, donde, según lo expuesto en el § 2, cap. VII, $x_0 = \cos b$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (22) es:

1. el conjunto $[-1; 1]$, para cada $b \in (-\infty, 0)$;
2. el conjunto $[-1; 1)$, para $b = 0$;
3. el conjunto $[-1, \cos b)$, para cada $b \in (0, \pi)$;
4. un conjunto vacío, para cada $b \in [\pi, +\infty)$;

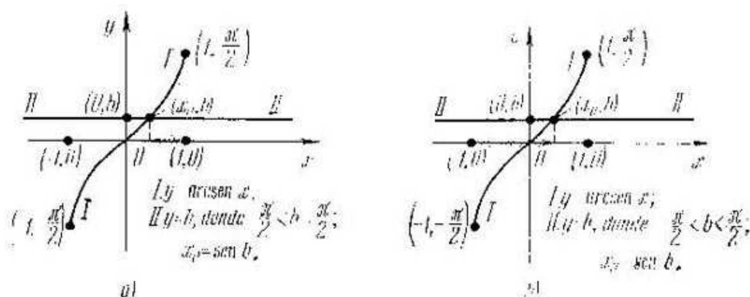


Fig. 178

y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (23), es:

1. un conjunto vacío, para cada $b \in (-\infty, 0]$;
2. el conjunto $(\cos b, 1]$, para cada $b \in (0, \pi)$;
3. el conjunto $(-1; 1]$, para $b = \pi$;
4. el conjunto $(-1; 1]$, para cada $b \in (\pi, +\infty)$.

En la tabla 27 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (22) y (23).

*Tabla 27*

| | $b < 0$ | $b = 0$ | $0 < b < \pi$ | $b = \pi$ | $b > \pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\arccos x > b$ | $[-1; 1]$ | $[-1; 1)$ | $[-1; \cos b)$ | no hay soluciones | no hay soluciones |
| $\arccos x < b$ | no hay soluciones | no hay soluciones | $(\cos b; 1)$ | $(-1; 1]$ | $[-1; 1]$ |

Sean dadas las desigualdades elementales

$$\operatorname{arcsen} x > b, \tag{24}$$

$$\operatorname{arcsen} x < b. \tag{25}$$

Razonando análogamente, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (24) (fig. 178, a), es:

1. el conjunto $[-1; 1]$, para cada $b \in \left(-\infty, \frac{\pi}{2}\right)$;

2. el conjunto $(-1, 1]$, para $b=-\frac{\pi}{2}$;

3. el conjunto $(\operatorname{sen} b, 1]$, para cada $b\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

4. un conjunto vacío, para cada $b\in\left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$;

y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (25) (fig. 178, b), es:

1. un conjunto vacío, para cada $b\in\left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right]$;

2. el conjunto $[-1, \operatorname{sen} b)$, para $b\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

3. el conjunto $[-1; 1)$, para $b=\frac{\pi}{2}$;

4. el conjunto $[-1; 1]$, para $b\in\left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$.

En la tabla 28 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (24) y (25).

*Tabla 28*

| | $b<-\frac{\pi}{2}$ | $b=-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{2}<b<\frac{\pi}{2}$ | $b=\frac{\pi}{2}$ | $b>\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\arcsin x>b$ | $[-1; 1]$ | $(-1; 1]$ | $(\operatorname{sen} b; 1]$ | no hay soluciones | no hay soluciones |
| $\arcsin x<b$ | no hay soluciones | no hay soluciones | $[-1; \operatorname{sen} b)$ | $[-1; 1)$ | $[-1; 1]$ |

Sean dadas las desigualdades elementales

$$\operatorname{arctg} x > b, \tag{26}$$

$$\operatorname{arctg} x < b. \tag{27}$$

El campo de existencia de la función $y = \operatorname{arctg} x$ es toda la recta numérica. Quiere decir, el CVA de las desigualdades (26) y (27) es el conjunto $X = (-\infty, +\infty)$. El campo de valores de la función $y = \operatorname{arctg} x$ en el conjunto $X$ es el intervalo $Y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Por eso, cuando $b\leqslant -\frac{\pi}{2}$, la desigualdad (26) se verifica para cualquier valor de $x \in X$, y la desigualdad (27) no es válida para ningún valor de $x \in X$; si, en cambio, $b\geqslant\frac{\pi}{2}$, entonces la desigualdad (26) no se verifica para ningún valor de $x \in X$, mientras que la desigualdad (27) se verifica para cualquier valor de $x \in X$.

Esto significa que cuando $b\leqslant -\frac{\pi}{2}$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (26) es toda la recta numérica, y la des-

igualdad (27) no tiene soluciones; cuando $b \geqslant \frac{\pi}{2}$, la desigualdad (26) no tiene soluciones, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (27) es toda la recta numérica.

Sea $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. La función $y = \operatorname{arcctg} x$ es creciente en toda la recta numérica, por lo cual cada valor de $Y$ ella lo toma una

Fig. 179

sola vez. Quiere decir, si para $x = x_0 \in X$ la función toma el valor $b$, entonces para cada $x > x_0$ ella toma un valor superior a $b$, y para cada $x < x_0$, un valor inferior a $b$. Por consiguiente, en este caso el

Fig. 180

conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (26) (fig. 179) es el rayo $(x_0, +\infty)$, y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (27) (fig. 180) es el rayo $(-\infty, x_0)$, donde, según lo expuesto en el § 2, cap. VII, $x_0 = \operatorname{tg} b$.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (26) es

1. el conjunto $(-\infty, +\infty)$ para cada $b \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right)$;
2. el conjunto $(\operatorname{tg} b, +\infty)$, para cada $b \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
3. un conjunto vacío, para cada $b \in \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$;

y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (27), por

1. un conjunto vacío, para cada $b\in\left(-\infty,\ -\frac{\pi}{2}\right]$;
2. el conjunto $(-\infty,\ \operatorname{tg} b)$, para cada $b\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$;
3. el conjunto $(-\infty,\ +\infty)$, para cada $b\in\left[\frac{\pi}{2},\ +\infty\right)$.

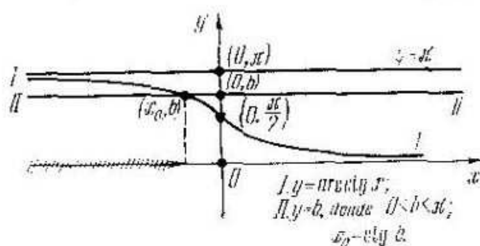



Fig. 181

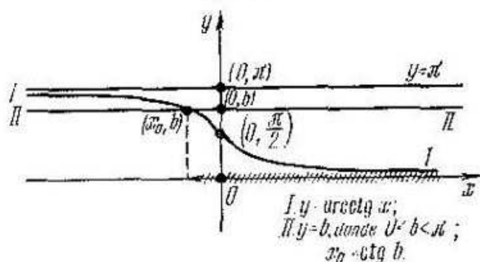



Fig. 182

En la tabla 29 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (26) y (27).

*Tabla 29*

| | $b\leqslant-\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{2}<b<\frac{\pi}{2}$ | $b\geqslant\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\operatorname{arctg} x>b$ | $(-\infty;\ \infty)$ | $(\operatorname{tg} b;\ \infty)$ | no hay soluciones |
| $\operatorname{arctg} x<b$ | no hay soluciones | $(-\infty;\ \operatorname{tg} b)$ | $(-\infty,\ +\infty)$ |

Sean dadas las desigualdades elementales

$$\operatorname{arcctg} x>b, \tag{28}$$

$$\operatorname{arcctg} x<b. \tag{29}$$

Razonando análogamente, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (28) (fig. 181) es

1. el conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b \in (-\infty, 0]$;
2. el conjunto $(-\infty, \operatorname{ctg} b)$, para cada $b \in (0, \pi)$;
3. un conjunto vacío, para cada $b \in [\pi, +\infty)$;

y el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (29), es (fig. 182)

1. un conjunto vacío, para cada $b \in (-\infty, 0]$;
2. el conjunto $(\operatorname{ctg} b, +\infty)$, para cada $b \in (0, \pi)$;
3. conjunto $(-\infty, +\infty)$, para cada $b \in [\pi, +\infty)$.

En la tabla 30 se dan los resultados obtenidos al resolver las desigualdades (28) y (29).

*Tabla 30*

| | $b \leqslant 0$ | $0 < b < \pi$ | $b \geqslant \pi$ |
|---|---|---|---|
| arcctg $x > b$ | $(-\infty; \infty)$ | $(-\infty; \operatorname{ctg} b)$ | no hay soluciones |
| arcctg $x < b$ | no hay soluciones | $(\operatorname{ctg} b; \infty)$ | $(-\infty; \infty)$ |

## § 3. Transformaciones de las desigualdades

En los párrafos tercero y cuarto del capítulo VII se han examinado las transformaciones de las ecuaciones equivalentes y no equivalentes, respectivamente. Para las transformaciones no equivalentes se indicaron dos procedimientos de resolución de las ecuaciones. El primer procedimiento consistía en realizar pasos equivalentes en un conjunto que pertenece al campo de valores admisibles sin coincidir obligatoriamente con el último. El segundo procedimiento presupone los pasos a una ecuación, que es una consecuencia de la anterior, y la comprobación obligatoria de las soluciones obtenidas.

Al resolver las desigualdades, el segundo procedimiento es, en realidad, imposible, puesto que el conjunto de todas las soluciones de una desigualdad es, las más de las veces, infinito y por esta razón la comprobación de las soluciones resulta prácticamente irrealizable. Por esta razón, al resolver las desigualdades, se deben efectuar solamente pasos equivalentes y, generalmente, pasos equivalentes en el conjunto. Además, es preciso fijar cada vez el conjunto en el que se realiza el paso equivalente.

Aduzcamos más abajo algunos ejemplos de transformaciones equivalentes y no equivalentes de las desigualdades.

**Transformaciones relacionadas con la aplicación de identidades.** *Sea dada la desigualdad*

$$f(x) > g(x) \tag{1}$$

*y supongamos que para todo $x$ real se verifica la igualdad idéntica $\varphi(x) = g(x)$, entonces la desigualdad (1) es equivalente a la igualdad*

$$f(x) > \varphi(x). \tag{2}$$

Esta afirmación permite emplear para resolver desigualdades diferentes fórmulas que son válidas para todos los $x$ reales. Como ejemplo de dichas igualdades idénticas sirven las fórmulas de multiplicación reducida de polinomios, la identidad trigonométrica fundamental y toda una serie de otras fórmulas. En el cap. III ya hemos resuelto algunas desigualdades algebraicas con ayuda de las fórmulas de multiplicación reducida.

Demos un ejemplo más de transformación equivalente de las desigualdades aplicando igualdades idénticas.

Sea dada la desigualdad

$$\operatorname{sen}^4 x > \cos^4 x. \qquad (3)$$

Aplicando la afirmación 1 del § 1, obtenemos la desigualdad

$$\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x < 0, \qquad (4)$$

que es equivalente a la desigualdad (3). Haciendo uso de la fórmula para la diferencia de cuadrados, la identidad trigonométrica fundamental y la fórmula para el coseno de un ángulo de arco doble, se puede escribir la siguiente cadena de igualdades idénticas, que son válidas para cualquier $x$ real:

$$\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \cos 2x.$$

Quiere decir, la desigualdad (4) es equivalente a la desigualdad

$$\cos 2x < 0.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última desigualdad es la serie de intervalos $X_k = \left(\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{3\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Como la última desigualdad es equivalente a la de partida, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (3) e la serie de intervalos $X_k = \left(\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{3\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

**Transformaciones relacionadas con las superposiciones de las funciones.** Supongamos que la función $y = f(x)$ represesnta una función compuesta $y = P[g(x)]$ que es la superposición de dos funciones: $y = P[u]$, donde $P[u]$ es un trinomio de segundo grado (es decir, $P[u] = au^2 + bu + c$), y $u = g(x)$, que es una función elemental fundamental. En tal caso la desigualdad $f(x) > 0$ se escribe en la forma

$$a[g(x)]^2 + b[g(x)] + c > 0 \qquad (5)$$

y se denomina *desigualdad cuadrática con relación a* $g(x)$.

La desigualdad (5) se resuelve del modo siguiente.

Al principio se analiza la desigualdad cuadrática

$$at^2 + bt + c > 0, \qquad (6)$$

y se determina su discriminante $D = b^2 - 4ac$. Según sean el discriminante $D$ y el coeficiente $a$, resultan posibles los siguientes cuatro casos.

1. Si $a < 0$ y $D \leqslant 0$, la desigualdad (6) no tiene soluciones. Por consiguiente, la desigualdad (5) tampoco las tiene.

2. Si $a < 0$ y $D > 0$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6) es el intervalo $(t_1, t_2)$, donde $t_1$ y $t_2$ son raíces del trinomio de segundo grado $at^2 + bt + c$, siendo $t_1 < t_2$.

En este caso la desigualdad (5) es equivalente al sistema de desigualdades

$$\begin{cases} g(x) < t_2, \\ g(x) > t_1. \end{cases}$$

Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones del sistema en este caso será precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5).

3. Si $a > 0$ y $D \geqslant 0$, entonces el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6) está representado por la unión de los rayos $(-\infty, t_1)$ y $(t_2, +\infty)$, donde $t_1$ y $t_2$ son raíces del trinomio de segundo grado $at^2 + bt + c$, siendo $t_1 \leqslant t_2$ (si $D = 0$, se tiene $t_1 = t_2$).

En este caso la desigualdad (5) es equivalente al conjunto de desigualdades

$$g(x < t_1, \quad g(x) > t_2.$$

Por consiguiente, en este caso el conjunto de todas las soluciones de dicho conjunto será precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5).

4. Si $a > 0$ y $D < 0$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (6) es toda la recta numérica.

En este caso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (5) es el CVA de la desigualdad (5), es decir, es el campo de existencia de la función $y = g(x)$.

He aquí algunos **ejemplos**.

Sea dada la desigualdad

$$4\cos^2 2x + 8\cos 2x - 5 < 0. \tag{7}$$

Esta desigualdad es una desigualdad cuadrática con relación a $\cos 2x$. Resolviendo la desigualdad

$$4t^2 + 8t - 5 < 0,$$

obtenemos que el conjunto de todas sus soluciones es el intervalo $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Por consiguiente, la desigualdad (7) es equivalente al sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \cos 2x > -\dfrac{5}{2}, \\ \cos 2x < \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

El conjunto de todas las soluciones de la primera desigualdad este sistema es toda la recta numérica.

El conjunto de todas las soluciones de la segunda desigualdad es la serie de intervalos $X_k = \left(\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \frac{5\pi}{6} + \pi k\right),\ k \in Z$.

Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida (7) es la serie de intervalos $X_k = \left(\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \frac{5\pi}{6} + \pi k\right),\ k \in Z$.

Sea dada la desigualdad

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0. \tag{8}$$

Esta es una desigualdad cuadrática respecto de $2^x$. Al resolver la desigualdad

$$t^2 - 3t + 2 > 0,$$

se obtiene que el conjunto de todas sus soluciones es la unión de dos rayos $(-\infty,\ 1)$ y $(2,\ +\infty)$. Por consiguiente, la desigualdad (8) es equivalente al conjunto de desigualdades

$$2^x < 1, \quad 2^x > 2.$$

El conjunto de todas las soluciones de la primera desigualdad de dicho conjunto es el intervalo $(-\infty,\ 0)$.

El conjunto de todas las soluciones de la segunda desigualdad, es el intervalo $(1,\ +\infty)$.

Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida (8) será el conjunto $(-\infty,\ 0) \cup (1,\ +\infty)$.

Observemos que la afirmación, aducida anteriormente, sobre la resolución de una desigualdad cuadrática con relación a $g(x)$ sigue siendo justa también en el caso en que la función $u = g(x)$ no es elemental fundamental.

**Transformaciones relacionadas con las fórmulas logarítmicas y trigonométricas.** Por cuanto las fórmulas, aducidas en el § 4, cap. VII, pueden aplicarse al resolver las desigualdades solamente en el conjunto de variación de la incógnita, donde tienen sentido simultáneamente los miembros primero y segundo de la fórmula que se aplica, las desigualdades, para cuya resolución se emplea tal o cual fórmula, se resuelven, corrientemente, siguendo el siguiente esquema:

1. *Se determina el CVA de la desigualdad.*

2. *Se divide el CVA en dos conjuntos*: $M_1$ y $M_2$ ($M_1$ representa toda la parte del CVA, donde tienen sentido simultáneamente ambos miembros de la fórmula que se aplica, $M_2$ es toda aquella parte del CVA que queda después de separar el conjunto $M_1$).

3. *Se resuelve la desigualdad en* $M_1$ (teniendo presente que la transformación de la desigualdad con ayuda de esta fórmula es equivalente a la transformación en el conjunto $M_1$).

4. *Se resuelve la desigualdad en* $M_2$.

5. *Se reúnen los conjuntos de soluciones, halladas en $M_1$ y $M_2$, y se obtiene, de este modo, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida.*

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, la desigualdad

$$\log_2 (x^2) + \log_2 (x^4) > 3. \qquad (9)$$

El CVA de esta desigualdad es el conjunto $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Dividamos el CVA en dos conjuntos: $M_1 = (0, +\infty)$ y $M_2 = (-\infty, 0)$ y resolvamos la desigualdad (9) en cada uno de estos conjuntos.

En el conjunto $M_1$ se verifican las igualdades idénticas

$$\log_2 (x^2) = 2 \log_2 x, \quad \log_2 (x^4) = 4 \log_2 x.$$

Quiere decir, en $M_1$ la desigualdad (9) es equivalente a la desigualdad

$$\log_2 x > 1/2.$$

Resolviendo esta desigualdad elemental, obtenemos que el conjunto de todas sus soluciones es el intervalo $(\sqrt{2}, +\infty)$. Por cuanto este intervalo está contenido dentro del conjunto $M_1$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) en $M_1$ será el intervalo $(\sqrt{2}, +\infty)$.

En el conjunto $M_2$ se verifican las igualdades idénticas

$$\log_2 (x^2) = 2\log_2 (-x), \quad \log_2 (x^4) = 4\log_2 (-x).$$

Quiere decir, en $M_2$ la desigualdad (9) es equivalente a la desigualdad

$$\log_2 (-x) > 1/2.$$

Resolviendo esta desigualdad elemental, vemos que el conjunto de todas sus soluciones es el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2})$. Por cuanto este intervalo está contenido dentro del conjunto $M_2$, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) en $M_2$ será el intervalo $(-\infty, -\sqrt{2})$.

Al reunir los conjuntos de soluciones encontradas en $M_1$ y en $M_2$, llegamos a que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (9) es el conjunto $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

**Transformaciones relacionadas con la elevación a potencia natural.** Sea dada la desigualdad

$$f (x) > g (x). \qquad (10)$$

La sustitución de esta desigualdad por la desigualdad

$$[f (x)]^n > [g (x)]^n \qquad (11)$$

(donde $n$ es un número natural fijo y $n \geqslant 2$) se denomina *elevación de la desigualdad a la potencia natural $n$.*

En virtud de la afirmación 5 § 1, las desigualdades (10) y (11) son equivalentes solamente en el conjunto, donde las funciones $y = f (x)$ e $y = g (x)$ son ambas simultáneamente no negativas.

Por eso, la elevación a potencia natural de las desigualdades se realiza, de ordinario, por el siguiente **esquema**:

1. *Se determina el CVA de la desigualdad a resolver.*

2. *Se divide el CVA en dos conjuntos:* $M_1$ y $M_2$ ($M_1$ es toda la parte del CVA, donde ambos miembros de la desigualdad son simultáneamente no negativos. $M_2$ es toda la parte del CVA que queda después de separar el conjunto $M_1$).

3. *Se resuelve la desigualdad en* $M_1$ (tomando en consideración que la elevación a la potencia $n$ es una transformación equivalente en este conjunto).

4. *Se resuelve la desigualdad en el conjunto* $M_2$.

5. *Se reúnen los conjuntos de soluciones, determinadas en* $M_1$ *y* $M_2$, *y, de este modo, se obtiene el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida.*

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, la desigualdad

$$|x-4|>6+x. \tag{12}$$

El CVA de esta desigualdad es toda la recta numérica. Dividamos el CVA en dos conjuntos: $M_1=[-6, +\infty)$ y $M_2=(-\infty, -6)$ y resolvamos la desigualdad (12) en cada uno de estos conjuntos.

En el conjunto $M_1$ ambos miembros de la desigualdad (12) son no negativos, por lo cual, de acuerdo con la afirmación 5, § 1, en dicho conjunto la desigualdad (12) será equivalente a la desigualdad

$$(x-4)^2>(6+x)^2.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última desigualdad es el intervalo $(-\infty, -1)$. Como parte del intervalo citado en el conjunto $M_1$ está contenido solamente el intervalo $[-6, -1)$. Por eso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (12) en $M_1$ se representa por el intervalo $[-6; -1)$.

Es evidente que en el conjunto $M_2$ el primer miembro de la desigualdad (12) es positivo, y el segundo, negativo. Por eso, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (12) en $M_2$ es todo el conjunto $M_2$.

Al reunir los conjuntos de todas las soluciones determinados en $M_1$ y $M_2$, obtenemos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (12) es el intervalo $(-\infty, -1)$.

La elevación a potencia natural se aplica con mayor frecuencia al resolver las siguientes desigualdades.

Sea $m$ un número natural fijo y sean dadas las desigualdades

$$\sqrt[2m]{f(x)}>\varphi(x), \tag{13}$$

$$\sqrt[2m]{f(x)}<\varphi(x). \tag{14}$$

Las desigualdades del tipo (13) se resuelven, de ordinario, según el siguiente **esquema**:

1. *Se determina el CVA de la desigualdad.*

2. *Se divide el CVA en dos conjuntos:* $M_1$ *y* $M_2$ ($M_1$ es toda la parte del CVA, donde la función $y = \varphi(x)$ es no negativa; $M_2$ es toda la parte del CVA, donde la función $y = \varphi(x)$ es negativa).

3. *Se resuelve en* $M_1$ *la desigualdad* $f(x) > [\varphi(x)]^{2m}$, *la cual es equivalente en dicho conjunto, a la desigualdad* (13).

4. *Se fija que en* $M_2$ *el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad* (13) *coincide con el conjunto* $M_2$.

5. *Se reúnen el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad* $f(x) > ([\varphi(x)]^{2m}$ *en* $M_1$ *y el conjunto* $M_2$, *y, de este modo, se obtiene el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad* (13).

Las desigualdades del tipo (14) se resuelven, de ordinario, según el siguiente **esquema**:

1. *Se determina el CVA de la desigualdad.*

2. *Se divide el CVA en dos conjuntos:* $M_1$ y $M_2$ ($M_1$ es toda la parte del CVA, donde la función $y = \varphi(x)$ es positiva, $M_2$ es toda la parte del CVA, donde la función $y = \varphi(x)$ es no positiva).

3. *Se resuelve en el conjunto* $M_1$ *la desigualdad* $f(x) < [\varphi(x)]^{2m}$ *que es equivalente en este conjunto a la desigualdad* (14).

4. *Se fija que en el conjunto* $M_1$ *no hay soluciones de la desigualdad* (14).

5. *Se escribe el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad* $f(x) < [\varphi(x)]^{2m}$ *en* $M_1$; *este conjunto será precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad* (14).

Mostremos ahora con unos ejemplos concretos cómo se resuelven las desigualdades según los esquemas citados.

Sea dada la desigualdad

$$\sqrt{x+2} > x. \qquad (15)$$

El CVA de esta desigualdad es el intervalo $[-2, +\infty)$. Dividamos el CVA en dos conjuntos $M_1$ y $M_2$: $M_1 = [0, +\infty)$ y $M_2 = [-2; 0)$, y resolvamos la desigualdad (15) en cada uno de estos conjuntos.

En el conjunto $M_1$ ambos miembros de la desigualdad (15) son no negativos, por lo cual, de acuerdo con la afirmación 5 § 1, en el conjunto que se considera la desigualdad (15) será equivalente a la desigualdad

$$x + 2 > x^2.$$

Al aplicar ahora la afirmación 1 § 1, vemos que en el conjunto $M_1$ la desigualdad (15) es equivalente a la desigualdad

$$x^2 - x - 2 < 0.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última desigualdad es el intervalo $(-1; 2)$. En el conjunto $M_1$ está contenido, como parte del intervalo indicado, solamente el intervalo $[0; 2)$. Por eso el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) en $M_1$ será el intervalo $[0; 2)$. Es evidente que en el conjunto $M_2$ el primer miembro de la desigualdad (15) es no negativo, y el segundo, negativo, por

consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) en $M_2$ es todo el conjunto $M_2$.

Reuniendo los conjuntos de todas las soluciones determinados en $M_1$ y $M_2$, concluimos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (15) será el intervalo $[-2; 2)$.

Sea dada la desigualdad

$$x+1>\sqrt{x+3}. \qquad (16)$$

El CVA de esta desigualdad es el intervalo $[-3, +\infty)$. Dividamos el CVA en dos conjuntos: $M_1=(-1, +\infty)$ y $M_2=[-3; -1]$, y resolvamos la desigualdad (16) en cada uno de estos conjuntos.

En el conjunto $M_1$ ambos miembros de la desigualdad (16) son no negativos, por lo cual, de acuerdo con la afirmación 5 § 1, la desigualdad (16) es equivalente en este conjunto a la desigualdad

$$(x+1)^2>x+3.$$

Aplicando ahora la afirmación 1 § 1, concluimos que en el conjunto $M_1$ la desigualdad (16) es equivalente a la desigualdad

$$x^2+x-2>0.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última desigualdad es el conjunto $(-\infty, -2)\cup(1, +\infty)$. Por eso, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (16) en $M_1$ es el intervalo $(1, +\infty)$.

Es evidente que en el conjunto $M_2$ el primer miembro de la desigualdad (16) es no positivo, y el segundo, no negativo, por consiguiente, en $M_2$ la desigualdad (16) no tiene soluciones.

Así pues, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (16) es el intervalo $(1, +\infty)$.

**Transformaciones relacionadas con la supresión de los denominadores.** Sea dada la desigualdad

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}>g(x). \qquad (17)$$

Las desigualdades de este tipo se resuelven según el siguiente esquema:

1. *Se determina el CVA de la desigualdad.*

2. *Se divide el CVA en dos conjuntos $M_1$ y $M_2$ ($M_1$* es *toda la parte del CVA*, donde la función $y=\varphi(x)$ es positiva, $M_2$ es toda la parte del CVA, donde la función $y=\varphi(x)$ es negativa).

3. *Se resuelve en el conjunto $M_1$ la desigualdad $f(x)>g(x)\varphi(x)$, que es equivalente en dicho conjunto a la desigualdad* (17) (véase § 1, afirmación 7a).

4. *Se resuelve en el conjunto $M_2$ la desigualdad $f(x)<g(x)\varphi(x)$ que es equivalente en dicho conjunto a la desigualdad* (17) (véase § 1, afirmación 7b).

5. *Se reúnen los conjuntos de todas las soluciones determinados en* $M_1$ *y en* $M_2$, *y, de este modo, se obtiene el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad* (17).

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, la desigualdad

$$\frac{2-(\log_3 x)^2}{\log_3 x} < 1 - \log_3 x. \qquad (18)$$

El CVA de esta desigualdad es el conjunto $(0; 1) \cup (1, +\infty)$. Dividamos el CVA en dos conjuntos: $M_2 = (0; 1)$ y $M_1 = (1; +\infty)$. En el conjunto $M_1$ la función $y = \log_3 x$ es positiva y por eso (véase § 1, afirmación 7a) en dicho conjunto la desigualdad (18) es equivalente a la desigualdad

$$2 - (\log_3 x)^2 < \log_3 x\, (1 - \log_3 x),$$

la cual puede escribirse en la forma $\log_3 x > 2$. El conjunto de todas las soluciones de esta desigualdad elemental es el intervalo $(9, +\infty)$. Por cuanto este intervalo está contenido dentro del conjunto $M_1$, entonces el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (18) en $M_1$ será el intervalo $(9, +\infty)$. En el conjunto $M_2$ la función $y = \log_3 x$ es negativa y por eso (véase § 1, afirmación 7b) en dicho conjunto la desigualdad (18) es equivalente a la desigualdad

$$2 - (\log_3 x)^2 > \log_3 x\, (1 - \log_3 x),$$

la cual puede escribirse en la forma $\log_3 x < 2$. El conjunto de todas las soluciones de esta desigualdad elemental es el intervalo $(0; 9)$. En el conjunto $M_2$ está contenido, como parte de dicho intervalo, solamente el intervalo $(0, 1)$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (18) en $M_2$ será el intervalo $(0; 1)$.

Reuniendo los conjuntos de todas las soluciones, determinados en $M_1$ y en $M_2$, obtenemos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (18) es el conjunto $(0; 1) \cup (9; +\infty)$.

**Método de intervalos.** La resolución de la desigualdad

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} > g(x) \qquad (17)$$

en el caso en que $f(x)$, $g(x)$ y $\varphi(x)$ son polinomios, puede efectuarse de distinto modo, a saber, la desigualdad (17) se debe escribir primeramente en la forma equivalente

$$\frac{f(x) - \varphi(x)\, g(x)}{\varphi(x)} > 0. \qquad (19)$$

A continuación es preciso hacer uso de la afirmación 7 § 1, multiplicar la desigualdad (19) por $\varphi^2(x)$ y escribir la desigualdad

$$\varphi(x)\, [f(x) - \varphi(x)\, g(x)] > 0, \qquad (20)$$

equivalente a la desigualdad (19) en su CVA. Por fin, la desigualdad (20) se resuelve por el método de intervalos (§ 2, cap. III). El con-

junto de todas las soluciones de la desigualdad (20) será precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (17).

Sea dada la desigualdad

$$\frac{x^2-2x-1}{(x+1)} < x. \tag{21}$$

Trasladando $x$ al primer miembro de la desigualdad, escribamos esta desigualdad en la forma equivalente

$$\frac{-3x-1}{x+1} < 0.$$

Haciendo uso de la afirmación 7 § 1, obtenemos la desigualdad

$$-3(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right) < 0,$$

que es equivalente a la (21) en el CVA de ésta. Resolviendo esta desigualdad por el método de intervalos, obtenemos la respuesta: el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (21) es el conjunto $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

**Transformaciones relacionadas con la simplificación de una desigualdad por el factor común.** Sea dada la desigualdad

$$\varphi(x) f(x) > \varphi(x) g(x).$$

Muy a menudo esta desigualdad se sustituye por la desigualdad

$$f(x) > g(x),$$

es decir, la desigualdad de partida se simplifica por el factor común $\varphi(x)$. Es un gran error. Las desigualdades semejantes se deben resolver del modo siguiente:

1. *Se determina el CVA de la desigualdad* $\varphi(x) f(x) > \varphi(x) g(x)$.
2. *Se reescribe la desigualdad en la forma equivalente*

$$\varphi(x)[f(x) - g(x)] > 0.$$

3. *Se pasa al conjunto de dos sistemas de desigualdades*

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) - g(x) > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) - g(x) < 0, \end{cases}$$

*que es equivalente a la desigualdad* $\varphi(x) f(x) > \varphi(x) g(x)$ *en el CVA de ésta.*

4. *Se resuelve este conjunto en el CVA de la desigualdad de partida.*

El conjunto de todas las soluciones será precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad $\varphi(x) f(x) > \varphi(x) g(x)$.

Resolvamos, rigiéndonos por este método, la desigualdad

$$4x \log_5 x > (x^2+3) \log_5 x. \tag{22}$$

El CVA de esta desigualdad es el conjunto $M = (0, +\infty)$. Escribamos la desigualdad (22) en la forma equivalente

$$(4x - x^2 - 3) \log_5 x > 0$$

y resolvamos en el conjunto $M$ el conjunto de dos sistemas de desigualdades

$$\begin{cases} 4x - x^2 - 3 > 0, \\ \log_5 x > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x - x^2 - 3 < 0, \\ \log_5 x < 0. \end{cases}$$

El conjunto de todas las soluciones del primer sistema es el intervalo (1; 3), y el conjunto de todas las soluciones del segundo sistema, el intervalo (0; 1). Por cuanto ambos intervalos, (1; 3) y (0; 1), están contenidos dentro del CVA de la desigualdad de partida, resulta que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (22) es el conjunto $(0;\ 1) \cup (1;\ 3)$.

**Transformaciones relacionadas con la logaritmación de una desigualdad.** Sea $a$ un número positivo fijo distinto de la unidad.

Supongamos dada la desigualdad

$$f(x) < g(x). \tag{23}$$

La sustitución de esta desigualdad por la desigualdad

$$\log_a f(x) < \log_a g(x). \tag{24}$$

o por la desigualdad

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \tag{25}$$

se denomina *logaritmación de la desigualdad.*

Basándonos en la afirmación 6 § 1, podemos decir que para $a > 1$ las desigualdades (23) y (24) y, cuando $0 < a < 1$, también las desigualdades (23) y (25) son equivalentes sólo en el conjunto, donde ambas funciones, $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son simultáneamente positivas. Por eso, al aplicar la logaritmación, las desigualdades se resuelven, de ordinario, según el siguiente esquema:

1. *Se determina el CVA de la desigualdad.*

2. *Se divide el CVA en dos conjuntos:* $M_1$ *y* $M_2$ ($M_1$ es toda la parte del CVA, donde ambos miembros de la desigualdad dada son positivos), $M_2$ es toda la parte del CVA que queda después de separar el conjunto $M_1$).

3. *Se resuelve la desigualdad en* $M_1$ (teniendo presente que la logaritmación es una transformación equivalente en este conjunto).

4. *Se resuelve la desigualdad en* $M_2$.

5. *Se reúnen los conjuntos de soluciones, encontrados en* $M_1$ *y* $M_2$, *y, de este modo, se obtiene el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida.*

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema unas cuantas desigualdades.

Sea dada la desigualdad

$$3^{x^2-x} < 2^{1-(\sqrt{x})^2}. \tag{26}$$

El CVA de esta desigualdad es el conjunto $M = [0, +\infty)$. Por cuanto ambos miembros de la desigualdad (26) son positivos en el conjunto $M$, entonces, en virtud de la afirmación 6a, § 1, la desigualdad (26) es equivalente en $M$, a la desigualdad

$$\log_3 (3^{x^2-x}) < \log_3 (2^{1-x}),$$

la cual es, a su vez, equivalente en $M$ a la desigualdad

$$x^2 - x < (1 - x) \log_3 2.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última desigualdad es el intervalo $(-\log_3 2; 1)$. En el conjunto $M$ está contenido, como parte del intervalo indicado, sólo un trozo $[0; 1)$. Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (26) será el intervalo $[0; 1)$.

Sea dada la desigualdad

$$(x^2 + x + 1)^x < 1. \tag{27}$$

El CVA de la desigualdad (27) es toda la recta numérica, puesto que el trinomio de segundo grado $x^2 + x + 1$ es positivo para cualquier $x$ real.

Logaritmando la desigualdad (27) según una base cualquiera, por ejemplo, según la base 10, tenemos, en virtud de la afirmación 6a, § 1, que la desigualdad (27) es equivalente a la desigualdad

$$\lg (x^2 + x + 1)^x < \lg 1.$$

Haciendo uso de las propiedades de los logaritmos, escribamos esta desigualdad en la forma

$$x \lg (x^2 + x + 1) < 0.$$

Esta desigualdad es equivalente al conjunto de dos sistemas de desigualdades:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \lg (x^2 + x + 1) < 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ \lg (x^2 + x + 1) > 0, \end{cases}$$

la cual es equivalente, a su vez, al siguiente conjunto de dos sistemas de desigualdades

$$\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x + 1 < 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x + 1 > 1. \end{cases}$$

Resolviendo al principio el primer sistema, llegamos a la conclusión de que el sistema no tiene soluciones, puesto que el conjunto de todas sus soluciones es la intersección de dos conjuntos: $(0, +\infty)$, que es el conjunto de todas las soluciones de la primera desigualdad, y

$(-1; 0)$, que es el conjunto de todas las soluciones de la segunda desigualdad, y la intersección mencionada es vacía.

El conjunto de todas las soluciones del segundo sistema es el intervalo $(-\infty, -1)$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (27) es el intervalo $(-\infty, -1)$.

Señalemos que de modo análogo se resuelven las desigualdades de forma más general

$$[f(x)]^{\varphi(x)} < b, \tag{28}$$

donde $b$ es un número positivo dado. A saber, se busca al principio el CVA de la desigualdad y luego se elige cualquier número $a > 1$. Entonces, la desigualdad (28) será equivalente en el CVA a la desigualdad

$$\varphi(x) \log_a f(x) < \log_a b.$$

Luego queda resolver la última desigualdad en el CVA de la desigualdad de partida (28).

Indiquemos, además, que la desigualdad exponencial elemental $a^x > b$ puede ser sustituida, logaritmando las desigualdades, por una desigualdad algebraica equivalente de primera potencia:

1) por la desigualdad $x > \log_a b$, cuando $a > 1$,

2) por la desigualdad $x < \log_a b$, cuando $0 < a < 1$, para las cuales se escriben con facilidad los conjuntos de todas sus soluciones. Análogamente puede procederse también con la desigualdad $a^x < b$.

*Transformaciones relacionadas con la potenciación de las desigualdades.* Sea $a$ un número positivo fijo distinto de la unidad.

Supongamos que está dada la desigualdad

$$\log_a f(x) < \log_a g(x). \tag{29}$$

La sustitución de esta desigualdad por la desigualdad

$$f(x) < g(x)$$

o por la desigualdad

$$f(x) > g(x)$$

se denomina *potenciación de la desigualdad.*

Tomando en consideración las afirmaciones 6a y 6b del § 1, las desigualdades del tipo (29) se resuelven, por regla general, según el siguiente **esquema:**

1. *Se determina el CVA de la desigualdad.*

2. *Se resuelve la desigualdad en el CVA* (teniendo presente que la potenciación es una transformación equivalente en este conjunto).

Resolvamos, rigiéndonos por este esquema, la desigualdad

$$\log_{\frac{1}{2}} (x^2-4) > \log_{\frac{1}{2}} (4x-7). \tag{30}$$

El CVA de esta desigualdad se determina por las condiciones:

$$\begin{cases} 4x-7 > 0, \\ x^2-4 > 0, \end{cases}$$

es decir, para determinar el CVA se debe resolver este sistema de desigualdades. Al resolverlo llegamos a que el CVA es el intervalo (2, $+\infty$). Teniendo en cuenta la afirmación 6b, resulta que en el CVA la desigualdad (30) es equivalente a la desigualdad

$$x^2 - 4 < 4x - 7.$$

Resolviendo esta desigualdad cuadrática, encontramos el conjunto de todas sus soluciones, es decir, el intervalo (1; 3). En el CVA de la desigualdad (30) está contenido, como parte del intervalo mencionado, sólo el intervalo (2; 3). Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (30) será el intervalo (2; 3).

Veamos algunos casos particulares de potenciación de las desigualdades.

Es fácil ver la validez de las siguientes **afirmaciones**:

1. *Sea $a$ un número fijo tal, que $a > 1$, entonces la desigualdad* $\log_a f(x) > b$ *será equivalente a la desigualdad* $f(x) > a^b$, *y la desigualdad* $\log_a f(x) < b$, *equivalente al sistema de desigualdades*

$$\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

*o bien, lo que es lo mismo, a la desigualdad doble* $0 < f(x) < a^b$.

2. *Sea $a$ un número fijo tal, que* $0 < a < 1$, *entonces la desigualdad* $\log_a f(x) < b$ *será equivalente a la desigualdad* $f(x) > a^b$, *y la desigualdad* $\log_a f(x) > b$, *equivalente al sistema de desigualdades*

$$\begin{cases} f(x) < a^b, \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

*o bien, lo que es lo mismo, a la desigualdad doble* $0 < f(x) < a^b$.

Examinemos algunos **ejemplos**.

Sea dada la desigualdad

$$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 3x + 5) < -1.$$

En virtud de la afirmación que acabamos de aducir, esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$x^2 - 3x + 5 > \left(\frac{1}{3}\right)^{-1},$$

la cual es, a su vez, equivalente a la desigualdad

$$x^2 - 3x + 2 > 0.$$

El conjunto de todas las soluciones de la última desigualdad y, por lo tanto, también de la desigualdad de partida es el conjunto $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Sea dada la desigualdad

$$\log_2 \operatorname{sen} x < -\frac{1}{2}.$$

En virtud de la afirmación que acabamos de aducir, esta desigualdad es equivalente al sistema de desigualdades

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x > 0, \\ \operatorname{sen} x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

o bien, lo que es lo mismo, a la desigualdad doble

$$0 < \operatorname{sen} x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

El conjunto de todas las soluciones de esta desigualdad doble (fig.

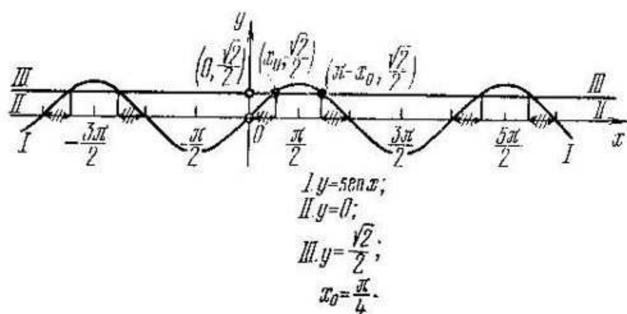



Fig. 183

183) y, por lo tanto, también de la desigualdad de partida, serán dos series de intervalos

$$X_k = \left(2\pi k,\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right), \quad k \in Z;$$

$$X_m = \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ \pi + 2\pi m\right) \quad m \in Z.$$

Observemos que la potenciación de las desigualdades se aplica frecuentemente en situaciones mucho más complejas en comparación con las analizadas anteriormente.

Sea dada la desigualdad

$$\log_{x^2}(2 + x) < 1. \tag{31}$$

El CVA de esta desigualdad se define por las condiciones

$$\begin{cases} 2 + x > 0, \\ x^2 > 0, \\ x^2 \neq 1. \end{cases}$$

es decir, para determinar el CVA se debe resolver este sistema de desigualdades. Al resolverlo, encontramos que el CVA es el conjunto $M = (-2;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. Dividamos el

CVA en dos conjuntos: $M_1 = (-2; -1) \cup (1, +\infty)$ y $M_2 = (-1; 0) \cup (0; 1)$.

En el conjunto $M_1$ tenemos $x^2 > 1$, por lo cual la desigualdad (31) en dicho conjunto es equivalente, según la afirmación 6a del § 1, a la desigualdad

$$2 + x < x^2.$$

Al resolver esta desigualdad cuadrática, vemos que el conjunto de todas sus soluciones es el conjunto $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$. En $M_1$ está contenido, como parte del conjunto mencionado, solamente el conjunto $(-2; -1) \cup (2, +\infty)$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (31) en $M_1$ es $(-2; -1) \cup (2; +\infty)$.

En el conjunto $M_2$ tenemos $0 < x^2 < 1$, por lo cual la desigualdad (31) en $M_2$ es equivalente, según la afirmación 6b del § 1, a la desigualdad

$$2 + x > x^2.$$

Al resolver esta desigualdad cuadrática, vemos que el conjunto de todas sus soluciones es el intervalo $(-1; 2)$. En $M_2$ está contenido, como parte del intervalo citado, solamente el conjunto $(-1; 0) \cup (0; 1)$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (31) en $M_2$ es el conjunto $(-1; 0) \cup (0; 1)$.

Al reunir los conjuntos de soluciones encontradas en $M_1$ y en $M_2$, vemos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida (31) es el conjunto $(-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (2; +\infty)$.

De modo análogo se resuelve también la desigualdad del tipo

$$\log_{\varphi(x)} g(x) < b, \tag{32}$$

donde $b$ es un número dado. A saber, primeramente se busca el CVA de la desigualdad. Luego el CVA se divide en dos conjuntos: $M_1$ (toda la parte del CVA, donde $\varphi(x) > 1$) y $M_2$ (toda la parte del CVA, donde $0 < \varphi(x) < 1$. Entonces, la desigualdad (32) en el conjunto $M_1$ será equivalente a la desigualdad

$$g(x) < [\varphi(x)]^b, \tag{33}$$

y en el conjunto $M_2$ la desigualdad (23) es equivalente a la desigualdad

$$g(x) > [\varphi(x)]^b. \tag{34}$$

Resta resolver las desigualdades (33) y (34) en los conjuntos correspondientes y reunir las soluciones obtenidas. Observemos que, recurriendo a la potenciación de desigualdades, la desigualdad logarítmica elemental $\log_a x > b$ puede sustituirse, cuando $a > 1$, por la desigualdad algebraica equivalente de primera potencia $x > a^b$, y, cuando $0 < a < 1$, por una igualdad equivalente doble $0 < x < a^b$, para las cuales se escriben con facilidad los conjuntos de todas sus soluciones.

De modo semejante podemos proceder también con desigualdad $\log_a x < b$.

**Transformaciones relacionadas con la supresión del signo del valor absoluto.** Sea dada la desigualdad

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \ldots + |f_m(x)| - |f_{m+1}(x)| - \ldots$$
$$\ldots - |f_n(x)| > g(x), \qquad (35)$$

donde $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, $g(x)$ son polinomios enteros con relación a $x$.

Para resolver desigualdades de este tipo se emplea, de ordinario, el *método de intervalos*. La descripción de este método para las desigualdades es prácticamente la misma que para las ecuaciones (véase el § 4, cap. VII), a saber, sea dada la desigualdad (35). Al principio *se resuelve el conjunto de ecuaciones*

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad \ldots, f_m(x) = 0, \quad \ldots, f_n(x) = 0. \quad (36)$$

Luego *se fijan en la recta numétrica todas las raíces* de este conjunto de ecuaciones.

De este modo, *toda la recta numérica se divide en* cierto *número de intervalos*, a continuación, *en cada uno de los ivtervalos obtenidos la desigualdad se sustituye por alguna otra* que no contenga signos del valor absoluto y *que sea equivalente en el intervalo dado a la desigualdad de partida*. En cada intervalo se buscan todas las soluciones de la desigualdad que se obtiene en el intervalo que se considera, después de lo cual entre las soluciones halladas se eligen aquellas que caen dentro del intervalo mencionado. Estas soluciones constituirán precisamente el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida en el intervalo considerado. Por fín, para poder escribir el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad de partida, se reúnen juntas todas sus soluciones encontradas en todos los intervalos.

Ilustremos la aplicación del método de intervalos con el ejemplo de resolución de la desigualdad

$$x^2 + |x + 1| - 3 > 0. \qquad (37)$$

En este caso el conjunto de ecuaciones (36) consta de una sola ecuación

$$x + 1 = 0$$

cuya única raíz es $x_1 = -1$. Quiere decir, la recta numérica se divide en dos intervalos: $(-\infty; -1)$ y $[-1; +\infty)$. Veamos cómo se resuelve la desigualdad (37) en cada uno de los intervalos obtenidos.

1. En el intervalo $(-\infty; -1)$ tenemos, por definición de valor absoluto, que

$$|x + 1| = -(x + 1).$$

Por eso en este intervalo la desigualdad (37) es equivalente a la desigualdad

$$x^2 - (x + 1) - 3 > 0.$$

Resolviendo esta desigualdad cuadrática, llegamos a que el conjunto de todas sus soluciones es el conjunto $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$. En el intervalo que se analiza está contenido, como parte del conjunto citado, solamente el intervalo $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (37) en el intervalo $(-\infty; -1)$ es el intervalo $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$.

2. En el intervalo $[-1; +\infty)$ tenemos, por definición de valor absoluto,

$$|x + 1| = (x + 1).$$

Por eso en el intervalo dado la desigualdad (37) es equivalente a la desigualdad

$$x^2 + (x + 1) - 3 > 0.$$

Resolviendo esta desigualdad cuadrática, vemos que el conjunto de todas sus soluciones es un conjunto $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. En el intervalo considerado está contenido, como parte del conjunto mencionado, solamente el trozo $(1; +\infty)$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (37) en el intervalo $[-1; +\infty)$ será representado por el trozo $(1; +\infty)$.

Al reunir los conjuntos de soluciones encontradas en los intervalos analizados, vemos que el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad (37) es el conjunto $\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (1 + \infty)$.

Indiquemos, como conclusión, que se han considerado más arriba no todas las transformaciones de las desigualdades, sino sólo aquellas que se emplean con mayor frecuencia. Además, *al resolver una desigualdad, nos vemos obligados a aplicar frecuentemente varias transformaciones y no una sola.*

Ilustremos esto con dos ejemplos.

Sea dada la desigualdad

$$4^{\sqrt{9-x^2}} - 6 \cdot 2^{\sqrt{9-x^2}} + 8 < 0. \qquad (38)$$

Esta desigualdad es cuadrática con relación a $2^{\sqrt{9-x^2}}$. Al resolver la desigualdad

$$t^2 - 6t + 8 < 0,$$

obtenemos que el conjunto de todas sus soluciones es el intervalo $(2; 4)$. Por consiguiente, la desigualdad (38) es equivalente al siste-

ma de desigualdades

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{9-x^2}} < 4, \\ 2^{\sqrt{9-x^2}} > 2. \end{cases} \qquad (39)$$

Resolvamos al principio la primera desigualdad de este sistema

$$2^{\sqrt{9-x^2}} < 4. \qquad (40)$$

El CVA de esta desigualdad es el conjunto $M = [-3; 3]$. En este conjunto ambos miembros de la desigualdad (40) son positivos, por lo cual, logaritmando la desigualdad (40) según la base 2, obtendremos la desigualdad

$$\sqrt{9-x^2} < 2, \qquad (41)$$

que es equivalente a la desigualdad (40) en el conjunto $M$. En el conjunto $M$ ambos miembros de la desigualdad (41) son no negativos, por lo cual, elevando al cuadrado dicha desigualdad, obtendremos la desigualdad

$$9 - x^2 < 4,$$

que es equivalente a la desigualdad (41) en el conjunto $M$. Resolviendo esta desigualdad elemental, obtenemos que el conjunto de todas sus soluciones es el conjunto $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$. En $M$ está contenido, como parte del conjunto citado, solamente el conjunto $[-3; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; 3]$. Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones de la desigualdad(40) es el conjunto $[-3; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; 3]$.

Resolviendo análogamente la segunda desigualdad del sistema (39), recibimos que el conjunto de todas sus soluciones es el intervalo $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$. Por consiguiente, el conjunto de todas las soluciones del sistema (39) y, por tanto, de la desigualdad (38), equivalente al sistema, es el conjunto $(-2\sqrt{2}; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \sqrt{22})$.

Sea dada la desigualdad

$$\operatorname{tg} \frac{1}{1+x^2} > 1. \qquad (42)$$

La función $y = \operatorname{tg} \frac{1}{1+x^2}$ es la superposición de dos funciones: la función elemental más simple $y = \operatorname{tg} v$ y la función $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Resolvamos primero la desigualdad elemental

$$\operatorname{tg} v > 1.$$

El conjunto de todas las soluciones de esta desigualdad (fig. 184) es una serie de intervalos $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Quiere decir, la desigualdad de partida (42) es equivalente al conjunto infinito de sistemas de desigualdades

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ \dfrac{1}{1+x^2} > \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \end{cases} \qquad (43)$$

donde $k$ es un número entero cualquiera. (La transformación realizada de la desigualdad es un ejemplo de transformación que no se ha analizado antes).

Examinemos todos los sistemas en el conjunto infinito (43).

Cualquiera que sea $k$ positivo, ninguno de estos sistemas tiene solución, puesto que $\frac{\pi}{4} + \pi k > 1$ para cualquier $k$ natural, y

Fig. 184

$\frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ para cualquier $x$ real, a consecuencia de lo cual la segunda desigualdad en el sistema (43) no tiene soluciones.

Siendo $k$ negativo, ninguno de los sistemas tiene solución, puesto que $\frac{1}{1+x^2} > 0$ para todo $x$ real, y $\frac{\pi}{2} + \pi k < 0$ para cualquier $k$ entero y negativo, a consecuencia de lo cual la primera desigualdad del sistema (43) no tiene soluciones.

Cuando $k = 0$, tenemos el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{1+x^2} > \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \qquad (44)$$

Por cuanto $\frac{1}{1+x^2} \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$ para cualquier $x$ real, el conjunto de todas las soluciones de la primera desigualdad de este sistema es toda la recta numérica. Para todos los $x$ reales la función $y = 1 + x^2$ es positiva, por lo cual, suprimiendo el denominador, obtenemos la desigualdad

$$1 + x^2 < \frac{4}{\pi},$$

que es equivalente a la segunda desigualdad del sistema (44). El conjunto de todas las soluciones de esta desigualdad elemental está representado por el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{4}{\pi}-1},\ \sqrt{\frac{4}{\pi}-1}\right)$. Quiere decir, el conjunto de todas las soluciones del sistema (44) es precisamente este intervalo.

Al resumir, concluimos que el conjunto de todos las soluciones de la desigualdad de partida (42) es el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{(4-\pi)\pi}}{\pi},\ \frac{\sqrt{(4-\pi)\pi}}{\pi}\right)$.

### *Ejercicios*

¿Será el número (—4) la solución de las siguientes desigualdades (1 . . . 48):

1. $\frac{x(2x+1)(x-5)}{(x+3)(3x-4)} < 0$; 2. $\frac{(x-1)^2(-x-5)(3+x)^3}{(x+2)(-x^2+x-3)} > 0$;

3. $\frac{x^4+3x^3+3x^2+3x+2}{x^3+6x^2+5x-12} \leqslant 0$; 4. $\frac{(5x^2-8x-13)^3(x-2)^2(1-x)}{(-3x^2+5x-2x)(x+3)^3(x-2)^4} \geqslant 0$;

5. $\frac{x-2}{3x-1} \leqslant \frac{x+2}{2x+1}$; 6. $\frac{(x-2)(x-7)}{(x-6)(x-5)} \geqslant 1$;

7. $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} > \frac{8}{x^2-1}$; 8. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} < \frac{3}{x+1}$;

9. $|9-2x| \geqslant |4-3x| + |x-5|$; 10. $|x+1| + |2-x| - |x+3| \geqslant 4$.

11. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| < 1$; 12. $\frac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|} > 1$;

13. $\sqrt{x+5} > x+1$; 14. $x-6 < \sqrt{x^2-7x+8}$;

15. $\sqrt{6-5x-x^2} \geqslant x+2$; 16. $\sqrt{7-x} - \sqrt{-3-2x} \leqslant \sqrt{2-x}$;

17. $\sqrt{25-x^2} > 3 - \sqrt{x^2+7x}$; 18. $\sqrt{-1-x} - \sqrt{\frac{-1}{x+1}} < \sqrt{2-x}$;

19. $\frac{(6+x)\sqrt{x+6}+(7-x)\sqrt{7-x}}{(6+x)\sqrt{7-x}+(7-x)\sqrt{x+6}} \leqslant \frac{7}{6}$;

20. $\sqrt[3]{5(x+8)+7\sqrt{2(8+x)}} + \sqrt[3]{5(x+8)-7\sqrt{2(x+8)}} \geqslant 4$;

21. $4^{x-1} \geqslant 17 \cdot 2^{x-3} - 1$; 22. $\left(\frac{1}{2}\right)(x^6-2x^3+1)^{1/2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$;

23. $|x+1|^{x^2-5x/2+3/2} > 1$; 24. $\frac{1}{5-\left(\frac{1}{3}\right)^x} + \frac{2}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^x} \leqslant 1$;

25. $3\cdot 4^{-x}+\frac{1}{3}\cdot 9^{2-x}>6\cdot 4^{1-x}-\frac{1}{2}\,9^{1-x}$;

26. $(4^x-1)^2+2^{x+1}(4^x-1)<8\cdot 4^x$.

27. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3/x}-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1/2}$;

28. $x^2\cdot 2^{\sqrt{-x}}-x+2>2^{1+\sqrt{-x}}+x^2-x\cdot 2^{\sqrt{-x}}$;

29. $\lg 2+\lg(4^{-x-1}+9)\geqslant 1+\lg(2^{-x-1}+1)$;

30. $\lg(x^2-1)\leqslant\lg(x-1)^2+\lg|x-2|$;

31. $(-x)^{\lg^2(-x)+3\lg(-x)+3}>\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}+1}}$;

32. $\log_{1/3}\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>\log_3\log_{1/5}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

33. $\log_2\log_3\frac{x-1}{x+1}<\log_{1/2}\log_{1/3}\frac{x+1}{x-1}$;

34. $\dfrac{\log_4^2(-x)-4\log_4(-x)+3}{\log_4^2(-x)+\log_4(-x)}\geqslant 0$;

35. $\dfrac{2\log_{-x}3}{1+\log_{-x}3}\leqslant 1-\dfrac{1}{2-\log_3(-x)}$;

36. $\lg\sqrt{(x+1)^2}<\sqrt{2\lg(-x-1)}$;

37. $3\operatorname{sen}2x-1>\operatorname{sen}x+\cos x$; 38. $|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|<4\sqrt{3}$;

39. $4(x^3-2x+1)(\operatorname{sen}x+2\cos x)\geqslant 9|x^3-2x+1|$;

40. $\sqrt{2-\sqrt{3}\cos x+\operatorname{sen}x}\geqslant 1$; 41. $\dfrac{2+\sqrt{2}-4\cos 2x}{\operatorname{sen}x-\cos 2x}\geqslant 2$;

42. $4\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}3x<\operatorname{sen}4x$;

43. $\sqrt{3+2\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}^{-2}x}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{tg}x$;

44. $\cos x\cdot\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)+\operatorname{sen}x\cdot\cos(\operatorname{sen}x)>0$;

45. $\arccos\frac{4}{1-x}<\frac{\pi}{2}$; 46. $\operatorname{arcsen}\frac{3}{x^2+3x}>\frac{\pi}{4}$;

47. $\operatorname{arctg}^2x-4\operatorname{arctg}x+3\geqslant 0$; 48. $5\operatorname{arcctg}x-\operatorname{arcctg}^2x-4\leqslant 0$?

¿Será el número $\frac{3}{2}$ la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones (49 ... 50):

49. $\begin{cases}6x^2-29x+30\leqslant 0,\\ 5x+2>3x^2;\end{cases}$ 50. $\begin{cases}\frac{x}{3}-3\left(5x-\frac{3(x-5)}{4}\right)<x+3\frac{19}{24},\\ ||x|-2|\leqslant 1;\end{cases}$

51. $\begin{cases}5x\leqslant 4+x^2,\\ \frac{3x+1}{1-2x}<-2;\end{cases}$ 52. $\begin{cases}x+1>\sqrt{4x-3},\\ \sqrt{4+x}-4<\sqrt{x+6};\end{cases}$

53. $\begin{cases}3\sqrt{x+6-x^2}>2-4x,\\ \sqrt{16-x^2}>2-\sqrt{7x-x^2};\end{cases}$

54. $\begin{cases}\sqrt{3x+1}+\sqrt{16x-3x^2}\geqslant 0,\\ \sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}\leqslant\sqrt{6};\end{cases}$

55. $\begin{cases} |x^3-1| \leqslant |1-x|, \\ \dfrac{1}{3^{x+1}-1} \geqslant \dfrac{1}{1-3^x}, \\ \log_2(9-2^x) > 3-x; \end{cases}$

56. $\begin{cases} \dfrac{1}{2^x+3} > \dfrac{1}{2^{x+3}+1}, \\ |x+1|-x \geqslant 2|x-1|, \\ \log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > \log_{4x} 2; \end{cases}$ 57. $\begin{cases} |x^2-3x+2|-4 \leqslant |x|-x^2, \\ 9^x \leqslant 3^x+2; \\ \log_{25x} x^3 + \log_{x/\sqrt{5}} \sqrt{5} < 2; \end{cases}$

58. $\begin{cases} x+4 \geqslant \sqrt{x+16}, \\ x^2+|x-5| \leqslant |x^2-4x+3|, \\ \log_{3x} \dfrac{3}{x} + \log_3^2 x < 1; \end{cases}$

59. $\begin{cases} \dfrac{1}{\log_x 3} + 4 > \dfrac{16}{\log_3 x - 2}, \\ \sqrt{6x+1} + \sqrt{4x+2} \geqslant \sqrt{8x} + \sqrt{2x+3}, \\ 1 < \log_x \dfrac{4x-2}{3}, \\ \dfrac{9}{|x-5|-3} \geqslant |x-2|? \end{cases}$

¿Serán equivalentes las siguientes dos desigualdades (60 ... 104):

60. $\dfrac{x(x+2)}{x+2} < 0$ y $x < 0$; 61. $\dfrac{x(x+3)}{(x+3)} > 0$ y $x > 0$;

62. $\dfrac{x^3}{x} < 0$ y $x < 0$; 63. $\dfrac{x^2}{x} \leqslant 0$ y $x \leqslant 0$;

64. $x+2 > 4$ y $x+2+\dfrac{1}{x+4} > 4+\dfrac{1}{x+4}$;

65. $x+2 > 4$ y $x+2+\dfrac{1}{x-10} > 4+\dfrac{1}{x-10}$;

66. $3x-1 < 2x+3$ y $(3x-1)(x+1) < (2x+3)(x+1)$;

67. $3x-1 < 2x+3$ y $(3x-1)(x+1) > (2x+3)(x+1)$;

68. $x^2+1 > x$ y $(x^2+1)(|x|+2) > x(|x|+2)$;

69. $x^2+1 > x$ y $(x^2+1)(\sqrt{x}+1) > x(\sqrt{x}+2)$;

70. $\dfrac{x-4}{x-3} > 2$ y $\dfrac{x-4-2(x-3)}{x-3} > 0$;

71. $\dfrac{x+4}{x+3} > 3$ y $x+4 > 3(x+3)$;

72. $\dfrac{x+4}{x+3} > 3$ y $x+4 < 3(x+3)$;

73. $\dfrac{x+4}{x-1} > 0$ y $(x+4)(x-1) > 0$;

74. $\dfrac{x+4}{x-1} \geqslant 0$ y $(x+4)(x-1) \geqslant 0$;

75. $\dfrac{(x-2)(x+3)^2}{x+5} < 0$ y $\dfrac{x-2}{x+5} < 0$;

76. $\dfrac{(x-2)(x-3)^2}{x+5} < 0$ y $\dfrac{x-2}{x+5} < 0$;

77. $\frac{\sqrt{x^2+5}\,(x+1)}{x+2}>0$ y $\frac{x+1}{x+2}>0$;

78. $\frac{\sqrt{9-x^2}\,(x+1)}{x+2}>0$ y $\frac{x+1}{x+2}>0$;

79. $\frac{(x+5)(3x^2+x+2)}{(x+3)}>0$ y $\frac{x+5}{x+3}>0$;

80. $\frac{(x+5)(2x+4-x^2)}{x+3}>0$ y $\frac{x+5}{x+3}>0$;

81. $\sqrt{x^2-14}\,(x^2+x-2)\geqslant 0$ y $x^2+x-2\geqslant 0$;

82. $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(2-x)}{x+3}<0$ y $\frac{2-x}{x+3}<0$;

83. $\frac{(x+8)^2(2-x)}{x+3}<0$ y $\frac{2-x}{x+3}<0$;

84. $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2(2-x)}{x+3}\leqslant 0$ y $\frac{2-x}{x+3}\leqslant 0$;

85. $\frac{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+4}}{x+1}>0$ y $\frac{\sqrt{(x-1)(x+4)}}{x+1}>0$;

86. $\frac{\sqrt{x-1}\,\sqrt{x+4}}{x+1}\geqslant 0$ y $\frac{\sqrt{(x-1)(x+4)}}{x+1}\geqslant 0$;

87. $\sqrt{x-12}\,\sqrt{4-x}>0$ y $\sqrt{(x-12)(4-x)}>0$;

88. $\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-3}>0$ y $\sqrt{(x+2)(x-3)}>0$;

89. $\sqrt{100-x^2}\,\sqrt{\operatorname{sen} x}\geqslant 0$ y $\sqrt{(100-x^2)\operatorname{sen} x}\geqslant 0$;

90. $\frac{1}{3x^2}>\frac{1}{(x+2)^2}$ y $(x+2)^2>3x^2$;

91. $\sqrt{x}<3$ y $x<9$;

92. $\sqrt{x^2+1}<3$ y $x^2+1<9$;

93. $(2+\operatorname{sen} x)^{\frac{x-1}{x+6}}<1$ y $\frac{x-1}{x+6}<0$;

94. $(2+\operatorname{sen} x)^{\frac{x-1}{x+6}}\leqslant 1$ y $\frac{x-1}{x+6}\leqslant 0$;

95. $(2+|\operatorname{sen} x|)^{\frac{x-1}{x+6}}<1$ y $\frac{x-1}{x+6}\leqslant 0$;

96. $\left(\frac{4}{4+x^2}\right)^{x^2-9}\geqslant 1$ y $x^2-9\leqslant 0$;

97. $\left(\frac{4}{4+|x-4|}\right)^{x^2-9}\geqslant 1$ y $x^2-9\leqslant 0$;

98. $(1+x^2)^{\frac{x+4}{x-1}}<1$ y $\frac{x+4}{x-1}<0$;

99. $(1+x^2)^{\frac{x+4}{x+2}}<1$ y $\frac{x+4}{x+2}<0$;

100. $\log_2 x^2>0$ y $2\log_2 x>0$;

101. $\log_2 x^2 > 0$ y $2\log_2(-x) > 0$;

102. $\log_2 x^2 > 0$ y $2\log_2 |x| > 0$;

103. $\frac{\log_2(x+7)+\log_2(x-8)}{\sqrt{x+1}} > 0$ y $\frac{\log_2(x+7)(x-8)}{\sqrt{x+1}} > 0$;

104. $\frac{\log_2(x+7)+\log_2(x-8)}{x+1} > 0$ y $\frac{\log_2(x+7)(x-8)}{x+1} > 0$?

¿Serán equivalentes la desigualdad y el sistema de desigualdades (105 ... ... 149):

105. $\frac{x(x+2)}{x+2} < 0$ y $\begin{cases} x \neq -2, \\ x < 0; \end{cases}$

106. $2x + \frac{1}{x-6} > x + 4 + \frac{1}{x-6}$ y $\begin{cases} x \neq 6, \\ 2x > x+4; \end{cases}$

107. $(3x-1)(x+1) < (2x+3)(x+1)$ y $\begin{cases} x+1 > 0, \\ (3x-1) < 2x+3; \end{cases}$

108. $(3x-1)(x+1) < (2x+3)(x+1)$ y $\begin{cases} x+1 < 0, \\ (3x-1) > (2x+3); \end{cases}$

109. $(x^2+1)(\sqrt{x}+3) > x(\sqrt{x}+3)$ y $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x^2+1 > x; \end{cases}$

110. $\frac{x+4}{x+3} > 3$ y $\begin{cases} x+3 > 0, \\ (x+4) > 3(x+3); \end{cases}$

111. $\frac{x+4}{x+3} > 3$ y $\begin{cases} x+3 < 0, \\ x+4 < 3(x+3); \end{cases}$

112. $\frac{x+2}{x-2} \leqslant 0$ y $\begin{cases} x \neq 2, \\ (x+2)(x-2) \leqslant 0; \end{cases}$

113. $\frac{(x-2)(x+2)^2}{x+5} < 0$ y $\begin{cases} x \neq -2, \\ \frac{x-2}{x+5} < 0; \end{cases}$

114. $\frac{\sqrt{9-x^2}(x+1)}{x+2} > 0$ y $\begin{cases} 9-x^2 > 0 \\ \frac{x+1}{x+2} > 0; \end{cases}$

115. $\frac{|x+14|(x-6)}{x+5} > 0$ y $\begin{cases} x+14 \neq 0, \\ \frac{x-6}{x+5} > 0; \end{cases}$

116. $\sqrt{x+2}\sqrt{x-3} > 0$ y $\begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{(x+2)(x-3)} > 0; \end{cases}$

117. $\frac{1}{x-2} > \frac{1}{2x^2}$ y $\begin{cases} x-2 > 0 \\ 2x^2 > x-2; \end{cases}$

118. $\frac{1}{x-2} > \frac{1}{2x^2}$ y $\begin{cases} x \neq 0, \\ x-2 < 0, \\ 2x^2 < x-2; \end{cases}$

119. $\frac{1}{3x^2} > \frac{1}{(x+2)^2}$ y $\begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq -2, \\ (x+2)^2 > 3x^2; \end{cases}$

120. $\sqrt{x} < 3$ y $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < 9; \end{cases}$

121. $\frac{|x+5|(x-7)}{x+1} > 0$ y $\begin{cases} x+5 \neq 0, \\ \frac{x-7}{x+1} > 0; \end{cases}$

122. $\dfrac{\sqrt{x+1}\,\sqrt{6-x}}{x-1}>0$ y $\begin{cases} x+1>0, \\ 6-x>0, \\ x-1>0; \end{cases}$

123. $\dfrac{\sqrt{x+2}\,\sqrt{5-x}}{(x-2)^2}>0$ y $\begin{cases} x+2>0, \\ 5-x<0, \\ x-2\neq 0; \end{cases}$

124. $\dfrac{\sqrt{25-x^2}\,(x+4)^3}{\sqrt{x^2-1}\,(x-2)^2}>0$ y $\begin{cases} 25-x^2\geqslant 0, \\ x^2-1>0 \\ x-2\neq 0; \end{cases}$

125. $(x^2+1)^{\frac{x+5}{x-4}}<1$ y $\begin{cases} \dfrac{x+5}{x-4}<0, \\ x\neq 0; \end{cases}$

126. $(1+\cos^2 x)^{\frac{x-2}{x+3}}>1$ y $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+3}>0 \\ \cos x\neq 0; \end{cases}$

127. $(1+\cos^2 x)^{\frac{x-2}{x+3}}\geqslant 1$ y $\begin{cases} \cos x\neq 0, \\ \dfrac{x-2}{x+3}\geqslant 0; \end{cases}$

128. $(2+\operatorname{sen} x)^{\frac{x-7}{x+10}}\leqslant 1$ y $\begin{cases} \operatorname{sen} x\neq -1, \\ \dfrac{x-7}{x+10}\leqslant 0; \end{cases}$

129. $\left(\dfrac{3}{3+x^2}\right)^{x^2-9}\geqslant 1$ y $\begin{cases} x\neq 0 \\ x^2-9\leqslant 0; \end{cases}$

130. $\left(\dfrac{3}{3+|x+2|}\right)^{x^2-1}\leqslant 1$ y $\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ x+2\neq 0; \end{cases}$

131. $\left(\dfrac{1}{1+|x|}\right)^{\frac{x+4}{x-1}}>1$ y $\begin{cases} x\neq 0, \\ \dfrac{x+4}{x-1}<0; \end{cases}$

132. $\left(\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}\right)^{\frac{x+4}{x+3}}<1$ y $\begin{cases} \operatorname{sen} x\neq 0, \\ \dfrac{x+4}{x+3}>0; \end{cases}$

133. $x^{x^2-4x-45}>1$ y $\begin{cases} x>1, \\ x^2-4x-45<0; \end{cases}$

134. $x^{x^2-4x-45}>1$ y $\begin{cases} 0<x<1, \\ x^2-4x-45<0; \end{cases}$

135. $x^{x^2-4x-45}\geqslant 1$ y $\begin{cases} 0<x<1, \\ x^2-4x-45\leqslant 0; \end{cases}$

136. $x^{x^2-4x-45}\leqslant 1$ $\begin{cases} x>1, \\ x^2-4x-45\geqslant 0; \end{cases}$

137. $\log_2 x^2>0$ y $\begin{cases} x>0, \\ 2\log_2 x>0; \end{cases}$

138. $\log_2 x^2>0$ y $\begin{cases} x<0, \\ 2\log_2(-x)>0; \end{cases}$

139. $\log_{4+\sqrt{x}}(x+7)(x+8)>0$ y $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ (x+7)(x+8)>1; \end{cases}$

140. $\log_{\frac{1}{2+\sqrt{x}}}(x+1)(x-7)<0$ y $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ (x+1)(x-7)>1; \end{cases}$

141. $\log_{x^2-4}(x^2+6x+8)>0$ y $\begin{cases} x^2-4>1, \\ x^2+6x+8>1; \end{cases}$

142. $\log_{x^2-4}(x^2+6x+8)>0$ y $\begin{cases} 0<x^2-4<1, \\ 0<x^2+6x+8<1; \end{cases}$

143. $\log_2(x+7)+\log_2(x-8)>0$ y $\begin{cases} x-8>0, \\ x+7>0, \\ \log_2(x+7)(x-8)>0; \end{cases}$

144. $\log_{x^2}(x+1)^2>1$ y $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ \log_x(x+1)>1; \end{cases}$

145. $\log_{x^2}(x+1)^2>1$ y $\begin{cases} -1<x<0, \\ \log_{-x}(x+1)>1; \end{cases}$

146. $\log_{x^2}(x+1)^2>1$ y $\begin{cases} x<-1; \\ \log_{-x}(-x-1)>1; \end{cases}$

147. $\log_{x^2}(x+1)^2>1$ y $\begin{cases} 0<x^2<1, \\ (x+1)^2<x^2; \end{cases}$

148. $\log_{x^2}(x+1)^2>1$ y $\begin{cases} x^2>1, \\ (x+1)^2>x^2; \end{cases}$

149. $\log_{\sqrt{7}}|x+1|>\log_{\sqrt{7}}(x+1)^2$ y $\begin{cases} (x+1)\neq 0, \\ |x+1|>(x+1)^2? \end{cases}$

Resuélvase las siguientes desigualdades (150 ... 298):

150. $x^2+2x+\cos 5<0$. 151. $x^2+2x+\operatorname{sen}\frac{7}{2}\leqslant 0$.

152. $\operatorname{tg}\frac{5}{2}+6x-x^2>0$. 153. $\cos\frac{3}{2}-4x-x^2\geqslant 0$.

154. $\dfrac{\sqrt{x+7}\,(x+5)(x-1)^2}{(3-x^2)(x-6)(x-5)}\geqslant 0$. 155. $\dfrac{(x+2)(x+1)^3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)^2\sqrt{6-x}}\leqslant 0$.

156. $\dfrac{\sqrt{100-x^2}\,(x+4)(x+3)^2}{x^2(x-2)}<0$. 157. $\dfrac{(x+5)(x^2-1)}{x(x+3)^2\sqrt{49-x^2}}>0$.

158. $\dfrac{x-2}{x+2}\geqslant\dfrac{2x-3}{4x-1}$. 159. $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3$.

160. $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}\leqslant\dfrac{6}{x-1}$. 161. $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}<3$.

162. $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}>\dfrac{8}{x^2-1}$. 163. $\dfrac{1}{x-8}+\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x+8}+\dfrac{1}{x+6}\geqslant 0$.

164. $\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x+2}<4+\dfrac{x-7}{x-1}$

165. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}\leqslant\dfrac{1}{30}$.

166. $4|x+2|<2x+10$. 167. $3|x-1|\leqslant x+3$.

168. $2|x+1|>x+4$. 169. $3|x+1|\geqslant x+5$.

170. $|x-2|\leqslant 2x^2-9x+9$. 171. $3x^2-|x-3|>9x-2$.

172. $x^2+4\geqslant|3x+2|-7x$. 173. $x^2-|5x-3|-x<2$.

174. $|x+1|-|3x+7|>0$. 175. $|13-2x|\geqslant|4x-9|$.
176. $|x|+|x-1|\leqslant 1$. 177. $|x+2|-3<|x-1|$.
178. $|x^2+2x-3|\geqslant 3-2x-x^2$.
179. $|4+3x-x^2|\leqslant x^2-3x-4$.
180. $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|<1$. 181. $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|>1$.
182. $\frac{4}{|x+1|-2}\geqslant|x-1|$. 183. $\frac{7}{|x-1|-3}>|x+2|$.
184. $\frac{9}{|x-1|-3}<|x-2|$. 185. $\frac{3}{|x+3|-1}<|x+2|$.
186. $|x+2|+|x+1|+|x-1|>10$.
187. $|5-x|<|x-2|+|7-2x|$.
188. $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}\geqslant 1$. 189. $\frac{|x^2-2x|+4}{x^2+|x+2|}\leqslant 1$.
190. $2\sqrt{x+5}>x+2$. 191. $x+1<4\sqrt{x+6}$.
192. $\sqrt{1+4x-x^2}\geqslant x-1$. 193. $\sqrt{5-x^2}>x-1$.
194. $x+4\leqslant\sqrt{6-4x-x^2}$. 195. $x-2<\sqrt{4+2x-x^2}$.
196. $\sqrt{x^2-3x-10}>x-2$. 197. $\sqrt{4x^2+16x+16}<2x+10$.
198. $\sqrt{3x^2-6x+3}\leqslant x+3$. 199. $\sqrt{2x^2+4x+2}\geqslant x+4$.
200. $\sqrt{9x^2+6x+1}<2-x$. 201. $\sqrt{x^2+2x-3}>x$.
202. $\sqrt{x^2-x-2}>x-1$. 203. $\sqrt{2x+3}<1-\sqrt{x+2}$.
204. $\sqrt{-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{4}$. 205. $\sqrt{x+1}<\sqrt{x+11}-\sqrt{2x-12}$.
206. $\sqrt{3-x}>\sqrt{8-x}-\sqrt{-1-2x}$. 207. $\sqrt{2x+1}<\frac{2(x+1)}{2-x}$.
208. $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1$. 209. $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\frac{35}{12}$.
210. $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}<\frac{3}{5}$. 211. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>$
$>\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.
212. $\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)^{2x-6}\geqslant\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}\right)^{2x-6}$ 213. $\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^{x+1/3}<\sqrt{2}$.
214. $5^{x^2+3x}\leqslant 125\cdot 5^x$. 215. $\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{8}{27}\right)^{5/x}}\leqslant\left(\frac{9}{4}\right)^{-4}$.
216. $3^{\sqrt{x+1}}\geqslant 81\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{5-\frac{x}{4}}}$ 217. $4\cdot 3^x-9\cdot 2^x\geqslant 5\cdot 6^{x/2}$.
218. $(0,4)^{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}<(0,4)^2$. 219. $5^{\sqrt{7x}-\frac{\sqrt{7x}+1}{\sqrt{7x}-1}}\geqslant 125\sqrt{5}$.
220. $9^x-2\cdot 3^x<3$. 221. $4^x-2^{x+1}\geqslant 3$.
222. $9^x\leqslant 4+3^{x+1}$. 223. $2^{2x+1}-21\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}+2>0$.
224. $35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x}<6+3^{4-3x}$. 225. $\frac{1}{3^x+2}\geqslant\frac{1}{3^{x+1}-1}$.

226. $\dfrac{1}{2^x+3} > \dfrac{1}{2^{x+2}-1}$  227. $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4\cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}$.

228. $3\cdot 2^{1-x-2\sqrt{x}} > 4^{3x/3} + 2^{x-\sqrt{x}}$.

229. $4^x < 3\cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$.

230. $18\cdot 3^{x+2\sqrt{x+1}} > 3^{3x-2\sqrt{x+1}} - 7\cdot 3^{2x}$.

231. $\dfrac{11\cdot 3^{x-1}-31}{4\cdot 9^x - 11\cdot 3^{x-1}-5} \geqslant 5$.  232. $\dfrac{2^{x+3}+11}{2^{2x+1}+2^x-5} < 3$.

233. $\dfrac{4-7\cdot 5^x}{5^{2x+1}-12\cdot 5^x+4} \leqslant \dfrac{2}{3}$  234. $\dfrac{15-2\cdot 13^{x+1}}{6\cdot 13^{2x}-13^{x+1}+6} > 2$.

235. $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \geqslant 1$.  236. $9^{\sqrt[3]{x}} - 2\cdot 3^{\sqrt[3]{x}} \leqslant 3$.

237. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$.  238. $5^{|4x-6|} \geqslant 25^{3x-4}$.

239. $3^{|3x-4|} \leqslant 9^{2x-2}$.  240. $25^{|1-2x|} < 5^{4-6x}$.

241. $9^{|3x-1|} > 3^{8x-2}$.  242. $11^{3x-2} + 13^{3x-2} \geqslant 13^{3x-1} - 11^{3x-1}$.

243. $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x\cdot 30^x$.

244. $|x|^{x^2-x-2} < 1$.  245. $(x^2+x+1)^x \leqslant 1$.

246. $\log_{1/2}(2x+3) > 0$.

247. $\log_{0,3}(x^2+1) < \log_{0,3}(2x-5)$.

248. $\log_3(x^2-5x+4) > 0$.  249. $\log_2(x^2+3x) < 2$.

250. $2\log_2(x-1) - \log_2(2x-4) > 1$.

251. $\log_2 x + \log_2(2x-1) < \log_2(2x+2)$.

252. $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 \geqslant 0$.

253. $\log_3(x+2)(x-3) \leqslant 4\log_9(2x+1) - \log_{\sqrt{7}} 7$.

254. $\log_4(2x^2+3x+1) \geqslant \log_2(2x+2)$.

255. $\log^2\left(x - \dfrac{2x^2}{3}\right) + \log_{1/3}\left(x - \dfrac{2x^2}{3}\right) < 2$.

256. $\log_8(x^2-4x+3) > \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$.

257. $\log_{1/2}\dfrac{2x^2-4x-6}{4x-11} \leqslant \operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$.  258. $\log_4\dfrac{2x-1}{x+1} < \cos\dfrac{2\pi}{3}$.

259. $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{x^2-4x+3}{4} < 2\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4}$.

260. $\dfrac{|3-5x|-4}{\sqrt{\log_{1/3} 3|x|}} \leqslant 0$.  261. $\dfrac{1}{\log_2 x} \leqslant \dfrac{1}{\log_2\sqrt{x+2}}$.

262. $\dfrac{\log_8 x}{\log_2(1+2x)} < \dfrac{\log_2\sqrt[3]{1+2x}}{\log_2 x}$.

263. $\sqrt{\log_4\dfrac{2x^2-3x+3}{2}+1} > \log_2\dfrac{2x^2-3x+3}{2}$.

264. $\log_x\dfrac{x+3}{x-1} > 1$.  265. $\log_{(2x+3)} x^2 < 1$.

266. $\log_{(4+2x-x^2)}\left(\dfrac{1-x}{2}\right) \leqslant \dfrac{1}{2}$.  267. $\log_{(x+1)}(x^2+x-6)^2 \geqslant 4$.

268. $\log_{9x^2}(6+2x-x^2) \leqslant \dfrac{1}{2}$.  269. $\log_{(x-3)}(x^2-4x)^2 < 4$.

270. $\log_{(x-6)^2} (x^2-5x+9) > \frac{1}{2}$.

271. $\log_{(1-2x)} (6x^2-5x+1) - \log_{1-3x} (4x^2-4x+1) \geqslant 2$.

272. $\log_{(2x+1)} (5+8x-4x^2) + \log_{(5-2x)} (1+4x+4x^2) \leqslant 4$.

273. $\log_{(5x-1)} (10x^2-7x+1)^4 - \log_{2x-1} (25x-10x+1) > 2$.

274. $\log_{3x+7} (9+12x+4x^2) + \log_{2x+3} (6x^2+23x+21) < 4$.

275. $\dfrac{\log_2 (x^2-2x-7)^5 - \log_3 (x^2-3x-7)^8}{3x^2-13x+4} \leqslant 0$.

276. $\dfrac{\log_5 (x^2-2x-14)^9 - \log_2 (x^2-2x-14)^4}{2x^2-9x-5} < 0$.

277. $\dfrac{\log_7 (x^2-4x-4)^8 - \log_2 (x^2-4x-4)^3}{3+x-2x^2} > 0$.

278. $\dfrac{\log_5 (x^2-4x+11)^2 + \log_{11} (x^2-4x+11)^3}{2-5x-3x^2} \geqslant 0$.

279. $\dfrac{6\log_{32}^2 x - 11\log_{32} x - 2}{\log_{32} x - 2} \geqslant 2 + \log_{22} x$.

280. $\dfrac{2\lg x}{\lg x - 1} \geqslant \dfrac{2}{\lg x + 1} - \lg x$.

281. $\dfrac{\log_{\sqrt{7}} (x-4/7)+2}{\log_8 |x-3/5| + 1/3} \geqslant 0$. 282. $\dfrac{\log_3 (x+4/5)}{\log_7 (x^2-2x+7/16)} < 0$.

283. $\log_{1/3} - 3\log_{(x-1)} 1/3 > 2\,|\log_{1/3} (x-1)|$.

284. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_{1/9}(x^2-3x+1}} < 1$. 285. $\lg_{1/\sqrt{5}} (6^{x+1} - 36^x) \geqslant -2$.

286. $3\cdot 9^{\log_4 x} - 10\cdot 3^{\log_4 x} + \log_2 8 \geqslant 0$.

287. $25^{\log_5 x} - 6\cdot 5^{\log_5 x} + 5^{\frac{1}{2}\log_5 4} \leqslant 0$.

288. $4x + 8\sqrt{2-x^2} > 4 + (x^2-x)\cdot 2^x + 2^{x+1}\cdot x\sqrt{x-x^2}$.

289. $4x^2 + 3^{\sqrt{x}+1} + x\cdot 3^{\sqrt{x}} < 2x^2\cdot 3^{\sqrt{x}} + 2x + 6$.

290. $\dfrac{6}{2x+1} \geqslant \dfrac{1+\log_2 (x+2)}{x}$. 291. $\dfrac{6-3^{x+1}}{x} > \dfrac{10}{2x-1}$.

292. $\dfrac{2+\log_3 x}{x-1} \leqslant \dfrac{6}{2x-1}$. 293. $\dfrac{2^{x+1}-7}{x-1} < \dfrac{10}{3-2x}$.

294. $(x-2)^2 |\cos x| \leqslant \cos x$. 295. $\operatorname{sen} x + (x-4)^2 |\operatorname{sen} x| \geqslant 0$.

296. $\cos x < |\cos x|\,(x+3/2)^2$. 297. $(x+1/2)^2 |\operatorname{sen} x| + \operatorname{sen} x > 0$.

298. $\sqrt{49-x^2}\,\sqrt{\log_2 \operatorname{sen}^2 x} \geqslant 0$.

CAPÍTULO

# IX

# LÍMITE DE UNA SUCESIÓN Y LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

## § 1. Sucesiones numéricas

Si a todo número natural $n$ se le ha puesto en correspondencia un número $x_n$, se dice que está dada la sucesión numérica $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o, en forma más breve, la sucesión $\{x_n\}$. Para prefijar una sucesión numérica se debe elegir una ley (regla), de acuerdo con la cual a todo número natural se le pone en correspondencia cierto número, es decir, cada sucesión numérica puede considerarse como una función cuyo campo de definición es el conjunto de todos los números naturales.

Si la función $y = f(x)$ es tal, que el conjunto de todos los números naturales está contenido dentro del campo de su existencia, entonces por medio de la función $y = f(x)$ con su campo de definición (el conjunto de todos los números naturales) se puede prefijar la sucesión numérica $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$, o bien $\{f(n)\}$. Por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales está contenido dentro del campo de existencia de cada una de las siguientes funciones:

1. $y=x$; 2. $y=2^{1-x}$; 3. $y=-2-3(x-1)$;

4. $y=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi x}{2}\right)$; 5. $y=\cos(2\pi x)$; 6. $y=\frac{x+1}{x}$;

7. $y=\dfrac{1+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\pi x\right)}{x}$; 8. $y=\frac{1}{x}$; 9. $y=2^{x-1}$.

10. $y=x^2$.

En el campo de definición, es decir, en el conjunto de todos los números naturales, estas funciones prefijan las siguientes sucesiones numéricas, respectivamente:

1. $1, 2, \ldots, n, \ldots$;

2. $1, \frac{1}{2}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n}, \ldots$;

3. $-2, -5, \ldots, -2-3(n-1), \ldots$;

4. $1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$;

5. $1, 1, \ldots, 1^n, \ldots$;

6. $2, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots;$

7. $0, 1, \ldots, \frac{[1+(-1)^n]}{n}, \ldots;$

8. $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots;$

9. $1, 2, \ldots, 2^{n-1}, \ldots;$

10. $1, 4, \ldots, n^2, \ldots$ .

La sucesión numérica $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se prefija con mayor comodidad mediante la fórmula para su término general. Escribamos, por ejemplo, las fórmulas para los términos generales de las sucesiones 1 . . 10:

1. $a_n = n;$
2. $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1};$
3. $a_n = -2-3(n-1);$
4. $a_n = (-1)^{n-1};$
5. $a_n = 1^n;$
6. $a_n = \frac{n+1}{n};$
7. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n};$
8. $a_n = \frac{1}{n};$
9. $a_n = 2^{n-1};$
10. $a_n = n^2.$

A veces la sucesión se da mediante una correlación recurrente, es decir, mediante una fórmula que expresa $a_n$ a través de ciertos términos de la sucesión que preceden a $a_n$, por ejemplo:

11. La sucesión de números de Fibonacci $1, 1, 2, 3, \ldots, a_n$, se prefija mediante la fórmula $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n > 2$, y la condición $a_1 = a_2 = 1$.

Las sucesiones pueden prefijarse también mediante otros métodos, por ejemplo:

12. Una sucesión de aproximaciones decimales del número $\pi$ por defecto: 3; 3,1; 3,14; 3,141; . . . .

13. Una sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n = \frac{1}{[\sqrt{n}]}$ ($[a]$ es la parte entera del número $a$, es decir, el número entero máximo que no sobrepasa de $a$).

Por cuanto toda sucesión numérica puede considerarse como función de un argumento natural, a las sucesiones numéricas se extienden los conceptos de monotonía y acotación de las funciones.

La sucesión numérica $\{a_n\}$ se denomina *creciente*, si para cualesquiera números naturales $n_1$ y $n_2$ de la condición $n_1 < n_2$ se deduce que $a_{n_1} < a_{n_2}$. Son crecientes, por ejemplo, las sucesiones 1, 9, 10, 12.

La sucesión numérica $\{a_n\}$ se denomina *no decreciente*, si para cualesquiera números naturales $n_1$ y $n_2$ de la condición $n_1 < n_2$ se deduce que $a_{n_1} \leqslant a_{n_2}$. Son no decrecientes, por ejemplo, las sucesiones 5 y 11.

La sucesión numérica $\{a_n\}$ se denomina *decreciente*, si para cualesquiera números naturales $n_1$ y $n_2$ de la condición $n_1 < n_2$ se dedu-

ce que $a_{n_1} > a_{n_2}$. Son decrecientes, por ejemplo, las sucesiones 2, 3, 6, 8.

La sucesión numérica $\{a_n\}$ se denomina *no creciente*, si para cualesquiera números naturales $n_1$ y $n_2$ de la condición $n_1 < n_2$ se deduce que $a_{n_1} \geqslant a_{n_2}$. Por ejemplo, la sucesión 13 es no creciente, puesto que $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = \frac{1}{2}$, etc.

La sucesión numérica se denomina *monótona*, si es decreciente o creciente, o bien, si no decrece o no crece. Todas las sucesiones aducidas anteriormente son monótonas, a excepción de las sucesiones 4 y 7.

La sucesión $\{a_n\}$ se denomina *acotada* superiormente, si existe un número $B$ tal que para cualquier número natural $n$ se verifica la desigualdad $a_n \leqslant B$. Por ejemplo, las sucesiones 2,3,4,5,6,7,8,12 y 13 son acotadas superiormente.

La sucesión $\{a_n\}$ se denomina *acotada inferiormente*, si existe un número $A$ tal, que para cualquier número natural $n$ se verifica la desigualdad $a_n \geqslant A$. Son acotadas inferiormente, por ejemplo, las sucesiones 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 11,12 y 13.

La sucesión $\{a_n\}$ se denomina *acotada*, si está acotada inferior y superiormente. Son acotadas, por ejemplo, las sucesiones 2, 4, 5, 6, 7, 8.

Entre toda clase de sucesiones numéricas a continuación se examinarán detalladamente sólo las sucesiones que se llaman progresiones aritmética y geométrica.

Se denomina *progresión aritmética* una sucesión de números en la que cada término, a partir del segundo, es igual al precedente sumado con un mismo número que es constante para la sucesión dada, es decir, una sucesión numérica $\{a_n\}$ tal, que para cualquier $n$ natural se verifica $a_{n+1} = a_n + d$, donde $d$ es un número constante para la sucesión dada, llamado *razón* de la progresión.

Por ejemplo, las sucesiones

$$1, 2, 3, 4 \ldots, \tag{1}$$

$$3, 1, -1, -3, \ldots$$

son progresiones aritméticas. La razón de la progresión aritmética (1) es $d = 1$, y la de la progresión (2) es $d = -2$. En cualquier progresión aritmética el término que ocupa el $n$-ésimo lugar puede expresarse siempre a través del primer término y la razón de la progresión dada:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\, d. \tag{3}$$

Esta es la *fórmula para el término general de una progresión aritmética*.

**La demostración** de esta fórmula se realiza por el método de inducción matemática.

Para $n = 1$ la fórmula (3) se escribirá en la forma $a_1 = a_1 + 0 \cdot d$, es decir, resultará ser válida. Supongamos que la fórmula

(3) es válida para $n = k$, es decir, supongamos que el $k$-ésimo término de la progresión aritmética se calcula por la fórmula

$$a_k = a_1 + (k - 1) d. \qquad (4)$$

Demostremos que la fórmula (3) es válida para $n = k + 1$, o sea, demostremos la validez de la fórmula

$$a_{k+1} = a_1 + [(k + 1) - 1] d. \qquad (5)$$

En efecto, por definición de progresión aritmética tenemos $a_{k+1} = a_k + d$. Por consiguiente, haciendo uso de la fórmula (4), se puede escribir que $a_{k+1} = a_1 + (k - 1) d + d = a_1 + [(k + 1) - 1] d$, es decir, obtener la validez de la fórmula (5). De este modo queda demostrada la validez de la fórmula (3) para todo número natural $n$.

Valiéndose de la fórmula (3) y de las propiedades de las operaciones con números, resulta fácil comprobar la validez de la siguiente afirmación: para cualquier progresión aritmética $\{a_n\}$, siendo $m + n = k + l$ se verifica la igualdad

$$a_m + a_n = a_k + a_l. \qquad (6)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} a_m + a_n &= a_1 + d(m - 1) + a_1 + d(n - 1) = \\ &= 2a_1 + d(m + n - 2) = 2a_1 + d(k + l - 2) = \\ &a_1 + (k - 1) d + a_1 + (l - 1) d = a_k + a_l. \end{aligned}$$

El número, igual a la suma de los primeros $n$ términos de una progresión aritmética, se designa con $S_n$, es decir,

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n;$$

los términos $a_1$ y $a_n$ reciben el nombre de *términos extremos para la suma* $S_n$. Haciendo uso de la propiedad (6) y de las propiedades que poseen las operaciones sobre números, obtenemos la siguiente fórmula para $S_n$:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2}. \qquad (7)$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned} 2S_n = S_n + S_n &= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (a_1 + a_2 + \ldots \\ &\ldots + a_n) = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots \\ &\ldots + (a_n + a_1) = (a_1 + a_n) n, \end{aligned}$$

es decir, *la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética es igual al producto de la semisuma de los términos extremos por el número de términos que se suman.*

La suma $S_n$ de una progresión aritmética $\{a_n\}$ se puede expresar mediante el primer término y la razón de la progresión dada:

$$S_n = \frac{[2a_1 + d(n - 1)] n}{2}.$$

**Ejemplo.** Hállese la suma de los números naturales de dos cifras que no se dividen ni por 2 ni por 3.

Es evidente que todos los números naturales de dos cifras forman una progresión aritmética con el primer término $a_1 = 10$ y la razón $d = 1$, es decir, forman la siguiente sucesión de números: 10, 11, 12, 13, . . ., 97, 98, 99. Haciendo uso de la fórmula (7), es fácil hallar la suma $S^{(1)}$ de todos estos números: $S^{(1)} = \frac{(10+98)\cdot 90}{2}$. Los números de dos cifras, que se dividen por 2, forman la progresión aritmética 10, 12, 14, . . ., 96, 98 cuya suma es $S^{(2)} = \frac{(10+98)\cdot 45}{2}$.

Análogamente, los números que se dividen por 3 forman la progresión aritmética 12, 15, 18, . . ., 96, 99 cuya suma es $S^{(3)} = \frac{(12+99)\cdot 30}{2}$.

Es fácil ver que las últimas dos progresiones aritméticas tienen los términos comunes 12, 18, 24, . . ., 96 que representan los números divisibles a la vez por 2 y por 3, es decir, divisibles por 6. La suma $S$ de todos los números naturales de dos cifras que no se dividen ni por 2 ni por 3 se halla del modo siguiente: $S = S^{(1)} - S^{(2)} - S^{(3)} + S^{(6)}$ donde $S^{(6)}$ es la suma de todos los números de dos cifras divisibles tanto por 2 como por 3, es decir, divisibles por 6. La suma $S^{(6)}$ debe sumarse porque al sustraer las sumas $S^{(2)}$ y $S^{(3)}$, la suma de los números divisibles por 6 se resta dos veces. Haciendo uso de (3), hallemos el número de términos de la progresión aritmética formada de tales números (es evidente que la razón de esta progresión es igual a 6) : $96 = 12 + (n-1)\,6$, de donde $n = 15$. Por consiguiente, $S^{(6)} = \frac{(12+96)\cdot 15}{2}$ y $S = \frac{15}{2}\,(109\cdot 6 - 108\cdot 3 - 111 \times \times 2 + 108) = 1620$, es decir, $S = 1620$.

Se llama *progresión geométrica* una sucesión de números en la cual todo término, a partir del segundo, es igual al precedente multiplicado por un número distinto de cero y constante para la sucesión dada, es decir, una sucesión numérica $\{a_n\}$ tal que para cualquier $n$ natural se verifica $a_{n+1} = a_n q$, donde $q$ es un número distinto de cero y constante para la sucesión dada, denominado *razón* de la progresión.

Por ejemplo, las sucesiones

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots;$$

$$1, -1, 1, -1, \ldots;$$

$$\frac{1}{7}, -\frac{1}{21}, \frac{1}{63}, -\frac{1}{189}, \ldots$$

son progresiones geométricas con las razones 2, $(-1)$, $\left(-\frac{1}{3}\right)$, respectivamente.

*El término general de una progresión geométrica* se calcula por la fórmula

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \tag{8}$$

**La demostración** de la validez de esta fórmula para cada número natural $n$ se realiza por el método de inducción matemática. Cuando $n = 1$, la fórmula (8) se escribirá en la forma $a_1 = a_1 q^0$, es decir, resulta ser válida. Supongamos que la fórmula (8) se verifica para $n = k$, es decir, supongamos que es válida la fórmula

$$a_k = a_1 q^{k-1}. \tag{9}$$

Demostremos que la fórmula (8) se verifica para $n = k + 1$, es decir, demostremos la validez de la fórmula

$$a_{k+1} = a_1 q^{(k+1)-1}. \tag{10}$$

En efecto, por definición de progresión geométrica tenemos $a_{k+1} = a_k q$. Por consiguiente, haciendo uso de la fórmula (9), podemos escribir que

$$a_{k+1} = (a_1 q^{k-1})\, q = a_1 q^{(k+1)-1},$$

es decir, obtener la validez de la fórmula (10). De este modo queda demostrada la validez de la fórmula (8) para cualquier número natural $n$.

Hallemos, con ayuda de la fórmula para el término general, la fórmula para la suma de los primeros $n$ términos de una progresión geométrica:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Si $q = 1$, entonces $S_n = na_1$.

Si $q \neq 1$, estudiemos la expresión

$S_n - S_n q = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} - a_1 q - a_1 q^2 - \ldots$

$\ldots - a_1 q^{n-1} - a_1 q^n = a_1 - a_1 q^n = a_1 (1 - q^n)$. Por consiguiente, $S_n (1 - q) = a_1 (1 - q^n)$. Como $q \neq 1$, se tiene

$$S_n = \frac{a_1 (1 - q^n)}{1 - q}.$$

## § 2. Límite de una sucesión numérica

Sea dada la sucesión numérica $\{a_n\}$.

*El número $a$ se denomina límite de la sucesión numérica $\{a_n\}$, si para cualquier número positivo $\varepsilon$ existe tal número $N$, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad*

$$| a_n - a | < \varepsilon.$$

Por ejemplo, es obvio que el límite de la sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n = c$, será el número $c$.

El hecho de que el número $a$ es el límite de la sucesión $\{a_n\}$ se escribe del modo siguiente: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$, o bien $a_n \to a$ para $n \to \infty$.

**Ejemplos.** 1. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, si $a_n = q^n$ y $0 < |q| < 1$.

Tomemos un número arbitrario $\varepsilon > 0$.

a) si $\varepsilon < 1$, hagamos $N = [\log_{|q|} \varepsilon] + 1$. Está claro que $N > \log_{|q|} \varepsilon$, y para todo $n > N$ tenemos $|q^n - 0| = |q|^n < |q|^N < |q|^{\log_{|q|}\varepsilon} = \varepsilon$.

b) Si $\varepsilon \geqslant 1$, hagamos $N = 1$. Es fácil ver que para todo $n > 1$ tenemos $|q^n - 0| = |q|^n < 1 \leqslant \varepsilon$.

Así pues, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N$ tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $|q^n - 0| < \varepsilon$, es decir, queda demostrado que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$, si $a_n = \frac{n+1}{n}$.

Elijamos arbitrariamente un número $\varepsilon > 0$. Hagamos $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Entonces, $N > \frac{1}{\varepsilon}$ y para cualquier $n > N$ tenemos $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, lo que se trataba de demostrar.

3. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, si $a_n = \frac{1}{n}$. Tomemos arbitrariamente un número $\varepsilon > 0$. Hagamos $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Entonces, para cualquier $n > N$ tenemos $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$, lo que se trataba de demostrar.

Diremos que *una sucesión* $\{a_n\}$ *tiene por límite* $(+\infty)$ y escribiremos $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, o bien $a_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, siempre que para cualquier número positivo $A$, tan grande como se quiera, exista un número $N$ tal, que para todo $n > N$ se verifique la desigualdad $a_n > A$.

**Ejemplos.** 1. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, si $a_n = n^2$.

Para cualquier número positivo $A$ hagamos $N = ([\sqrt{A+1}] + 1)$. Entonces, para todo $n > N$ tenemos

$$a_n = n^2 > N^2 = ([\sqrt{A+1}] + 1)^2 > (\sqrt{A+1})^2 = A + 1 > A,$$

es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

2. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, si $a_n = n$.

Para cualquier número positivo $A$ hagamos $N = ([A+1] + 1)$. Entonces, para todo $n > N$ tenemos $a_n = n > N = [A+1] + 1 > A + 1 > A$, es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

3. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, si $a_n = 2^{n-1}$.

Para cualquier número positivo $A$ hagamos $N = [\log_2 (A + 1)] + 2$. Entonces para todo $n > N$ tenemos

$$a_n = 2^{n-1} > 2^{N-1} = 2^{[\log_2 (A+1)]+1} > 2^{\log_2 (A+1)} = A + 1 > A,$$

es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Diremos que *una sucesión* $\{a_n\}$ *tiene por límite* $(-\infty)$ y escribiremos $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, o bien $a_n \to -\infty$ cuando $n \to \infty$, si para cualquier número negativo $B$ tal, que $|B|$ sea un número tan grande como se quiera, existe tal número $N$ que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $a_n < B$.

**Ejemplos.** 1. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, si $a_n = -2 - 3(n-1)$.

Para cualquier $B$ negativo hagamos $N = \left[\frac{|B-1|}{3}\right] + 1$. Entonces para todo $n > N$ tenemos

$$a_n = -2 - 3(n-1) < -2 - 3(N-1) = -2 - 3\left[\frac{|B-1|}{3}\right] <$$
$$< -2 - 3\left(\frac{|B-1|}{3} - 1\right) = -2 - 3\left(\frac{1-B}{3} - 1\right) =$$
$$= -2 - (1 - B - 3) = B,$$

lo que se trataba de demostrar.

2. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, si $a_n = -2^n$.

Para cualquier número negativo $B$ hagamos $N = [\log_2 |B| + 1]$. Entonces para cualquier $n > N$ tenemos

$$a_n = -2^n < -2^N = -2^{[\log_2 |B|+1]} < -2^{\log_2 |B|} = -|B| = B,$$

lo que se trataba de demostrar.

3. Demuéstrese que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, si $a_n = \log_{\frac{1}{2}} n$.

Para cualquier número negativo $B$ hagamos $N = [2^{|B|} + 1]$. Entonces para todo $n > N$ tenemos

$$a_n = \log_{\frac{1}{2}} n < \log_{\frac{1}{2}} N = \log_{\frac{1}{2}} [2^{|B|} + 1] < \log_{\frac{1}{2}} 2^{|B|} = -|B| = B,$$

lo que se trataba de demostrar.

Observemos que *existen sucesiones que no tienen límite*. A título de tal sucesión puede servir, por ejemplo, la sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n = (-1)^n$.

**Teoremas sobre las sucesiones numéricas.** Se analizarán aquí solamente las sucesiones que tienen límite finito.

**Teorema 1.** *Si una sucesión* $\{a_n\}$ *tiene límite* $A$ *y el número* $p < A$, *entonces existe un número* $N$ *tal, que para todo* $n > N$ *se verifica la desigualdad* $p < a_n$.

**Demostración.** Por cuanto $A$ es el límite de la sucesión $\{a_n\}$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N$ tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad

$$| a_n - A | < \varepsilon.$$

Escribamos esta desigualdad en la forma

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon. \qquad (1)$$

Supongamos que $\varepsilon = A - p > 0$. Para $\varepsilon > 0$ existe un número $N$ tal que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad doble (1). Sustituyendo en el primer miembro de la desigualdad (1) $\varepsilon = A - p$, obtenemos que $p < a_n$, lo que se trataba de demostrar.

**Teorema 2.** *Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene el límite $A$ y el número $q > A$, entonces existe un número $N$ tal, que para cualquier $n > N$ se verifica la desigualdad $q > a_n$.*

La demostración del teorema 2 es análoga a la del teorema 1 y por esta razón se omite.

**Observaciones.** 1. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$, y $A > 0$, se encontrará un número $N$ tal, que $a_n < 0$ para todo $n > N$.

2. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$ y $A < 0$, se encontrará un número $N$ tal, que $a_n < 0$ para todo $n > N$.

**Teorema 3.** *Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene el límite $A$, existe un número positivo $M$ tal, que $| a_n | \leqslant M$, es decir, la sucesión que tiene límite está acotada.*

**Demostración.** Elijamos un número $M_1$ de modo tal, que sea éste superior a $| A |$, es decir, que se verifique la desigualdad $-M_1 < A < M_1$. Al introducir las designaciones $p = -M_1$, $q = M_1$, tendremos que $A > p$ y $A < q$. Según el teorema 1, existe un número $N_1$ tal, que para cualquier $n > N_1$ se verifica la desigualdad $p < a_n$. Según el teorema 2, existe un número $N_2$ tal, que para cualquier $n > N_2$ se verifica la desigualdad $q > a_n$. Elijamos el número $N = \text{máx}\,(N_1, N_2)$. En este caso para cualquier $n > N$ es válida la desigualdad doble $p < a_n < q$, o bien $-M_1 < a_n < M_1$, es decir, $| a_n | < M_1$. La desigualdad $| a_n | < M_1$ se verifica para cualquier $n > N$, es decir, para $n = N + 1$, $n = N + 2$, $n = N + 3$, $n = N + 4$, etc. Quiere decir, la desigualdad $| a_n | < M_1$ puede ser ilícita sólo para los primeros $N$ términos de la sucesión.

Elijamos entre los números $| a_1 |$, $| a_2 |$, $| a_3 |$, ..., $| a_{N-1} |$, $| a_N |$, $M_1$ el número mayor y designémoslo con $M$. Se hace claro que para cualquier $n$ será válida la desigualdad $| a_n | \leqslant M$, lo que se trataba de demostrar.

**Teorema 4.** *Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite, este límite es único.*

**Demostración.** Supongamos lo contrario, es decir, que simultáneamente $a_n \to A$ y $a_n \to B$ y sea $A < B$. Elijamos cualquier número $C$ entre $A$ y $B$, es decir, $A < C < B$. Por cuanto $a_n \to A$ y $A < C$, entonces, de acuerdo con el teorema 2, existe un número

$N_1$ tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad $a_n < C$. Por cuanto $a_n \to B$ y $C < B$, entonces, de acuerdo con el teorema 1, existe un número $N_2$ tal, que para todo $n > N_2$ se verifica la desigualdad $a_n > C$. Elijamos el número $N = \max (N_1, N_2)$. Entonces el término de la sucesión $a_N$ satisface, a la vez, dos desigualdades $a_N > C$ y $a_N < C$, lo que es imposible. Por consiguiente, la suposición no es cierta y es lícita la afirmación del teorema 4.

**Teorema 5.** *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, *entonces* $\lim\limits_{n\to+\infty} | a_n | = | A |$.

**Demostración.** Sea $A = 0$. En este caso la condición $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N$ tal que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $| a_n - 0 | < \varepsilon$. Por cuanto esta desigualdad puede reescribirse en la forma $| | a_n | - 0 | < \varepsilon$, resulta que $\lim\limits_{n\to+\infty} | a_n | = 0$.

Sea $A \neq 0$. En este caso la condición $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ significa que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $N_1$ tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad $| a_n - A | < \varepsilon$.

Si $A > 0$, entonces, conforme a la observación 1 al teorema 2, existe un número $N_2$ tal, que para $n > N_2$ tendremos $a_n > 0$. Al elegir el número $N = \max (N_1, N_2)$, obtenemos que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $| | a_n | - | A | | < \varepsilon$, lo que significa que $\lim\limits_{n\to+\infty} | a_n | = | A |$. En cambio, si $A < 0$, entonces, de acuerdo con la observación 2 al teorema 2, existe un número $N_2$ tal, que $a_n < 0$. Tomando el número $N = \max (N_1, N_2)$ y teniendo presente que $a_n = - | a_n |$ y $| A | = - | A |$, llegamos a que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $| - ( | a_n | - | A | ) | < \varepsilon$, la cual puede escribirse en la forma $| | a_n | - | A | | < \varepsilon$, lo que significa que $\lim\limits_{n\to+\infty} | a_n | = | A |$.

Las operaciones aritméticas sobre las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, como también la comparación de las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se realizan igual que sobre las funciones, es decir, con valores iguales del argumento, o, en otras palabras, término a término.

**Teorema 6.** *Si las sucesiones* $\{a_n\}$ *son y* $\{b_n\}$ *tales, que* $a_n = b_n$ *para cualquier* $n$, *y* $a_n \to A$, $b_n \to B$, *entonces* $A = B$, *es decir, si* $a_n = b_n$ *para cualquier* $n$, *entonces* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

**Demostración.** La condición $a_n = b_n$ para cualquier $n$ significa que se tiene en realidad solamente una sucesión y, de acuerdo con el teorema 4, ésta no puede tener dos límites; quiere decir, $A = B$ y el teorema queda demostrado.

**Teorema 7.** *Si las sucesiones* $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ *son tales, que* $a_n \geqslant b_n$ *para cualquier* $n$, *y* $a_n \to A$, $b_n \to B$, *entonces* $A \geqslant B$, *es decir, si* $a_n \geqslant b_n$ *para cualquier* $n$, *entonces* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

**Demostración.** Supongamos lo contrario. Sea $A < B$. Elijamos un número $C$ tal, que sea $A < C < B$. Por cuanto $a_n \to A$ y $A < C$,

entonces, conforme al teorema 2, existe un número $N_1$ tal, que para cualquier $n > N_1$ se verifica la desigualdad $a_n < C$. Por cuanto $b_n \to B$ y $B > C$, entonces, de acuerdo con el teorema 1, existe un número $N_2$ tal, que para cualquier $n > N_2$ se verifica la desigualdad $b_n > C$. Elijamos el número $N = \text{máx}\ (N_1, N_2)$. En este caso para cualquier $n > N$ se verificarán simultáneamente las desigualdades $a_n < C$ y $C < b_n$. De éstas de deduce que $a_n < b_n$, lo que contradice las condiciones del teorema. Quiere decir que nuestra suposición no es cierta y el teorema 7 es válido.

**Observación.** El teorema 7 no puede ser hecho más riguroso, es decir, de la desigualdad estricta $a_n > b_n$ para los términos de la sucesión, no se desprende obligatoriamente una desigualdad estricta para los límites, por ejemplo, si $a_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = -\frac{1}{3^n}$, entonces $a_n > b_n$ para cualquier $n$, pero $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

**Teorema 8.** *Si las sucesiones* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *y* $\{c_n\}$ *son tales, que* $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *para todo* $n$ *y que* $a_n \to a$, $c_n \to a$, *entonces* $b_n \to a$.

**Demostración.** Tomemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Por cuanto $a_n \to a$, existe un número $N_1$ tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Por cuanto $c_n \to a$, existe un número $N_2$ tal, que para todo $n > N_2$ se verifica la desigualdad $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$. Elijamos el número $N = \text{máx}\ (N_1, N_2)$. Entonces para cualquier $n > N$ se verificarán simultáneamente las desigualdades $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, $a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$. Agreguemos a estas desigualdades la desigualdad $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ que se verifica para cualquier $n$. De acuerdo con la propiedad de transitividad de las desigualdades, para cualquier $n > N$ será válida la desigualdad $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$, la cual puede escribirse en la forma $|b_n - a| < \varepsilon$. Así pues, para $\varepsilon > 0$, arbitrariamente elegido, existe un número $N$ tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $|b_n - a| < \varepsilon$, lo que significa que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$. El teorema está demostrado.

**Observación.** Si $a \leqslant b_n \leqslant c_n$ para cualquier $n$ y si $c_n \to a$, entonces $b_n \to a$.

**Teorema 9.** *Si las sucesiones* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *son tales, que* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, *y* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$, *entonces la sucesión* $\{a_n + b_n\}$ *es tal, que* $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = A + B$, *es decir, si* $a_n \to A$, $b_n \to B$, *entonces* $(a_n + b_n) \to (A + B)$.

**Demostración.** Por cuanto $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$ entonces para cualquier $\varepsilon_1 > 0$ existe un número $N_1$ tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad $A - \varepsilon_1 < a_n < A + \varepsilon_1$, y existe un número $N_2$ tal, que para cualquier $n > N_2$ se verifica la desigualdad $B - \varepsilon_1 < b_n < B + \varepsilon_1$. Elijamos el número $N = \text{máx}\ (N_1, N_2)$. Entonces, para $\varepsilon_1 > 0$, elegido arbitrariamente, existe un número $N$ tal, que para todo $n > N$ se verifican simultánea-

mente las desigualdades $A - \varepsilon_1 < a_n < A + \varepsilon_1$ y $B - \varepsilon_1 < b_n < B + + \varepsilon_1$. En virtud de las propiedades de las desigualdades, será lícita la desigualdad

$$(A + B) - 2\varepsilon_1 + < (a_n + b_n) < (A + B) + 2\varepsilon_1.$$

Elijamos arbitrariamente $\varepsilon > 0$ y denotemos $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$. Entonces, según se deduce de lo anterior, existe un número $N$ tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $(A + B) - \varepsilon < (a_n + b_n) < < (A + B) + \varepsilon$, es decir, por definición de límite, tenemos $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n + b_n) = (A + B)$.

El teorema está demostrado.

**Teorema 10.** *Si* $a_n \to A$, $b_n \to B$, *entonces* $(a_n - b_n) \to (A - B)$.

La demostración de este teorema es igual a la del teorema 9 y por esta razón aquí se omite.

**Teorema 11.** *Si* $a_n \to A$, $b_n \to B$, *entonces* $(a_n b_n) \to AB$.

**Demostración.** Por cuanto $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = A$, entonces para cualquier número prefijado $\varepsilon_1 > 0$ existe un número $N_1$ tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad

$$| a_n - A | < \varepsilon_1. \qquad (2)$$

Por cuando $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = B$, para cualquier número prefijado $\varepsilon_2 > 0$ existe un número $N_2$ tal, que para todo $n > N_2$ se verifica la desigualdad

$$| b_n - B | < \varepsilon_2. \qquad (3)$$

Veamos una desigualdad

$$| a_n b_n - AB | = | a_n b_n - a_n B + a_n B - AB | \leqslant$$
$$\leqslant | a_n | \, | b_n - B | + | B | \, | a_n - A | . \qquad (4)$$

Ella es válida para todo $n$. Por cuanto existe, de acuerdo con el teorema, 3, un número positivo $M$ tal, que $| a_n | \leqslant M$ para cualquier $n$, entonces, al denotar $d = | B | + 1$ $(d > 0)$, a partir de la desigualdad (4) obtenemos la desigualdad

$$| a_n b_n - AB | \leqslant M \, | b_n - B | + d \, | a_n - A | , \qquad (5)$$

que es válida para cualquier $n$. Tomemos ahora al azar $\varepsilon > 0$ y designemos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2d}$ y $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2\mu}$. En este caso para el $\varepsilon_1$ elegido existe un número $N_1$ tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad (2), y para el $\varepsilon_2$ elegido existe un número $N_2$ tal, que se verifica la desigualdad (3), cualquiera que sea $n > N_2$. Elijamos el número $N = = \max (N_1, N_2)$. Entonces para todo $n > N$ se verifican simultáneamente las desigualdades (2), (3) y (5). Sustituyendo en (5) las estimaciones (2) y (3), llegamos a que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad

$$| a_n b_n - AB | < \varepsilon. \qquad (6)$$

Así pues, para $\varepsilon > 0$, arbitrariamente elegido, se ha determinado un número $N$ tal, que para todo $n > N$ es válida la desigualdad (6),

es decir, por definición de límite, $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_nb_n) = AB = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \times$ $\times \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. El teorema está demostrado.

**Teorema 12.** *Si una sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite $A \neq 0$, existe un número $N$ tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad* $|a_n| > \frac{|A|}{2}$.

**Demostración.** Elijamos $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Por cuanto la sucesión $\{a_n\}$ tiene límite, entonces, por definición de límite, para dicho $\varepsilon > 0$ existe un número $N$ tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $|a_n - A| < \frac{|A|}{2}$.

Por cuanto $|a_n - A| \geqslant |A| - |a_n|$, resulta que para todo $n > N$ es válida la desigualdad $|A| - |a_n| < \frac{|A|}{2}$, de donde $\frac{|A|}{2} < |a_n|$. El teorema está demostrado.

**Teorema 13.** *Si $a_n \to A$, $b_n \to B$, donde $b_n \neq 0$ para todo $n$,* y $B \neq 0$, *entonces* $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$.

**Demostración.** Por cuanto $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, existe para cualquier $\varepsilon_1 > 0$ número $N_1$ tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad

$$|a_n - A| < \varepsilon_1. \tag{7}$$

Por cuanto $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B$, existe para cualquier $\varepsilon_2 > 0$ un número $N_2$ tal, que para todo $n > N_2$ se verifica la desigualdad

$$|b_n - B| < \varepsilon_2. \tag{8}$$

Según el teorema 3, existe un número positivo $M$ tal, que para todo $n$ tenemos

$$|a_n| \leqslant M. \tag{9}$$

Según el teorema 12, existe un número $N_3$ tal, que para todo $n > N_3$ se verifica la desigualdad

$$|b_n| > \frac{|B|}{2}. \tag{10}$$

Para cualquier $n$ se verifica la desigualdad

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \frac{|a_nB - b_nN|}{|b_nB|} = \frac{|a_nB - a_nb_n + a_nb_n - Ab_n|}{|b_n|\,|B|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|a_n(B - b_n)| + |b_n(a_n - A)|}{|b_n|\,|B|} \leqslant \frac{|a_n|\,|b_n - B|}{|b_n|\,|B|} + \frac{|a_n - A|}{|B|}. \tag{11}$$

Ahora, tomemos al azar $\varepsilon > 0$ y denotemos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon |B|}{2}$ y $\varepsilon_2 = \frac{|B|^2}{4M}$. Entonces para el $\varepsilon_1$ elegido existe un número $N_1$ tal, que para todo $n > N_1$ se verifica la desigualdad (7), y para el $\varepsilon_2$

elegido existe un número $N_2$ tal, que para todo $n > N_2$ se verifica la desigualdad (8). Elijamos un número $N = \text{máx}\,(N_1, N_2, N_3)$. Entonces para todo $n > N$ se verifican simultáneamente las desigualdades (7), (8), (9), (10) y (11). Sustituyendo las estimaciones (7), (8), (9) y (10) en el segundo miembro de la desigualdad (11), obtenemos que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon. \tag{12}$$

Así pues, para $\varepsilon > 0$, arbitrariamente elegido, existe un número $N$ tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad (12), y esto significa que el teorema 13 es válido.

**Teorema 14.** *Si $a_n \to A$, y $b$ es un número positivo fijo distinto de la unidad, entonces $b^{a_n} \to b^A$.*

**Demostración.** Por cuanto $a_n \to A$, entonces para cualquier $\varepsilon_1 > 0$ existe un número $N$ tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad

$$A - \varepsilon_1 < a_n < A + \varepsilon_1. \tag{13}$$

Sea $b > 1$. Como la función $y = b^x$ es creciente, de la desigualdad (13) se deduce que $b^{A-\varepsilon_1} < b^{a_n} < b^{A+\varepsilon_1}$, es decir, para cualquier $\varepsilon_1 > 0$ existe un número $N$ tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $b^{A-\varepsilon_1} < b^{a_n} < b^{A+\varepsilon_1}$. Tomemos un número positivo arbitrario $\varepsilon$ y designemos $\varepsilon_1 = \log_b\left(1 + \frac{1}{b^A}\right)$. En este caso para el $\varepsilon_1$ elegido existe un número $N$ tal, que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad

$$b^{A-\varepsilon_1} < b^{a_n} < b^{A+\varepsilon_1}.$$

Está claro que

$$b^{A-\varepsilon_1} = \frac{b^A}{b^{\varepsilon_1}} = \frac{b^A}{\left(1+\frac{\varepsilon}{b^A}\right)} = \frac{b^{2A}}{b^A+\varepsilon} > \frac{b^{2A}-\varepsilon^2}{(b^A+\varepsilon)} = b^A - \varepsilon;$$

$$b^{A+\varepsilon_1} = b^A b^{\varepsilon_1} = b^A\left(1 + \frac{\varepsilon}{b^A}\right) = b^A + \varepsilon.$$

Hemos mostrado, pues, que para cualquier $\varepsilon$ positivo existe un número $N$ tal que para todo $n > N$ se verifica la desigualdad $b^A - \varepsilon < b^{a_n} < b^A + \varepsilon$, es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} b^{a_n} = b^A$.

Para el caso en que $0 < b < 1$ la demostración del teorema se realiza de modo análogo.

**Teorema 15.** *Una sucesión creciente y acotada superiormente $\{a_n\}$ tiene límite.*

**Teorema 16.** *Una sucesión decreciente y acotada inferiormente $\{a_n\}$ tiene límite.*

Omitiremos aquí la demostración de estos teoremas.

**Ejemplos** de la aplicación de los teoremas sobre los límites de las sucesiones numéricas.

Hállese el límite de una sucesión $\{a_n\}$, si $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$.

Escribamos la fórmula para el término general en la forma $a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)}$. Aplicando sucesivamente los teoremas sobre los límites de un cociente, producto y de una suma, obtenemos

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{4}{n}\right)\right]} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\right)}{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}\right)\left(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}\right)} = \frac{(1+0)(1+0)}{(1+0)(1+0)} = 1.$$

2. Hállese el límite de la sucesión $d_n$, si $d_n = \frac{a_1n^2+b_1n+c_1}{a_2n^2+b_2n+c_2}$ ($a_2 \neq 0$ y $a_2n^2+b_2n+c_2 \neq 0$, cualquiera que sea $n$).

Al dividir por $n^2$ el numerador y denominador en la expresión para $d_n$ y al aplicar los mismos teoremas que se han usado en el ejemplo antecedente, obtenemos

$$\lim_{n\to+\infty} d_n + \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1+b_1\frac{1}{n}+c_1\frac{1}{n^2}}{a_2+b_2\frac{1}{n}+c_2\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_1+b_1\frac{1}{n}+c_1\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_2+b_2\frac{1}{n}+c_2\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_1 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_1}{n} + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{c_1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to+\infty} a_2 + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_2}{n} + \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{c_2}{n^2}} = \frac{a_1+0+0}{a_2+0+0} = \frac{a_1}{a_2}.$$

3. Aclárese si tiene límite la sucesión $\{a_n\}$, siendo $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Al estudiar el binomio de Newton hemos mostrado la validez de la desigualdad $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, es decir, hemos mostrado que la sucesión $\{a_n\}$ es tal, que $a_n < a_{n+1}$, cualquiera que sea $n$. De la condición $a_n < a_{n+1}$ es fácil obtener que $a_{n_1} < a_{n_2}$ para cualesquiera $n_1 < n_2$, es decir, la sucesión $\{a_n\}$ es creciente. Mostremos ahora que para todo $n$ se verifica la desigualdad $a_n < 3$, es decir, que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente.

En efecto,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n=$$
$$=1+\frac{n}{n}+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\ldots\frac{[n-(n-1)]}{n}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}=$$
$$=1+1+1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\ldots$$
$$\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\ldots\frac{1}{n}<$$
$$<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots=3.$$

Según el teorema 15, una sucesión creciente y acotada superiormente tiene límite. Este límite se denota acostumbradamente con la letra $e$. Por consiguiente,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

La definición del número $e$ permite calcularlo con cualquier grado de exactitud. En el curso de análisis matemático se muestra que el número $e$ es irracional.

4. Aclárese si tiene límite la sucesión $\{a_n\}$ que viene dada mediante la relación recurrente $a_1=\sqrt{2}$ y $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$, cualquiera que sea $n\geqslant 2$.

Aclaremos ante todo si está acotada o no la sucesión citada. Mostremos que $a_n<2$. La demostración se realizará por el método de inducción matemática.

a) Cuando $n=1$, la desigualdad $a_1<2$ se verifica, puesto que $a_1=\sqrt{2}$.

b) Supongamos que la desigualdad se verifica para $n=k$, es decir, $a_k<2$.

c) Mostremos que de este hecho proviene la validez de la desigualdad para $n=k+1$. Efectivamente, $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<\sqrt{2+2}=2$. Por consiguiente, la desigualdad $a_n<2$ se verifica para cualquier $n$.

Mostremos que la sucesión $\{a_n\}$ es creciente. Para ello será suficiente mostrar que $a_n<a_{n+1}$, es decir, demostrar la desigualdad $a_n<\sqrt{2+a_n}$.

Esta desigualdad es equivalente a la desigualdad $a_n^2<2+a_n$, la cual puede escribirse así: $(a_n+1)(a_n-2)<0$. Por cuanto

$0 < a_n < 2$, la última desigualdad es obvia y, por tanto, se verifica la desigualdad $a_n < a_{n+1}$ que es equivalente a ella. Así pues, la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente; quiere decir tiene un límite que se denotará con $c$. Mostremos que $c = 2$. En efecto, haciendo uso de la relación recurrente $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, tenemos $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2 + a_{n-1}}$.

Apliquemos el teorema (cuya demostración no se da aquí): *si una sucesión $\{b_n\}$ es tal, que $b_n \geqslant 0$, y tiene límite, entonces* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{b_n} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} b_n}$. Resulta que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{2 + a_{n-1}} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} 2 + \lim_{n\to+\infty} a_{n-1}}$. Por cuanto $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{n-1}$, resulta que es preciso buscar $c$ partiendo de la condición $c = \sqrt{2 + c}$. Elevando esta igualdad al cuadrado, obtenemos que $c = 2$.

5. Supongamos que $a > 1$ y $\alpha$ es un número positivo irracional. Recordemos la definición de $a^\alpha$. Por cuanto cualquier número irracional es una fracción decimal infinita, entonces, al romper dicha fracción en cierto paso, obtenemos el valor aproximado del número citado por defecto, y al añadir a la última cifra la unidad, obtenemos el valor aproximado del mismo número por exceso. Quiere decir, para aproximar el número $\alpha$, que es igual a $p, q_1 q_2 q_3 \ldots q_n, \ldots, \ldots$, obtenemos dos sucesiones

$$p,\ p + \frac{q_1}{10},\ p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100},\ \ldots,\ p + \frac{q_1}{10} + \ldots + \frac{q_n}{10^n},\ \ldots$$

$$p+1,\ p + \frac{q_1+1}{10},\ p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2+1}{100},\ \ldots,\ p + \frac{q_1}{10} + \ldots + \frac{q_n+1}{10^n},\ \ldots$$

Designemos con $b_n$ el término general de la primera sucesión y con $c_n$, el término general de la segunda sucesión. En este caso se hace claro que la sucesión $\{b_n\}$ es creciente y acotada superiormente (aunque sea por el número $(p + 1)$), y la sucesión $c_n$ es decreciente y acotada inferiormente (aunque sea por el número $p$). Veamos la sucesión $a^{b_n}$. Por cuanto $a > 1$, entonces, de la condición $b_n < b_{n+1}$ se desprende que $a^{b_n} < a^{b_{n+1}}$. Como la sucesión $\{b_n\}$ es creciente, la última desigualdad significa que la sucesión $\{a^{b_n}\}$ es creciente. Además, $a^{b_n} < a^{p+1}$, es decir, la sucesión $a^{b_n}$ está acotada superiormente. De acuerdo con el teorema 15, la sucesión $a^{b_n}$ tiene un límite que se denotará con $A$. De modo análogo se muestra que la sucesión $a^{c_n}$ tiene un límite que se denotará con $B$. Demostremos que $A = B$.

Analicemos la sucesión $\{a^{c_n} - a^{b_n}\}$ y mostremos que $\lim_{n\to+\infty} (a^{c_n} - a^{b_n}) = 0$. En efecto, al aplicar los teoremas sobre los límites, tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} (a^{c_n} - a^{b_n}) = \lim_{n\to+\infty} [a^{b_n} (a^{c_n - b_n} - 1] =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} a^{b_n} \cdot \lim_{n\to+\infty} (a^{c_n - b_n} - 1) = \lim_{n\to+\infty} a^{b_n} (a^{\lim_{n\to+\infty} (c_n - b_n)} - \lim_{n\to+\infty} 1) =$$

$$= A (a^0 - 1) = 0,$$

puesto que $\lim_{n\to+\infty}(c_n-b_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{10^{n-1}}=0$. Ahora, de la condición de que $\lim_{n\to+\infty}(a^{c_n}-a^{b_n})=0$ obtenemos $\lim_{n\to+\infty}a^{c_n}-\lim_{n\to+\infty}a^{b_n}=0$, es decir, $A=B$.

Así pues, ambas sucesiones tienen un mi mo límite, el cual tiene por expresión el número $a^{\alpha}$.

Cuando $a>1$ y $\alpha<0$, o bien $0<a<1$ y $\alpha$ es un número cualquiera irracional, los razonamientos son iguales.

6. Sea dada una sucesión $\{a_n\}$. Podemos construir otra sucesión $\{S_n\}$, regiéndonos por la regla

$$S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\ \ldots,\ S_n=a_1+a_2+\ldots$$
$$\ldots+a_n,\ \ldots.$$

Se puede escribir formalmente la suma infinita

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots,$$

que se denomina *serie*. La sucesión $\{S_n\}$ lleva el nombre de *sucesión de sumas parciales de la serie citada*. En ciertos casos la sucesión $\{S_n\}$ puede tener un límite finito $S$. Entonces se dice que la serie *converge* y el número $S$ recibe el nombre de *suma* de la serie. Demos a conocer algunos ejemplos.

6.1. Sea dada una progresión geométrica $\{a_n\}$ con el primer término $a_1$ y con la razón $q$ tal, que $0<|q|<1$. Examinemos la serie $a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}+\ldots$ y formemos la sucesión $\{S_n\}$ de las sumas parciales de dicha serie. La fórmula para calcular $S_n$ con cualquier $n$ es

$$S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Aplicando los teoremas sobre los límites y tomando en consideración que $0<|q|<1$, tenemos: $\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}\cdot q^n\right]=$ $=\frac{a_1}{1-q}-\frac{a_1}{1-q}\lim_{n\to+\infty}q^n$. Por cuanto $\lim_{n\to-\infty}q^n=0$ para $0<|q|<1$, resulta que $\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}$, es decir, por definición, la suma de la serie escrita se presentará por el número $\frac{a_1}{1-q}$. Por consiguiente, la suma de una progresión geométrica para $0<|q|<1$ es igual al primer término dividido por la diferencia entre la unidad y la razón de la progresión, es decir, $S=\frac{a_1}{1-q}$.

6.2. Recurriendo a la definición de suma de una serie, se puede ofrecer otra definición del número irracional $\alpha$.

Supongamos que un número irracional positivo $\alpha$ es igual a $p$,

$q_1q_2 \ldots q_n \ldots$ Entonces

$$p,\ p+\frac{q_1}{10},\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100},\ \ldots,\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_n}{10^n},\ \ldots$$

es una sucesión de aproximaciones decimales del número $\alpha$ por defecto, y

$$p+1,\ p+\frac{q_1+1}{10},\ p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2+1}{100},\ \ldots,$$

$$p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_n+1}{10^n},\ \ldots$$

es una sucesión de aproximaciones decimales del número $\alpha$ por exceso. Estas sucesiones tienen un mismo límite que se denomina número $\alpha$. Por eso, el número $\alpha$ puede ser definido como la suma de la serie

$$\alpha=p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_n}{10^n}+\ldots.$$

Observemos que si $\alpha$ es una fracción periódica infinita

$$\alpha=p,\ q_1q_2 \ldots q_k(p_1p_2 \ldots p_m),$$

entonces $\alpha$ también puede definirse como suma de la serie

$$\alpha=p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_k}{10^k}+$$
$$+\frac{p_1}{10^{k+1}}+\frac{p_2}{10^{k+2}}+\ldots+\frac{p_m}{10^{k+m}}+\frac{p_{m+1}}{10^{k+m+1}}+\ldots$$

6.3. Demostremos la regla por medio de la cual una fracción decimal periódica se transforma en una fracción ordinaria. Sea dada una fracción decimal periódica positiva, cuya parte entera es igual, para brevedad, a cero. En este caso dicha fracción decimal es igual a la ordinaria en la que el numerador es un número igual a la diferencia entre los números formados por las cifras que preceden al segundo período y las que preceden al primer período; el denominador es un número en cuya representación la cifra 9 se repite tantas veces cuntas cifras tiene el período, y luego, tras los nueve, el cero se repite tantas veces cuantas cifras se tienen entre la coma y el primer período.

**Ejemplos.**

$$0{,}3\,(14)=\frac{314-3}{990}=\frac{311}{990};\ 0{,}127\,(31)=\frac{12731-127}{99000}=\frac{12604}{99000}=\frac{3151}{24750}.$$

**Demostración.** Supongamos que la fracción $\alpha$ tiene por expresión

$$\alpha=0,\ q_1q_2 \ldots q_k(p_1p_2 \ldots p_m)$$

Escribamos esta fracción en forma de la suma de la serie

$$\alpha=\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}+\ldots+\frac{q_k}{10^k}+\frac{p_1}{10^{k+1}}+\ldots+\frac{p_m}{10^{k+m}}+$$
$$+\frac{p_{m+1}}{10^{k+m+1}}+\ldots+\frac{p_{2m}}{10^{k+2m}}+\ldots$$

Realicemos las transformaciones evidentes de esta serie

$$\alpha=\frac{1}{10^k}(10^{k-1}q_1+10^{k-2}q_2+\dots+q_k)+$$
$$+\frac{1}{10^{k+m}}(10^{m-1}p_1+10^{m-2}p_2+\dots+p_m)+$$
$$+\frac{1}{10^{k+2m}}(10^{m-1}p_1+10^{m-2}p_2+\dots+p_m)+\dots$$
$$+\frac{1}{10^{k+nm}}(10^{m-1}p_1+10^{m-2}p_2+\dots+p_m)+\dots$$

En esta serie los términos, a partir del segundo, forman una progresión geométrica cuya razón es $\frac{1}{10^m}$. Aplicando la fórmula para la suma de una progresión geométrica con la razón $q$ tal, que $0<|q|<1$, obtenemos

$$\alpha=\frac{1}{10^k}(10^{k-1}q_1+10^{k-2}q_2+\dots+q_k)+$$
$$+\frac{\frac{1}{10^{k+m}}(10^{m-1}p_1+10^{m-2}p_2+\dots+p_m)}{1-\frac{1}{10^m}}=$$
$$=\frac{1}{10^k}(10^{k-1}q_1+10^{k-2}q_2+\dots+q_k)+\frac{10^{m-1}p_1+10^{m-2}p_2+\dots+p_m}{10^k(10^m-1)}=$$
$$=\frac{(10^m-1)(10^{k-1}q_1+10^{k-2}q_2+\dots+q_k)+(10^{m-1}p^1+10^{m-2}p_2+\dots+p_m)}{10^k(10^m-1)}=$$
$$=\frac{10^{m+k-1}q_1+10^{m+k-2}q_2+\dots+10^mq_k+10^{m-1}p_1+10^{m-2}p_2+\dots+p_m}{10^k(1^m-1)}-$$
$$-\frac{10^{k-1}q_1+10^{k-2}q_2+\dots+q_k}{10^k(10^m-1)}=\frac{\overline{q_1q_2\dots q_kp_1p_2\dots p_m}-\overline{q_1q_2\dots q_k}}{\underbrace{99\dots9}_{m\text{ veces}}\ \underbrace{00\dots0}_{k\text{ veces}}}$$

y la regla de transformación queda demostrada.

## § 3. Límite de una función

Sea dada una función $y=f(x)$. Un punto $a$ ($a$ es un número finito) se llama *punto de espesamiento* del campo de existencia de la función $y=f(x)$, siempre que en cualquier intervalo, tan pequeño como se quiera, del eje $Ox$ en el que está contenido el punto $a$ exista por lo menos un punto del campo de existencia de dicha función que sea distinto de $a$. Observemos que el propio punto $a$ puede no pertenecer al campo de definición de la función.

**Ejemplos. 1.** Para la función $y=2^x$ cualquier punto del eje $Ox$ es el punto de espesamiento de esta función, y todos los puntos de espesamiento pertenecen al campo de existencia de la función.

2. Para la función $y = \frac{1}{x}$ cualquier punto del eje $Ox$ es el punto de espesamiento de esta función. El punto $x = 0$ es también un punto de espesamiento, mas este punto no pertenece al campo de existencia de la función.

3. Sea dada la función $y = \sqrt{\log_2 \operatorname{sen} x}$; el campo de existencia de esta función es $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera. La función citada no tiene puntos de espesamiento.

La definición de punto de espesamiento se da, a menudo, en otros términos. Para cualquier $\delta > 0$ el intervalo $a - \delta < x < a + \delta$ del eje $Ox$ se denomina *entorno* $\delta$ *del punto* $a$.

Un punto $a$ ($a$ es un número finito) se denomina *punto de espesamiento* del campo de existencia de la función $y = f(x)$, si en todo entorno $\delta$ del punto $a$ está contenido por lo menos un valor de $x$, distinto de $a$, perteneciente al campo de existencia de la función.

Si el punto $a$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$, existe una infinidad de sucesiones $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, pertenecientes al campo de existencia de la función $y = f(x)$, que tienen por límite el punto $a$.

**Ejemplos.** 1. Sea dada la función $y = 2^x$ y supongamos que $a = 1$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función dada. Las sucesiones de puntos $\{x_n\}$, tales, por ejemplo, como:

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}; \quad x_n = 1 + \frac{2}{7n}; \quad x_n = 1 + \frac{1}{n^2};$$

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}; \quad x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}; \quad x_n = 1 - \frac{1}{n(n+1)}, \text{ etc.}$$

son sucesiones de puntos pertenecientes al campo de existencia de dicha función, con la particularidad de que en cada caso $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

2. Sea dada la función $y = \frac{1}{x}$ y supongamos que el punto $a = 0$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función dada. Las sucesiones de puntos $\{x_n\}$ tales, por ejemplo, como

$$x_n = \frac{1}{n}; \quad x_n = \frac{1}{2^n}; \quad x_n = \frac{1}{4^n + n};$$

$$x_n = -\frac{1}{n}; \quad x_n = \frac{1}{5^{n(n+1)}}; \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \text{ etc.}$$

son sucesiones de puntos pertenecientes al campo de existencia de esta función, con la particularidad de que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Mostremos que para cualquier función $y = f(x)$ y para todo punto de espesamiento $a$ del campo de existencia de dicha función se puede construir al menos una sucesión de punto $\{x_n\}$ del campo de existencia tal, que se verifique $x_n \neq a$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

Elijamos un número positivo $\delta_1$ y tomemos el entorno del punto $a$ que corresponde al número $\delta_1$. Escojamos dentro del entorno cualquier punto $x_1 \neq a$ del campo de existencia de la función mencionada. Tomemos ahora un número positivo $\delta_2$ tal, que sea $\delta_2 < \delta_1$ y $\delta_2 < |a - x_1|$. En el entorno del punto $a$, correspondiente al número $\delta_2$, tomemos un punto cualquiera $x_2 \neq a$ del campo de existencia de la función, etc. De resultas, obtendremos una sucesión de puntos:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

La sucesión de puntos positivos $\{\delta_n\}$ se elige de modo tal, que ella satisfaga, además de las condiciones ya citadas, una condición más: $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$. Mostremos que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. En efecto para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número $N$ tal, que $\delta_N < \varepsilon$. Empleándose el método indicado de elegir $\delta_n$ y $x_n$, tenemos para cualquier $n > N$ que $\delta_n < \delta_N$, y $|x_n - a| < \delta_n$. Así pues, para $\varepsilon > 0$, elegido al azar, podemos encontrar un $N$ tal, que para todo $n > N$ se verifique $|x_n - a| < \varepsilon$, lo que precisamente significa que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

De la construcción se ve que para cualquier función $y = f(x)$ y para todo punto de espesamiento $a$ del campo de existencia de dicha función se pueden construir una infinidad de puntos del campo de existencia tales, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

Cabe notar que a toda sucesión de este tipo $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ... le corresponde una sucesión $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$

Supongamos que el punto $a$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$. El número $A$ recibe el nombre de *límite de esta función, cuando $x$ tiende a $a$*, siempre que para cualquier sucesión de puntos del campo de existencia de la función $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, que tiene por límite el número $a$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ tenga por límite el número $A$. En este caso se escribe $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Como límite de una función puede intervenir tanto un número finito $A$, como también $(+\infty)$ ó $(-\infty)$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$), si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ tal, que $x_n \to a$, tenemos $f(x_n) \to +\infty$ ($f(x_n) \to -\infty$).

**Ejemplos.** 1. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to 1} 2^x = 2$.

Con este fin mostremos que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{x_n} = 2$ para cualquier sucesión de puntos del campo de existencia de la función $\{x_n\}$, $x_n \neq 1$ tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$, es decir, que para cualquier sucesión de esta índole y para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $N$ tal, que con cualquier $n > N$ se verifican las desigualdades $2 - \varepsilon < 2^{x_n} < 2 + \varepsilon$. Observemos que la condición $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ significa que para todo número $\varepsilon_1 > 0$ existe un número $N_1$ tal, que con cualquier $n > N_1$ se verifican las desigualdades $1 - \varepsilon_1 < x_n < 1 + \varepsilon_1$.

Supongamos ahora que está dado un número positivo $\varepsilon$. Elijamos un número $\varepsilon_1 = \log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Está claro que $\varepsilon_1 > 0$. Tomemos ahora cualquier sucesión de puntos del campo de existencia de la función $\{x_n\}$, $x_n \neq 1$, tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. Entonces para esta sucesión $\{x_n\}$ existe un número $N_1$ tal, que con todo $n > N_1$, se verifican las desigualdades $1 - \varepsilon_1 < x_n < 1 + \varepsilon_1$, y, por tanto, las desigualdades

$$2^{x_n} < 2^{1+\varepsilon_1} = 2 \cdot 2^{\varepsilon_1} = 2 \cdot 2^{\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} = 2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = = 2 + \varepsilon;$$

$$2^{x_n} > 2^{1-\varepsilon_1} = \frac{2}{2^{\varepsilon_1}} = \frac{2}{2^{\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}} = \frac{2}{1+\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{4}{2+\varepsilon} > \frac{4-\varepsilon^2}{2+\varepsilon} = 2 - \varepsilon.$$

Así pues, para cualquier sucesión de puntos del campo de existencia de la función dada $\{x_n\}$, $x_n \neq 1$, tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ se ha encontrado un número $N = N_1$ tal, que se verifica la desigualdad $|2^{x_n} - 2| < \varepsilon$, cualquier que sea $n > N$, es decir, se ha mostrado que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{x_n} = 2$ para cualquier sucesión del campo de existencia de la función $\{x_n\}$, $x_n \neq 1$, tal, que $\lim\limits_{\to+\infty} x_n = 1$. Por consiguiente, $\lim\limits_{x_n\to 1} 2^{x_n} = 2$.

2. Demuéstrese que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Supongamos que $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$, es una sucesión cualquiera de puntos del campo de existencia de la función tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Esto significa que para todo número $\varepsilon_1 > 0$ existe un número $N$ tal, que con cualquier $n > N$ se verifican las desigualdades $0 < < |x_n| < \varepsilon_1$. Elijamos arbitrariamente un número positivo $B$ y designemos $\varepsilon_1 = \frac{1}{B}$. Entonces para cualquier sucesión $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$, tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ existe tal número $N$ que se verifican las desigualdades $0 < |x_n| < \frac{1}{B}$, cualquiera que sea $n > N$, es decir, que se verifica la desigualdad $\frac{1}{|x_n|} > B$.

Así pues, para cualquier $B > 0$ tenemos un número $N$ tal, que se verifica la desiguadad $\frac{1}{|x_n|} > B$, cualquiera que sea $n > N$, es decir, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{|x_n|}$ para cualquier sucesión de puntos del campo de existencia de la función $\{x_n\}$, $x_n \neq 0$, tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. Por consiguiente, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Diremos que $(+\infty)$ es un *punto de espesamiento* para el campo de existencia de la función $y = f(x)$, si para cualquier número grande positivo $B$ existe por lo menos un valor de $x$, perteneciente al campo de existencia de la función $y = f(x)$, tal, que sea $x > B$.

Diremos que $(-\infty)$ es un *punto de espesamiento* para el campo de existencia de la función $y = f(x)$, si para cualquier número negativo $B$ tal. que $|B|$ es un número tan grande como se quiera, existe por lo menos un valor de $x$, perteneciente al campo de existencia de la función $y = f(x)$, tal, que sea $x < B$.

En los casos en que $(+\infty)$ o $(-\infty)$ son puntos de espesamiento para el campo de existencia de la función $y = f(x)$, resulta también fácil mostrar que se puede construir una sucesión de puntos $\{x_n\}$ del campo de existencia de la función $y = f(x)$, la cual tendrá por límite $(+\infty)$ ó $(-\infty)$, respectivamente, y la definición de límite de la función $y = f(x)$ puede extenderse a los casos de tales puntos de espesamiento.

**Ejemplo.** Para la función $y = 1 + \frac{1}{x}$, tanto $(+\infty)$ como $(-\infty)$ son puntos de espesamiento y $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Para la búsqueda del límite resulta difícil emplear la definición aducida de límite de una función. Por eso, con mayor frecuencia se emplea otra definición de límite, que es equivalente a la dada, y que está basada en el llamado lenguaje «ε, δ».

Supongamos que el punto $a$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$, y $a$ es un número entero. El número $A$ se denomina *límite de la función* $y = f(x)$, *cuando* $x$ *tiende hacia* $a$, siempre que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un $\delta > 0$ tal, que para todo $x$ del campo de existencia de esta función y tal que satisfaga la condición $0 < |x - a| < \delta$, se verifique la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. En este caso se escribe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Sea $(+\infty)$ un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$. El número $A$ se llama *límite de la función* $y = f(x)$ *al tender* $x$ *a* $(+\infty)$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $M > 0$ tal, que con todo $x$ del campo de existencia de la función $y = f(x)$ y tal que satisface la condición $M < x$ se verifica la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. En este caso se escribe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Sea $(-\infty)$ un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$. El número $A$ se llama *límite de la función* $y = f(x)$ *al tender* $x$ *a* $(-\infty)$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número $M < 0$ tal, que con todo $x$ del campo de existencia de la función $y = f(x)$ y tal que satisface la condición $x < M$ se verifica la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$. En este caso se escribe $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Análogamente, se pueden dar las definiciones: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, etc. A título de ejemplo aduzcamos una de tales definiciones.

Sea $a$ un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$ y supongamos que $a$ es un número finito. Diremos que la función $y = f(x)$ *tiene por límite* $(+\infty)$ *cuando* $x$ *tiende hacia* $a$, si para cualquier número $B > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal, que con todo $x$ del campo de existencia de la función y tal que satisface la condición $0 < | x - a | < \delta$ se verifica la desigualdad $f(x) > B$. En este caso se escribe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Hallemos los límites de ciertas funciones, valiéndonos de la definición de límite en el lenguaje «$\varepsilon$, $\delta$».

**Ejemplos:** 1. Sea dada una función $y = 2^x$ y supongamos que $a = 1$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de esta función. Demuéstrese que $\lim\limits_{x \to 1} 2^x = 2$.

Tomemos un número positivo $\varepsilon$ arbitrario y elijamos un número $\delta > 0$. Elijamos, por ejemplo, $\delta = \log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$; está claro que $\delta > 0$. Tomemos ahora cualquier $x$ tal, que $0 < | x - 1 | < \delta$, es decir, cualquier $x \neq 1$ del intervalo $1 - \delta < x < 1 + \delta$.

Es evidente que

$$2^x < 1^{1+\delta} = 2 \cdot 2^{\delta} = 2 \cdot 2^{\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} = 2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2 + \varepsilon,$$

$$2^x > 2^{1-\delta} = 2 \cdot 2^{-\delta} = 2 \cdot 2^{-\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{2}{1+\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$= \frac{4}{2+\varepsilon} > \frac{4-\varepsilon^2}{2+\varepsilon} = 2 - \varepsilon.$$

Estas desigualdades significan que $| 2^x - 2 | < \varepsilon$. Así pues, para cualquier $\varepsilon > 0$ se ha encontrado tal $\delta > 0$, que $| 2^x - 2 | < \varepsilon$ para cualquier $x$ del campo de existencia de la función, con la particularidad de que $0 < | x - 1 | < \delta$. Por definición, esto significa precisamente que $\lim\limits_{x \to 1} 2^x = 2$.

2. Está dada la función $y = \frac{1}{| x |}$ y el punto $a = 0$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de esta función. Demuéstrese que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{| x |} = +\infty$.

$x \to 1$

Tomemos arbitrariamente un número $B > 0$ y elijamos un número $\delta > 0$, por ejemplo, $\delta = \frac{1}{B}$. Está claro que si se verifica $0 < | x - 0 | = | x | < \delta$, tendremos $\frac{1}{| x |} > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\frac{1}{B}} B$. Así pues, para cual-

quier $B > 0$ se ha encontrado un número $\delta > 0$ tal, que $\frac{1}{|x|} > B$ con todo $x$ del campo de existencia de la función en consideración y tal, que $0 < |x - 0| < \delta$. Por definición, esto significa precisamente que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$.

Se han dado anteriormente dos diferentes definiciones de límite de una función: una en el lenguaje de sucesiones y la otra, en el lenguaje de "$\varepsilon$, $\delta$". Estas defínciones son equivalentes, es decir, si una función tiene límite en el sentido de la definición en el lenguaje de sucesiones, ella tiene el mismo límite en el sentido de la definición en el lenguaje "$\varepsilon$, $\delta$", y viceversa.

Mostemos la equivalencia de dos definiciones de límite de una función en el caso cuando $x = a$ es un punto finito de espesamiento y cuando la función tiene límite finito $A$.

1. Sea $A$ el límite de la función $y = f(x)$ para $x$ que tiende al punto $a$ en el sentido de la definición en el lenguaje "$\varepsilon$, $\delta$".

Tomemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$. Entonces, se encontrará tal número $\delta > 0$, que para cualquier $x$, que pertenece al campo de existencia de la función y que satisface las desigualdades $0 < |x - a| < \delta$, se verifique la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Examinemos una sucesión $\{x_n\}$ que converge hacia $a$ y es tal, que $x_n \neq a$, y $x_n$ pertenece al campo de existencia de la función $y = f(x)$ para cualquier $n$. Entonces, para el número indicado $\delta > 0$, dependiente de $\varepsilon$, existe un número $N$ tal, que con todo $n > N$ se verifican las desigualdades $0 < |x_n - a| < \delta$. Por consiguiente, cualquiera que sea $n > N$, se verificará la desigualdad $|f(x_n - A)| < \varepsilon$. Mas, por cuanto $\varepsilon > 0$ se eligió arbitrariamente, esto significa precisamente que $f(x_n) \to A$, es decir, para cualquier sucesión $\{x_n\}$ (del campo de existencia de la función $y = f(x)$), convergente hacia $a$, la sucesión $f(x_n)$ converge hacia $A$; en el lenguaje de sucesiones esto es la definición de límite de una función.

2. Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ en el sentido de la definición en el lenguaje de sucesiones. Mostremos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ en el sentido de la definición en el lenguaje "$\varepsilon$, $\delta$".

La demostración se realiza por reducción al absurdo. Supongamos que $f(x_n) \to A$ para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de puntos del campo de existencia de una función tal, que $x_n \to a$, con la particularidad de que $x_n \neq a$. Supongamos que para $f(x)$ el número $A$ no es el límite, cuando $x \to a$, en el sentido de la definición en el lenguaje "$\varepsilon$, $\delta$", es decir, existe tal número positivo $\varepsilon$, que para cualquier $\delta$ positivo se encontrará por lo menos un número $\bar{x}$ tal, que $0 < |\bar{x} - a| < \delta$, pero $|f(\bar{x}) - A| \geqslant \varepsilon$.

Elijamos ahora una sucesión $\{\delta_n\}$ tal, que $\delta_n \to 0$. Por hipótesis, para cualquier $\delta_n$ existe un número $\bar{x}_n$ tal, que $0 < |\bar{x}_n - a| < \delta_n$, pero $|f(\bar{x}_n - A)| \geqslant \varepsilon$. Veamos una sucesión $\bar{x}_1$,

$\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \ldots$ Es obvio que $\bar{x}_n \to a$, pero $f(\bar{x}_n)$ no tiende a $A$, puesto que $|f(\bar{x}_n) - A| \geq \varepsilon$ para todos los $n$.

Por consiguiente, se ha encontrado una sucesión $\{\bar{x}_n\}$, $\bar{x}_n \neq a$, del campo de existencia de la función $y = f(x)$ tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \bar{x}_n = a$, pero la sucesión $\{f(\bar{x}_n)\}$ no tiende a $A$. Esto contradice la condición de que para cualquier sucesión de puntos del campo de existencia de la función $\{x_n\}$, $x_n \neq a$, tal, que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ se verifica obligatoriamente $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$, es decir, nuestra suposición no es cierta, y es lícita la afirmación de que la convergencia en el lenguaje "$\varepsilon$, $\delta$" se predetermina por la convergencia en el lenguaje de sucesiones.

La equivalencia de dos definiciones de límite de una función está demostrada para el caso en que el punto de espesamiento $a$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ son números finitos. En los demás casos la equivalencia se demuestra de modo análogo.

Para los límites de las funciones son válidas las propiedades que son análogas a las de los límites de las sucesiones. Cabe notar que prácticamente no hay necesidad de demostrarlas, pues de la definición de límite de una función con ayuda de las sucesiones se desprende que todos los teoremas demostrados para las sucesiones quedan válidos también para las funciones. Enunciemos algunos de estos teoremas.

**Teorema 1.** *Supongamos que el punto $a$ es un punto de espesamiento de la parte común de los campos de existencia de las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y que existen ambos límites finitos* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. *Entonces las funciones $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)\,g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ también tienen límites finitos que son iguales a $A + B$, $A - B$, $AB$, $\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$ en el caso de un cociente), respectivamente.*

**Teorema 2.** *Supongamos que el punto $a$ ($a$ es un número finito) es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$, y si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, donde $A > 0$, entonces existe un $\delta$ del punto $a$ tal, que para todo $x \neq a$, perteneciente al campo de existencia y a dicho entorno, la función $y = f(x)$ es positiva.*

La propiedad análoga es válida también, si $A < 0$.

**Teorema 3.** *Si el punto $a$ ($a$ es un número finito) es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$ y si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, donde $A$ es un número finito, entonces existe tal entorno $\delta$ del punto $a$ que para todo $x \neq a$, perteneciente al campo de existencia y a dicho entorno, la función $f(x)$ está acotada, es decir, existe tal número $M > 0$ y tal $\delta > 0$ que para todo $x$ del campo de existencia de la fun-*

*ción, tal, que* $0 < |x - a| < \delta$, *se verifica la desigualdad* $|f(x)| \leqslant \leqslant M$.

**Teorema 4.** *Supongamos que a es un punto de espesamiento de la parte común de los campos de existencia de las funciones* $y = f(x)$, $y = p(x)$, $y = g(x)$, *y que para todo* $x \neq a$, *perteneciente a cierto entorno* $\delta$ *del punto a y a la parte común de los campos de existencia de las funciones mencionadas se verifican las desigualdades* $f(x) \leqslant p(x) \leqslant \leqslant g(x)$. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, *entonces también* $\lim\limits_{x\to a} p(x) = A$.

**Ejemplo.** Demostremos, haciendo uso del teorema 4, que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. La función $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es par y por esta razón analicémosla en el intervalo $(0, \pi/2)$. Demostremos que en dicho intervalo tiene lugar la desigualdad doble

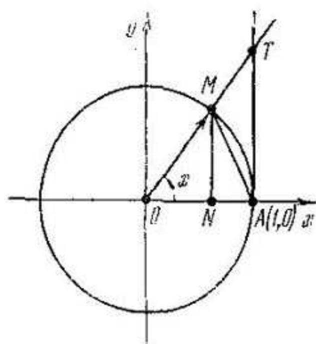


Fig. 185

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Tomemos el arco $AM$ de la circunferencia unidad que corresponde al ángulo, cuya medida radial es igual a $x$ (fig. 185). En este caso $|OA| = 1$, $|MN| = \operatorname{sen} x$, $|ON| = \cos x$. La semejanza de los triángulos $OAT$ y $ONM$ nos sugiere que $|AT| = \frac{|AT|}{|OA|} = \frac{|MN|}{|ON|} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$. Por cuanto el área del triángulo $ONM$ es inferior al área del sector $OAM$, y el área de dicho sector es inferior al área del triángulo $OAT$, tenemos la desigualdad doble

$$\frac{1}{2}|OA|\,|MN| < \frac{1}{2}|OA|\,|\breve{AM}| < \frac{1}{2}|OA|\cdot|AT|$$

o bien

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Dividamos por $\operatorname{sen} x$ esta desigualdad doble. Por cuanto $\operatorname{sen} x > 0$, los signos de la desigualdad no varían y llegamos a que la desigualdad doble

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

es válida.

Por cuanto dentro del intervalo en consideración $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tenemos $x > 0$, $\cos x > 0$, $\operatorname{sen} x > 0$, tenemos las desigualdades equiva-

lentes

$$1<\frac{x}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x}<1; \quad \frac{x}{\operatorname{sen} x}<\frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x}>\cos x,$$

y esto sirve de demostración de la desigualdad (1).

Por ser pares las funciones $y=\cos x$ e $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, la desigualdad doble (1) se verificará también en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. En efecto, si $x \in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, entonces $0<(-x)<\frac{\pi}{2}$ y la igualdad (1) tiene la forma

$$\cos(-x)<\frac{\operatorname{sen}(-x)}{(-x)}<1.$$

Pero $\cos(-x)=\cos x$, $\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x}=\frac{-\operatorname{sen} x}{-x}=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Por consiguiente, la desigualdad (1) se verifica también para $x \in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Así pues, para cualquier $x \in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tenemos $\cos x<$ $<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1$. Para poder emplear ahora el teorema 4, hace falta demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} \cos x=1$. Hagamos uso de la definición de límite de una función en el lenguaje "$\varepsilon$, $\delta$", es decir, demostremos que para todo $\varepsilon>0$ existe tal $\delta>0$ que cuando $0<|x|<\delta$, tendremos $|1-\cos x|<\varepsilon$. A título de $\delta$ tomemos la magnitud $\sqrt{2\varepsilon}$, entonces $|1-\cos x|=1-\cos x=2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}=2\left(\operatorname{sen} \frac{|x|}{2}\right)^2<$ $<2\left(\frac{|x|}{2}\right)^2<\varepsilon$, lo que se trataba de demostrar.

Así pues, la función $y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ está encerrada, cuando $x \in\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup$ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, entre 1 $y$ cos $x$, y, por cuanto $\lim\limits_{x \to 0} \cos x=1$, entonces, de acuerdo con el teorema 4, obtenemos $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$.

La definición de límite de una función $y=f(x)$ estipula que en el punto $a$ (punto de espesamiento del campo de existencia de la función) $x$ puede aproximarse hacia $a$ según una ley cualquiera.

A veces es necesario analizar el límite de la función $y=f(x)$ en las condiciones en que $x$ (del campo de existencia de la función), al tender hacia $a$, queda siempre a la derecha del punto $a$. En este caso suele decirse que la función $y=f(x)$ tiene *límite por la derecha* y se escribe $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)=A$, donde $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ es o bien un número finito, o bien $(+\infty)$, o bien $(-\infty)$. Análogamente se define el *límite por la izquierda*: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)=A$.

**Ejemplos. 1.** $\lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sign} x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$ (fig. 186).

2. $\lim\limits_{x\to 2+0} \frac{x}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty$ (fig. 187).

3. La función $y = x^2$ tiene límite en cualquier punto $a$ tanto por la derecha como por la izquierda, con la particularidad de que $\lim\limits_{x\to a+0} x^2 = \lim\limits_{x\to a-0} x^2 = a^2$.

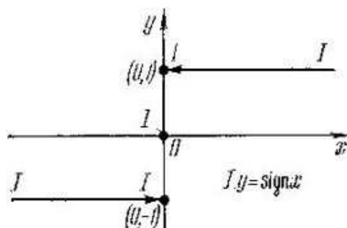



Fig. 186

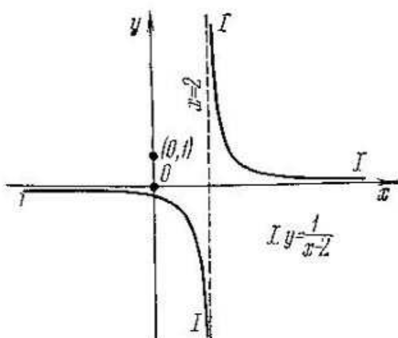



Fig. 187

Sean dadas la función $y = f(x)$ y su gráfica. Si existen un punto $M(x_0, f(x_0))$ y una recta tal, que aunque sea en una de las condiciones: $x \to a$, $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ la dis-

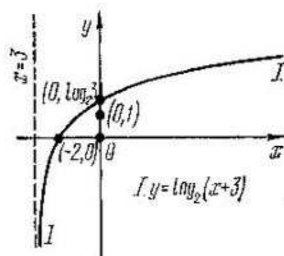



Fig. 188

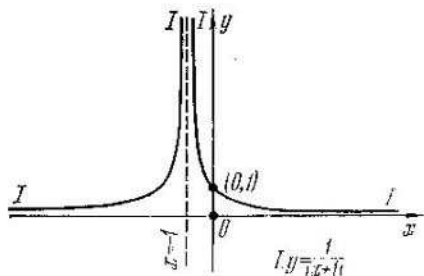



Fig. 189

tancia entre los puntos de la gráfica y la recta, a partir del punto $M$, disminuye ilimitadamente, dicha recta lleva el nombre de asíntota de la función $y = f(x)$.

Si se cumple al menos una de las condiciones:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty,$$

la asíntota $x = a$ se denomina *vertical*.

**Ejemplos.** 1. La función $y = \log_2(x+3)$ tiene la asíntota vertical $x = -3$, puesto que $\lim\limits_{x\to -3+0} \log_2(x+3) = -\infty$ (fig. 188).

2. La función $y = \dfrac{1}{|x+1|}$ tiene la asíntota vertical $x = -1$, puesto que $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{1}{|x+1|} = +\infty$ (fig. 189).

$x\to -3+0$

Si se cumple al menos una de las condiciones $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$, la asíntota $y = b$ se denomina *horizontal*.

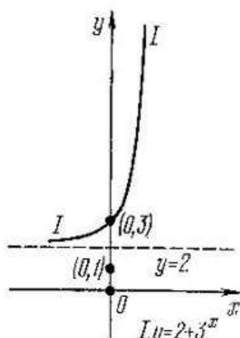


Fig. 190

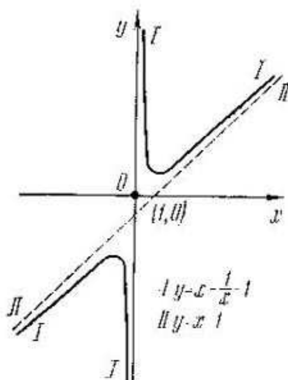


Fig. 191

**Ejemplos.** 1. La función $y = 2 + 3^x$ tiene la asíntota horizontal $y = 2$, puesto que $\lim\limits_{x\to -\infty} (2 + 3^x) = 2$ (fig. 190).

2. La función $y = \dfrac{1}{x}$ tiene la asíntota horizontal $y = 0$, puesto que $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Si se cumple al menos una de las condiciones: $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$ o $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0$, la asíntota $y = kx + b$ se denomina *oblicua*.

**Ejemplo.** La función $y = x + \dfrac{1}{x} - 1$ tiene la asíntota oblicua $y = x - 1$ (fig. 191).

## § 4. Continuidad de una función

Una función $y = f(x)$ *es continua en el punto* $x_0$, si:

1) $x_0$ es el punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$;

2) $x_0$ pertenece al campo de existencia de la función $y = f(x)$;

3) existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (es decir, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, donde $y_0 = f(x_0)$).

**Ejemplos.** 1. La función $y = 2^x$ es continua, por ejemplo, en el punto $x_0 = 1$.

En efecto, $x_0 = 1$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función; el punto $x_0 = 1$ pertenece al campo de existencia de la función, quiere decir, $y_0 = 2^1 = 2$; existe $\lim\limits_{x \to 1} 2^x = 2$; y, por fin, $\lim\limits_{x \to 1} 2^x = 2 = y_0$.

2. La función $y = \log_3 x$ es continua, por ejemplo, en el punto $x_0 = 3$.

En efecto, $x_0 = 3$ es un punto de espesamiento del campo de existencia de la función; $x_0 = 3$ pertenece al campo de existencia de la función, quiere decir, $y_0 = \log_3 3 = 1$; existe $\lim\limits_{x \to 3} \log_3 x = 1$; por fin, $\lim\limits_{x \to 3} \log_3 x = 1 = y_0$.

3. La función $y = \frac{1}{x-2}$ no es continua en el punto $x_0 = 2$, puesto que se ha infringido, por ejemplo, la condición 2, es decir, el punto $x_0 = 2$ no pertenece al campo de existencia de la función.

4. La función $y = \operatorname{sign} x$ no es continua en el punto $x_0 = 0$, puesto que se ha infringido, por ejemplo, la condición 3, es decir, no existe $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign} x$.

5. Es fácil comprobar que toda función elemental fundamental es continua en cualquier punto de su campo de existencia.

Teniendo en cuenta las definiciones, equivalentes entre sí, de límite de una función en un punto (que se han aducido anteriormente) demos a conocer dos definiciones más de continuidad de una función en un punto.

Una función $y = f(x)$ se llama *continua en el punto* $x_0$, si para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal, que para todo $x$ del campo de existencia, que satisface la desigualdad $|x - x_0| < \delta$, se verifica la desigualdad $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Una función $y = f(x)$ se llama *continua en el punto* $x_0$, si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de valores del argumento del campo de existencia, que converge hacia el punto $x_0$, la sucesión correspondiente de valores de la función $\{f(x_n)\}$ converge hacia el valor $f(x_0)$.

Haciendo uso de la segunda definición de continuidad de una función en un punto, mostremos, por ejemplo, que la función $y = 2^x$ es continua, por ejemplo, en el punto $x_0 = 1$ (es decir, mostremos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal, que para todo $x$ que sastisface la desigualdad $|x - 1| < \delta$, se verifica la desigualdad $|2^x - 2^1| < \varepsilon$). En efecto, para cualquier número $\varepsilon > 0$ tomemos, por ejemplo, el número $\delta = \log_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Entonces, para cualquier número $x$, que satisface la condición $|x - 1| < \delta$, es

decir, para cualquier $x$ del intervalo $(1 - \delta); 1 + \delta)$; se verificarán las desigualdades

$$2^x < 2^{1+\delta} = 2^1 \cdot 2^\delta = 2 \cdot 2^{\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} = 2\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) = 2 + \varepsilon;$$

$$2^x > 2^{1-\delta} = 2 \cdot 2^{-\delta} = 2 \cdot [2^{\log_2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}]^{-1} = \frac{2}{1+\frac{\varepsilon}{2}} =$$

$$= \frac{4}{2+\varepsilon} > \frac{4-\varepsilon^2}{2+\varepsilon} = 2 - \varepsilon.$$

Estas desigualdades significan que $|2^x - 2^1| < \varepsilon$ para todo $x$ tal, que $|x - 1| < \delta$, es decir, de acuerdo con la segunda definición de continuidad de una función en un punto, la función $y = 2^x$ es continua en el punto $x_0 = 1$.

Haciendo uso de la tercera definición de continuidad de una función en un punto, mostremos, por ejemplo, que la función $y = [x]$ no es continua en el punto $x = 2$, es decir, indiquemos por lo menos una sucesión de valores del argumento $\{x_n\}$ tal, que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 2$, mientras que la sucesión correspondiente de valores de la función $\{[x_n]\}$ es tal, que $\lim\limits_{n \to +\infty} [x_n] \neq [2]$. Así es, por ejemplo, la sucesión de valores del argumento, cuyo término general

$x_n = 2 - \frac{1}{n}$. En efecto, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$, pero, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[2 - \frac{1}{n}\right] = 1$, y, por consiguiente, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[2 - \frac{1}{n}\right] = 1 \neq 2 = [2]$, lo que se trataba de demostrar.

**Teorema 1.** *Supongamos que las funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$ son continuas en el punto $x_0$. Entonces, serán continuas también en el mismo punto las funciones $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x) g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$* (la última será continua a condición de que $g(x_0) \neq 0$).

Este teorema representa un corolario de los teoremas sobre el límite de las funciones en un punto.

Por ejemplo, de acuerdo con el teorema 1, la función $y = \operatorname{sen} x + x^2$ es continua, digamos, en el punto $x_0 = 1$. En efecto, el punto $x_0 = 1$ pertenece al campo de existencia tanto de la función $y = \operatorname{sen} x$ como de la función $y = x^2$. Por cuanto cualquier función elemental fundamental es continua en cada punto de su campo de existencia, entonces las funciones $y = \operatorname{sen} x$ e $y = x^2$ son continuas en el punto $x_0 = 1$. Entonces, de acuerdo con el teorema 1, la función $y = \operatorname{sen} x + x^2$ será también continua en el punto $x_0 = 1$.

A la par con la continuidad (ya analizada) de una función en un punto se estudia también la así llamada continuidad unilateral de

una función en un punto. Demos a conocer las definiciones correspondientes.

Una función $y = f(x)$ *es continua por la derecha en el punto* $x_0$, siempre que:

1) $x_0$ sea un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y = f(x)$;

2) $x_0$ pertenezca al campo de existencia de la función $y = f(x)$;

3) exista el $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, denotado $f(x_0 + 0)$;

4) $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

De modo análogo se define la continuidad de una función en el punto $x_0$ por la izquierda. Está claro que si la función $y = f(x)$ es continua en el punto $x_0$, será simultáneamente continua en dicho punto por la derecha y por la izquierda, y $f(x_0 + 0) = f(x_0) = f(x_0 - 0)$

**Ejemplos.** 1. Una función $y = [x]$ es continua en el punto $x_0 = 1$ por la derecha, puesto que $\lim\limits_{x \to 1+0} [x] = 1 = [1]$.

2. Una función $y = \operatorname{sign} x$ no es continua en el punto $x_0 = 0$ ni por la derecha ni por la izquierda. Efectivamente, aunque la función $y = \operatorname{sign} x$ tiene en el punto $x_0 = 0$ tanto el límite por la derecha ($\lim\limits_{x \to 0+0} \operatorname{sign} x = 1$) como el por la izquierda ($\lim\limits_{x \to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$), ninguno de ellos coincide con el valor de la función $y = \operatorname{sign} x$ en el punto $x_0 = 0$ ($\operatorname{sign} 0 = 0$).

3. Una función $y = 2^x$ es continua en cualquier punto $x$ tanto por la derecha, como por la izquierda.

Una función $y = f(x)$ tiene en un punto $x_0$ una *discontinuidad*, si no se cumple aunque sea una de las condiciones 1 . . . 4 de la definición de continuidad de una función en un punto $x_0$.

**Ejemplo.** La función $y = \operatorname{sign} x$ tiene en el punto $x_0 = 0$ una discontinuidad. En efecto, la igualdad $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign} x_0 = 0$ no se verifica, puesto que no existe límite de la función $y = \operatorname{sign} x$ en el punto $x_0 = 0$ (aunque existen límites unilaterales, éstos no son iguales entre sí y ninguno de ellos es igual al valor de la función en el punto $x_0 = 0$).

Supongamos que la función $y = f(x)$ tiene en un punto $x_0$ una discontinuidad. Por definición, el punto $x_0$ se denomina *punto de discontinuidad de primera especie*, si en dicho punto la función $y = f(x)$ tiene límite finito tanto por la derecha, como por la izquierda. En todos los demás casos de discontinuidad el punto $x_0$ se denominará *punto de discontinuidad de segunda especie*.

**Ejemplos.** 1. Para la función $y = [x]$ el punto $x_0 = 1$ es un punto de discontinuidad de primera especie. En efecto, la función $y = [x]$ tiene en el punto $x_0 = 1$ una discontinuidad, puesto que la función $y = [x]$ no tiene límite en el punto $x_0 = 1$, pero tiene límite finito por la derecha ($\lim\limits_{x \to 1+0} [x] = 1$) y por la izquierda ($\lim\limits_{x \to 1-0} [x] = 0$)

2. Para la función $y=\frac{1}{x}$ el punto $x_0=0$ es un punto de discontinuidad de segunda especie. En efecto, la función $y=\frac{1}{x}$ tiene en el punto $x_0=0$ una discontinuidad, puesto que el punto $x_0=0$ no pertenece al campo de existencia de la función. Además, la función $y=\frac{1}{x}$ no tiene en el punto $x_0=0$ límite finito por la derecha $\left(\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty\right)$.

3. Para la función $y_0=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ el punto $x_0=0$ es un punto de discontinuidad de segunda especie. Efectivamente, la función $y=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ tiene en el punto $x_0=0$ una discontinuidad, puesto que el punto $x_0=0$ no pertenece al campo de existencia de la función. Además, la función $y=\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no tiene en el punto $x_0=$ $=0$ límite por la derecha, ya que pueden indicarse dos sucesiones de valores del argumento a la derecha, $\{x_n\}$ y $\{x'_n\}$ tales, que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty}x'_n=0$, pero las sucesiones correspondientes de valores de la función $\left\{\operatorname{sen}\frac{1}{x_n}\right\}$ y $\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x'_n}\right)\right\}$ son tales que $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x'_n}\right)$. Tales, por ejemplo, serán una sucesión con término general $x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ y una sucesión con término general $x'_n=\frac{1}{\pi n}$.

Una función $y=f(x)$ se llama *continua en cierto intervalo* $(a, b)$, si es continua en cada punto de dicho intervalo. Con otras palabras, una función $y=f(x)$ es continua en el intervalo $(a, b)$, siempre que:

1) todo el intervalo pertenezca al campo de existencia de la función $y=f(x)$;

2) cualquier punto $x_0$ de dicho intervalo sea un punto de espesamiento del campo de existencia de la función $y=f(x)$;

3) en todo punto $x_0$ del intervalo citado exista $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

4) en todo punto $x_0$ del intervalo citado se verifique la igualdad $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, es decir, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=y_0$, donde $y_0=f(x_0)$.

**Ejemplos.** 1. La función $y=\cos x$ es continua en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

2. La función $y=\log_3 x$ es continua en el intervalo $(0, +\infty)$.

3. La función $y=\frac{1}{x-1}$ es continua en el intervalo $(1; +\infty)$; además es continua en el intervalo $(-\infty, 1)$, pero no lo es, por ejemplo, ni en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, ni tampoco en el intervalo $[1, +\infty)$, ni en el $(0, +\infty)$.

## § 5. Derivada de una función

Analicemos una función $y = f(x)$. Supongamos que $x$ es un punto de espesamiento de la función, perteneciente a su campo de existencia, y $f(x)$, el valor de la función en este punto. Pasemos del valor $x$ a otro valor del argumento, $x_1 \neq x$, el cual también pertenece al campo de existencia. La diferencia $x_1 - x$ (designémosla por $\Delta x$) se llama *incremento del argumento en el punto* $x$. El valor de la función, correspondiente al valor del argumento $x_1 = x + \Delta x$, se designará por $f(x + \Delta x)$.

La diferencia $f(x + \Delta x) - f(x)$ se denomina *incremento de la función en el punto* $x$, correspondiente al incremento del argumento $\Delta x$ en este punto y se designa por $\Delta y$ o bien por $\Delta f(x)$:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Según sea el tipo de función, su incremento $\Delta y$ puede ser nulo, un número positivo o negativo. El incremento del argumento $\Delta x$ también puede ser positivo o negativo, pero $\Delta x \neq 0$.

**Ejemplos. 1.** Hállense los incrementos de la función $y = |x|$ en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$, considerando que $|\Delta x| < 1$.

a) Si $x = 0$, tenemos

$$\Delta y = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x| = \begin{cases} \Delta x, & \text{si } \Delta x > 0, \\ -\Delta x, & \text{si } \Delta x < 0. \end{cases}$$

b) Si $x = 1$, tenemos

$$\Delta y = |1 + \Delta x| - |1| = 1 + \Delta x - 1 = \Delta x, \text{ si } |\Delta x| < 1.$$

c) Si $x = -1$, tenemos

$$\Delta y = |-1 + \Delta x| - |-1| = 1 - \Delta x - 1 = -\Delta x, \text{ si } |\Delta x| < 1.$$

2. Hállense los incrementos de la función $y = \operatorname{sen} x$ en los puntos $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$ y en un punto arbitrario $x$.

a) Si $x = 0$, tenemos $\Delta y = \operatorname{sen}(0 + \Delta x) - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} \Delta x$.

b) Si $x = \frac{\pi}{3}$, tenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 2 \operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

c) Si $x = -\frac{\pi}{3}$, tenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

d) Si $x$ es un punto cualquiera, tenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

3. Hállense los incrementos de la función $y = \sqrt{x}$ en los puntos $x = 0$, $x = 1$ y en un punto cualquiera $x \in (0, +\infty)$.

a) Si $x = 0$, entonces el incremento $\Delta x > 0$ (en virtud del campo de existencia de la función $y = \sqrt{x}$), por lo cual

$$\Delta y = \sqrt{0 + \Delta x} - \sqrt{0} = \sqrt{\Delta x}.$$

b) Si $x = 1$, entonces

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{1} = \frac{(\sqrt{1+\Delta x} - 1)(\sqrt{1+\Delta x} + 1)}{(\sqrt{1+\Delta x} + 1)} = \frac{\Delta x}{\sqrt{1+\Delta x} + 1},$$

donde $|\Delta x| < 1$.

c) Si $x$ es un punto cualquiera ($x > 0$), entonces

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}},$$

dondo $|\Delta x| < x$.

Supongamos que la función $y = f(x)$ está definida en cierto entorno del punto $x$. Demos al argumento $x$ un incremento $\Delta x$ (en este caso se presupone que el punto $x + \Delta x$ pertenece al campo de existencia de la función). Entonces la función recibirá un incremento $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Se denomina *derivada* de la función $y = f(x)$ en el punto $x$ el límite de la razón del incremento de esta función al incremento del argumento en el mismo punto, cuando el incremento del argumento tiende a cero, si el límite mencionado existe y es finito.

La derivada de la función $y = f(x)$ en un punto $x$ se denota con $y'$ (se lee "$y$ prima") o bien $\frac{dy}{dx}$. (se lee "derivada de $y$ respecto a $x$), o bien $\frac{df(x)}{dx}$. El proceso de búsqueda de la derivada de una función recibe el nombre de diferenciación.

Así pues, por definición:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

es decir,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

De la definición se deduce que la derivada de una función $y = f(x)$ en el punto $x$ es un número que depende del valor considerado de $x$, y no depende de $\Delta x$. Además, la derivada de la función $y = f(x)$ puede existir no en todos los puntos del campo de existencia de esta función. Veamos el conjunto $M$ de todos los puntos del

campo de existencia de la función $y = f(x)$ en los cuales dicha función tiene derivada. Al calcular la derivada de la función $y = f(x)$ en cualquier punto $x \in M$, llegamos a que a todo número $x \in M$ se le pone en correspondencia un número $f'(x)$. Con otras palabras, mediante la correspondencia citada se define la función, denotada por $y' = f'(x)$, cuyo campo de definición es el conjunto $M$.

Hallemos las derivadas de ciertas funciones elementales.

1. Supongamos que en el intervalo $(a; b)$ la función $y = f(x)$ tiene valor constante $c$, es decir, $y = c$ en $(a; b)$. Entonces $y' = (c') = 0$ para cualquier $x$ de $(a; b)$.

En efecto, para todo $x$ de $(a; b)$ tenemos: $\Delta y = c - c = 0$, por consiguiente, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, de donde $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

2. Sea $y = x$, entonces $y' = 1$ para cualquier $x$.

En efecto, para todo $x$ tenemos $\Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta x$, y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

3. Sea $y = x^n$ ($n$ es un número natural fijo), entonces $y' = nx^{n-1}$ para cualquier $x$.

En efecto, para todo $x$ tenemos, de acuerdo con la fórmula para el binomio de Newton (véase el cap. II):

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \\ + \ldots + (\Delta x)^n,$$

de donde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \Delta x \left[ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2} + \right. \\ \left. + \Delta x \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-3} + \ldots + \Delta x^{n-2} \right]$$

y, por tanto, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$, es decir $(x^n)' = nx^{n-1}$.

4. Sea $y = \operatorname{sen} x$, entonces $y' = \cos x$ para cualquier $x$. En efecto, para todo $x$ tenemos

$$\Delta y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

y, por tanto,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right).$$

Hemos demostrado anteriormente que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$. Demostremos ahora que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$, es decir, demostremos

que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal, que $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) - \cos x\right| < \varepsilon$, si $\left|\frac{\Delta x}{2}\right| < \delta$. Para demostrar la afirmación tomemos $\delta = \varepsilon$ y obtenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) - \cos x\right| = \left|\,2 \operatorname{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{4}\right) \operatorname{sen}\frac{\Delta x}{4}\,\right| < 2\left|\frac{\Delta x}{4}\right| < \varepsilon;$$

por consiguente, $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.

5. Sea $y = \cos x$, entonces $y' = -\operatorname{sen} x$ para cualquier $x$. En efecto, para todo $x$ tenemos

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2 \operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2} \operatorname{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

En este caso

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot (-1) \operatorname{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right),$$

y, por cuanto $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

(la demostración es la misma que en el ejemplo anterior), entonces $y' = -\operatorname{sen} x$, es decir, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

Si es preciso hallar la derivada de una función $y = f(x)$ en cierto punto fijo $x = x_0$, entonces, por regla general, se halla primeramente la derivada de dicha función en cualquier punto $x$, donde la derivada existe, es decir, se halla $y' = f'(x)$, y luego, se sustituye, en lugar de $x$ arbitrario, $x = x_0$. La derivada en el punto fijo $x_0$ se designa por

$$f'(x_0),\ y'(x_0),\ \frac{df(x_0)}{dx},\ \text{o bien}\ f'|_{x=x_0},\ y'|_{x=x_0},\ \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

**Ejemplo.** Hállese la derivada de la función $y = \operatorname{sen} x$ en los puntos $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{2}$.

Por cuanto $y' = \cos x$, tenemos

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ y'(\pi) = \cos\pi = -1,\ y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \\ = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

La resolución de los ejemplos en que se hallan las derivadas se simplifica considerablemente, si se emplean las reglas de diferenciación, las cuales se desprenden de los teoremas de límites. Veamos algunos de ellos.

En lo que sigue se supone que el argumento $x$ varía en la parte común de los campos de existencia de las funciones que participan en las siguientes **afirmaciones.**

1. *Si en un punto $x$ existen derivadas finitas de la función $y = v(x)$ y de la función $y' = u(x)$, entonces en el punto $x$ la derivada de la suma de estas funciones existe y es igual a la suma de las derivadas de las funciones citadas*, es decir, $(v(x) + u(x))' = v'(x) + u'(x)$.

Efectivamente, demos a $x$ un incremento $\Delta x$. En este caso las funciones $y = v(x)$ e $y = u(x)$ recibirán incrementos iguales a $\Delta v(x)$ y $\Delta u(x)$ respectivamente, mientras que la función $y = v(x) + u(x)$ adquirirá un incremento $\Delta y = [(v(x) + \Delta v(x)) + (u(x) + \Delta u(x))] - (v(x) + u(x)) = \Delta v(x) + \Delta u(x)$. Por cuanto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta u(x)}{\Delta x},$$

entonces

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} \right) = v'(x) + u'(x),$$

puesto que el límite de cada sumando existe y es finito.

**Ejemplo.** $(x^2 + \operatorname{sen} x)' = (x^2)' + (\operatorname{sen} x)' = 2x + \cos x$.

2. *Si en un punto $x$ existen derivadas finitas de las funciones $y = v(x)$ e $y = u(x)$, entonces en el punto $x$ la derivada de la diferencia entre dichas funciones existe y es igual a la diferencia entre las derivadas de las funciones citadas, es decir,* $(v(x) - u(x))' = v'(x) - u'(x)$.

La demostración de la afirmación 2 es análoga a la de la afirmación antecedente, razón por la cual se omite en esta obra.

**Ejemplo.** $(x^4 - \cos x)' = (x^4)' - (\cos x)' = 4x^3 + \operatorname{sen} x$.

Haciendo uso de las fórmulas para la derivada en un punto de la suma y de la diferencia de dos sumandos, es fácil obtener la fórmula para hallar la derivada en un punto de la suma algebraica de cualquier número de sumandos. Escribamos, por ejemplo, esta fórmula para la suma algebraica de cinco sumandos:

$$(u + v - p + g - t)' = u' + v' - p' + g' - t'.$$

**Ejemplo.** $(x + x^5 - x^8 + \operatorname{sen} x - \cos x)' = 1 + 5x^4 - 8x^7 + \cos x + \operatorname{sen} x$.

3. *Si en un punto $x$ existen derivadas finitas de las funciones $y = v(x)$ e $y = u(x)$, entonces en dicho punto existe también la derivada de la función $y = v(x)\,u(x)$, con la particularidad de que*

$$y' = (v(x)\,u(x))' = v'(x)\,u(x) + v(x)\,u'(x)$$

Efectivamente, demos a $x$ un incremento $\Delta x$. Entonces las funciones $y = v(x)$ e $y = u(x)$ reciben sus incrementos respectivos y en

este caso

$$\Delta y = (v(x) + \Delta v(x))(u(x) + \Delta u(x)) - v(x)u(x) =$$
$$= v(x)\Delta u(x) + u(x)\Delta v(x) + \Delta v(x)\Delta u(x).$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}u(x) + \frac{\Delta u(x)}{\Delta x}v(x) + \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\Delta u(x).$$

Aplicando los teoremas sobre el límite de una suma y del producto, tenemos

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}u(x)\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}v(x)\right) +$$
$$+ \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\Delta u(x)\right) = u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} +$$
$$+ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta u(x)).$$

Teniendo presente que $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} = v'(x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = u'(x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u(x) = 0$, obtenemos $y' = (v(x)u(x))' = v'(x)u(x) + v(x)u'(x)$, lo que se trataba de demostrar.

En particular, si $y = v(x) = c$ ($c$ es una constante), entonces $(cu(x))' = c'u(x) + cu'(x) = cu'(x)$, es decir, el factor constante puede sacarse del signo de la derivada: $y' = (cu(x))' = cu'(x)$.

**Ejemplo.** $y = 5x^3 + 7x^2 - 4$.

$$y' = (5x^3 + 7x^2 - 4)' = 5(x^3)' + 7(x^2)' - (4)' = 15x^2 + 14x.$$

Empleando la fórmula de la derivada en un punto para dos factores, resulta fácil obtener la fórmula para el caso del producto de varios factores.

4. *Si en un punto $x$ existen derivadas finitas de las funciones $y = v(x)$ e $y = u(x)$, y si la función $y = u(x)$ es distinta de cero en este punto, entonces en el mismo punto existe también la derivada de la función $y = \frac{v(x)}{u(x)}$, con la particularidad de que* $y' = \left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)' = \frac{v'(x)u(x) - u'(x)v(x)}{u^2(x)}$.

En efecto, comuniquemos a $x$ un incremento $\Delta x$. Entonces las funciones $y = v(x)$ e $y = u(x)$ recibirán incrementos y en este caso

$$\Delta y = \frac{v(x) + \Delta v(x)}{u(x) + \Delta u(x)} - \frac{v(x)}{u(x)} = \frac{u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)}{u(x)(u(x) + \Delta u(x))},$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} - v(x)\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}}{u(x)(u(x) + \Delta u(x))}.$$

Aplicando los teoremas sobre los límites de un cociente y de un producto y teniendo presente la continuidad de la función $y = u(x)$ en el punto $x$, tenemos que $y' = \frac{v'(x)\,u(x) - u'(x)\,v(x)}{u^2(x)}$.

**Ejemplos.** 1. $y = \operatorname{tg} x$.

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)' \cos x - (\cos x)' \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ es decir, } (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. $y = \operatorname{ctg} x$.

$$y' = (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(\cos x)' \operatorname{sen} x - (\operatorname{sen} x') \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}, \text{ es decir, } (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Empleando las fórmulas para las derivadas de las funciones elementales fundamentales y las reglas de diferenciación, se puede hallar la derivada de cualquier función que representa la superposición de las funciones elementales fundamentales. He aquí la tabla 31 de las derivadas para las funciones elementales fundamentales:

*Tabla 31*

| $y = f(x)$ | $y' = f'(x)$ | $y = f(x)$ | $y' = f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $y = c$ ($c$ es una constante) | $y' = 0$ | $y = \ln x$ | $y' = \frac{1}{x}$ |
| $y = x$ | $y' = 1$ | $y = \operatorname{sen} x$ | $y' = \cos x$ |
| $y = x^2$ | $y' = 2x$ | $y = \cos x$ | $y' = -\operatorname{sen} x$ |
| $y = x^n$ ($n$ es un número natural) | $y' = nx^{n-1}$ | $y = \operatorname{tg} x$ | $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $y = x^n$ ($n$ es un número natural) | $y' = -nx^{-n-1}$ | $y = \operatorname{ctg} x$ | $y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$ |
| $y = x^\alpha$ ($\alpha > 0$) | $y' = \alpha x^{\alpha - 1}$ | $y = \operatorname{arcsen} x$ | $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $y = x^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) | $y' = -\alpha x^{-\alpha-1}$ | $y = \arccos x$ | $y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) | $y' = a^x \ln a$ | $y = \operatorname{arctg} x$ | $y' = \frac{1}{1+x^2}$ |
| $y = e^x$ | $y' = e^x$ | $y = \operatorname{arcctg} x$ | $y' = \frac{-1}{1+x^2}$ |
| $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) | $y' = \frac{1}{x \ln a}$ | | |

## *Ejercicios*

Escríbanse los primeros diez términos de una sucesión si su término general se da mediante la fórmula (1 . . . 6):

1. $a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{x^n}$, donde $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$.

2. $a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{x_n}$, donde $x_n = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$.

3. $a_n = \operatorname{sen} \frac{1}{x_n}$, donde $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}$.

4. $a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$. 5. $a_n = \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n$. 6. $a_n = \left(\frac{1-2n}{2n}\right)^n$.

Escríbase la fórmula del término general de una sucesión, para la cual vienen dadas sus primeros ocho términos (7 . . . 12):

7. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \frac{1}{5040}, \frac{1}{40320}, \ldots$

8. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots$

9. $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots$

10. $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, 8, \ldots$

11. $1, -1, 1, 5, 1, -5, 1, 9, \ldots$

12. $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{3}{8}, \ldots$

**13.** Una sucesión $\{c_n\}$ está dada mediante la fórmula del término general $c_n = 10n^2 + 4$. Hállese $c_{k+4}$.

**14.** ¿Será el número $(-21)$ un término de la sucesión $\{b_n\}$ dada mediante la fórmula del término general $b_n = n^2 - 10n$? Hállese su número, si la respuesta es afirmativa.

Aclárese si es monótona una sucesión dada mediante la siguente fórmula del término general (15 . . . 23):

15. $a_n = n^2 + 2n$. 16. $a_n = \dfrac{1}{n^2+n}$.

17. $a_n = \cos n$. 18. $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

19. $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n}$. 20. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

21. $a_n - 2n^2 = 2n$. $a_n = |10 - 2n^2|$.

23. $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$.

Aclárese sie stá acotada una sucesión dada por la siguiente fórmula del término general 24 . . . 29):

24. $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$. 25. $a_n = \dfrac{n^4}{2^n}$.

26. $a_n = \dfrac{n^2+3n-1}{n!}$. 27. $a_n = \dfrac{n+2n^2}{n}$.

28. $a_n = (-1)^n \sqrt{n}$. 29. $a_n = \dfrac{n+\cos n}{2n+3}$.

Dése un ejemplo de sucesión (30 . . . 35):

**30.** Acotada superiormente, pero no acotada inferiormente.

**31.** Acotada inferiormente, pero no acotada superiormente.

**32.** No acotada superiormente ni inferiormente.

**33.** Acotada, pero sin límite.

**34.** Que no sea creciente.

**35.** Que no sea decreciente.

**36.** ¿Existe un intervalo numérico del tipo $[a, b]$, al cual pertenezcan todos los términos de la sucesión $\{a_n\}$ dada por la fórmula del término general $a_n = \frac{5+4n}{1+n}$?. Indíquese tal intervalo, si la respuesta es afirmativa.

**37.** Hállese el quinto término de una progresión aritmética $\{c_n\}$, si $c_1 = -50$ y $d = 1{,}2$.

**38.** Hállese la suma de los primeros 30 términos de la progresión aritmética $\{a_n\}$, si $a_1 = -2{,}5$ y $d = 3$.

**39.** Se conocen dos términos de la progresión aritmética $\{b_n\}$: $b_7 = 4{,}9$ y $b_{17} = 10{,}9$. ¿Cuál es el número de términos de la progresión, cada uno de los cuales es inferior a 20?

**40.** ¿Es el número 35 un término de la progresión aritmética $-47, -44, -41, \ldots$? Hállese su número en el caso de la respuesta afirmativa.

**41.** Demuéstrese que si $a$, $b$ y $c$ son tres términos sucesivos de una progresión aritmética, entonces $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

**42.** Hállese el decimoquinto término de una progresión geométrica $\{a_n\}$, si $a_1 = -0{,}001$ y $q = 10$.

**43.** Se conocen el octavo término y la razón de una progresión geométrica $\{b_n\}$: $b_8 = 2{,}56$ y $q = 2$. Hállese la suma de los primeros dieciséis términos de la progresión.

**44.** Se conocen dos términos de una progresión geométrica $\{b_n\}$: $b_1 = 0{,}1$ y $b_3 = 2{,}5$. ¿Será esta progresión una suceción monótona?

**45.** Se conocen el primer término y la razón de una progresión geométrica $\{a_n\}: a_1 = -81$ y $d = -\frac{1}{3}$. ¿Es esta progresión una sucesión monótona?

**46.** Demuéstrese que el producto de los primeros $n$ términos de una progresión geométrica es igual a $a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, donde $a_1$ es el primer término de la progresión y $q$, su razón.

**47.** Demuéstrese que si $ab$, $b^2$, $c^2$ son términos sucesivos de una progresión aritmética, entonces $b$, $c$ y $(2b - a)$ son términos sucesivos de una progresión geométrica.

**48.** Las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son tales, que:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 0{,}1a_n + 14;$$
$$b_1 = 5,\ b_{n+1} = b_n + 4;$$
$$c_1 = 5,\ c_{n+1} = -3c_n.$$

¿Cuál de estas sucesiones es: 1) una progresión aritmética; 2) una progresión geométrica?

**49.** Hállese la suma de una progresión geométrica infinita, si su primer término es $a_1 = \sqrt{2}$ y la razón $q = \frac{1}{2}$.

Demuéstrese, valiéndose de la definición de límite, las siguientes igualdades (50 . . . 55):

**50.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+n^2} = 0.$ **51.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{4n+5} = \frac{3}{4}.$

**52.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-3n^2}{(2n+1)(n+1)} = -\frac{3}{2}.$ **53.** $\lim\limits_{n\to-\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0.$

54. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)}{(n^2-4)}=1.$ 55. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n+1}{n}=0.$

Calcúlese (56 . . . 76):

56. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-2n}{2+6{,}5n}.$ 57. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n-4}{1-7n}\cdot\frac{n-3}{5+2n}.$

58. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{3n+1}}{5-0{,}9n}.$ 59. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3n}{2n-1}-\frac{n^2}{4n^2-1}\right).$

60. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{1-n^2+n^4}}{2n-1+3n^2}$ 61. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2-2n}-n).$

62. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3n+1}{4n+5}\right)^n$ 63. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n.$

64. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$ 65. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2-1}{(n-1)(n+5)}\right)^n.$

66. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n+n}{3^n-2n}.$ 67. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{3x}.$

68. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{6x}{\operatorname{sen} 9x}.$ 69. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$

70. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x.$ 71. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} 5x\cos x-\operatorname{sen} x\cos 5x).$

72. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2+x}.$ 73. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+1}.$

74. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{(x-1)(x+6)}.$ 75. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},$

76. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sen} 3x \operatorname{ctg} 4x).$

Hállese la derivada de la siguiente función (77 . . . 90):

77. $y=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg}(1-x).$ 78. $y=2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos(2x+1).$

79. $y=\cos 2x \operatorname{sen}(3x+5).$ 80. $y=\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}(x-1)}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x-1)}.$

81. $y=\log_{1/2}\sqrt{2x-1}.$ 82. $y=\log_3(2x^2-3x+1).$

83. $y=\log_{10}\cos x.$ 84. $y=x^{-\sqrt{3}}-x^{\sqrt{3}}.$

85. $y=(2-x)^{4{,}9}.$ 86. $y=\frac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

87. $y=e^{2x}\operatorname{tg} x.$ 88. $y=\frac{e^x}{\cos x}.$

89. $y=e^{\cos x^2}$ 90. $y=(\sqrt{2}x^4-3x^{\sqrt{3}})e^{3x}.$

CAPÍTULO

# X

# SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En el capítulo III ya se han examinado los sistemas de ecuaciones algebraicas con varias variables. En el presente capítulo se analiza la teoría general de los sistemas de ecuaciones lineales con varias variables.

Hemos de notar que una ecuación algebraica $P(x, y, \ldots, t) = 0$ (véase el cap. III) se llama lineal si $P(x, y, \ldots, t)$ es un polinomio de grado no superior al primero y entero respecto de las variables $x, y, \ldots, t$.

## § 1. Matrices

Se denomina *matriz de dimensiones* $m \times n$ el conjunto de $mn$ números dispuestos en forma de una tabla rectangular compuesta por $m$ filas y $n$ columnas.

Por ejemplo, la tabla rectangular de números

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{2} \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de dimensiones $2 \times 3$; la tabla rectangular de números

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3/4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

es la matriz de dimensiones $3 \times 2$.

La matriz de dimensiones $1 \times n$, es decir, compuesta de una fila, recibe el nombre de *matriz fila*. Por ejemplo, la matriz $(1\ 3\ 4\ 5)$ es una matriz fila.

La matriz de dimensiones $m \times 1$, es decir, compuesta de una columna, recibe el nombre de *matriz columna*. Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ es una matriz columna

La matriz de dimensiones $n \times n$ se llama *matriz cuadrada* y el número $n$ se denomina *orden de la matriz*. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de tercer orden.

La matriz cuadrada de orden 1 es simplemente un número.

Los números que componen una matriz llevan el nombre de *elementos de la matriz.*

Para la notación de una matriz en la forma general los elementos de la matriz se designan con letras que vienen acompañadas de dos índices, por ejemplo, $a_{ij}$; en este caso el primer índice indica el número de la fila, y el segundo, el número de la columna, en las cuales se encuentra dicho elemento.

Por ejemplo, la matriz de dimensiones $3 \times 4$ se escribe en la forma general del modo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

La matriz, cuyos elementos están representados, por ejemplo, mediante los números $b_{ij}$ se designa, a menudo, con una letra mayúscula $B$, y para inscribir este hecho se utiliza el signo de igualdad. Por ejemplo, la matriz con elementos $a_{ij}$ se designa por la letra $A$ y se escribe este hecho así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Sea dada una matriz $C$ de dimensiones $m \times n$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Los índices $i$ y $j$ se denominan *admisibles* para la matriz de dimensiones $m \times n$, si el índice de las filas $i$ es cualquiera de los números $1, 2, \dots, m$, y el índice de la columna $j$ es cualquiera de los números $1, 2, \dots, n$.

Muy a menudo los elementos de la matriz columna y de la matriz fila se denotan con un solo índice. Por ejemplo,

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad F=(f_1 f_2 f_3 f_4).$$

Las matrices $A$ y $B$, cada una de las cuales es de dimensiones $m\times n$, se llaman *iguales*, si son iguales sus elementos correspondientes, es decir, si $a_{ij}=b_{ij}$ para cualesquiera índices admisibles $i$ y $j$. En estos casos se escribe $A=B$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & \sqrt{2}\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{9} & 4 & \frac{2}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & \frac{10}{5}\end{pmatrix}.$$

Para cualesquiera matrices los signos de comparación $>$, $\geqslant$, $<$ ó $\leqslant$ están privados de sentido; para las matrices de dimensiones diferentes no tiene sentido, además, el signo de igualdad.

Se llama *suma* de las matrices $A$ y $B$, cada una de las cuales es de dimensiones $m\times n$, la matriz $C$ de las mismas dimensiones $m\times n$, en la cual cada elemento es igual a la suma de los elementos correspondientes de las matrices $A$ y $B$, es decir, $C=A+B$, si $c_{ij}=$ $=a_{ij}+b_{ij}$ para cualesquiera índices *admisibles* $i$ y $j$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & 1/2\\0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\0 & 3/2\\1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\-1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}.$$

Para las matrices $A$ y $B$ con diferentes dimensiones la operación de adición está privada de sentido.

Es fácil ver que para cualesquiera matrices $A$, $B$, $C$, cada una de las cuales es de dimensiones $m\times n$, son válidas las siguientes afirmaciones:

a) *la adición de las matrices es conmutativa*: $A+B=B+A$;

b) *la adición de las matrices es asociativa:* $A+(B+C)=(A+$ $+B)+C$.

De estas afirmaciones se deduce que en cualquier suma de un número finito de matrices, cada una de las cuales es de dimensiones $m\times n$, los sumandos pueden escribirse en cualquier orden y los paréntesis, que indican el orden en que ha de realizarse la adición pueden ponerse arbitrariamente. Por ejemplo,

$$[A+(C+B)]+D=[(A+C)+B]+D=A+B+$$
$$+C+D.$$

Una matriz de dimensiones $m \times n$, cada elemento de la cual es igual a cero:

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

recibe el nombre de *matriz nula* de dimensiones $(m+n)$. Esta matriz posee la propiedad de que para cada matriz $A$ de dimensiones $m \times n$ se verifican las igualdades $A + 0 = 0 + A = A$.

Por ejemplo, la matrziz $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz nula de dimensiones $2 \times 3$; la matriz $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz nula cuadrada de segundo orden.

Entre todas las matrices, cada una de las cuales es de dimensiones $m \times n$, existe la única matriz nula. Las matrices nulas de diferentes dimensiones suelen designarse con un mismo símbolo 0, lo que no conduce a ambigüedades, pues del contenido está claro qué dimensiones tiene la matriz nula en el caso que se analiza.

Sea dada una matriz $A$ de dimensiones $m \times n$. La matriz $(-A)$ de las mismas dimensiones, cada elemento de la cual es elemento de la matriz $A$ tomado con signo opuesto, posee la propiedad de que $A + (-A) = (-A) + A = 0$. La matriz $(-A)$ se llama *matriz opuesta* de la matriz $A$. Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es opuesta de la matriz $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; la matriz $\begin{pmatrix} -5 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es opuesta de la matriz $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Se puede mostrar que para cualquier matriz $A$ existe la única matriz opuesta, es decir, para la matriz $A$ existe una sola matriz $(-A)$ tal, que $A + (-A) = (-A) + A = 0$.

La adición de las matrices cuenta con una operación inversa, que es la sustracción. Esto quiere decir que para cualesquiera dos matrices $A$ y $B$, cada una de las cuales es de dimensiones $m \times n$, existe la única matriz $C$ de las mismas dimensiones y tal, que $A + C = B$. La matriz $C$ se llama *diferencia* de las matrices $A$ y $B$ y se designa por $A - B$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Se denomina *producto* de la matriz $A$ de dimensiones $m \times n$ *por cierto número* $\alpha$ la matriz $C$ de las mismas dimensiones $m \times n$,

cuyos elementos se obtienen de los elementos correspondientes de la matriz $A$ multiplicándolos por dicho número $\alpha$, es decir, $C = \alpha A$, si $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ para cualesquiera índices admisibles $i$ y $j$. Por ejemplo,

$$2\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix};\ -3\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\end{pmatrix}.$$

De la definición de multiplicación de una matriz por un número se desprende que para cualesquiera matrices $A$ y $B$, cada una de las cuales es de dimensiones $m \times n$, y cualesquiera números $\alpha$ y $\beta$ se verifican las igualdades:

a) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$;

b) $(\alpha\beta) A = \alpha (\beta A)$;

c) $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Observemos que la matriz $(-A)$, opuesta de $A$ es igual a $(-1) A$, es decir, $(-A) = (-1) A$.

Sea dada la matriz fila $F$ de dimensiones $1 \times r$, es decir,

$$F = (f_1 f_2 f_3 \ldots f_r),$$

y la matriz columna $X$ de dimensiones $r \times 1$, es decir,

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\end{pmatrix}.$$

Se denomina *producto de la matriz fila $F$ de dimensiones* $1 \times r$ *por la matriz columna $X$ de dimensiones* $r \times 1$ a una matriz, denotada por $FX$, de dimensiones $1 \times 1$, es decir a un número, el cual es igual a la suma de productos de los elementos correspondientes de dichas matrices, es decir, por definición,

$$FX = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_{r-1}x_{r-1} + f_rx_r$$

o bien

$$(f_1\ f_2\ \ldots\ f_r)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_r\end{pmatrix}=f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_rx_r.$$

Ejemplos. 1. $(1\ 2)\begin{pmatrix}-4\\ 2\end{pmatrix}=1\cdot(-4)+2\cdot 2=0;$

2. $\left(\frac{1}{5}\ \frac{1}{5}\ 0\ 1\ 3\right)\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -7\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=$

$=\frac{1}{5}\cdot 2+\frac{1}{5}\cdot 3+0\cdot(-7)+1\cdot 1+3\cdot(-1)=-1.$ Con ayuda del pro-

ducto de una matriz fila de dimensiones $1 \times r$ por una matriz columna de dimensiones $r \times 1$ se determina el producto de la matriz $A$ de dimensiones $m \times r$ y de la matriz $B$ de dimensiones $r \times n$, es decir, el producto de tales matrices que el primer factor, o sea la matriz $A$, tiene tantas columnas cuantas filas tiene el segundo factor, o sea, la matriz $B$.

Por definición, se denomina *producto de la matriz $A$ de dimensiones $m \times r$ por la matriz $B$ de dimensiones $r \times n$* una matriz $C$ de dimensión $m + n$, denotada con $AB$, en la que el elemento $c_{ij}$ es igual al producto de la $i$-ésima fila del primer factor, o sea de la matriz $A$, por la $j$-ésima columna del segundo factor, o sea de la matriz $B$, es decir, $C = AB$, siempre que $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{i,r-1,j} + a_{ir}b_{rj}$ para cualesquiera índices $i$ y $j$ de la matriz $C$.

**Ejemplos.**

1. $$(3\ 2\ -1)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = (3\cdot 0 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1\ \ 3\cdot 1 + 2\cdot 0 - 1\cdot 1) = (1\ 2).$$

2. $$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot 3 + 1\cdot(-3)\\ 1\cdot 3 + 0\cdot(-3)\\ 1\cdot 3 + 1\cdot(-3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\ 3\\ 0\end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 4\cdot 0 & 3\cdot 3 + 1\cdot 2 + 4\cdot 0 & 3\cdot 0 + 1\cdot 0 + 4\cdot 1 & 3\cdot 0 + \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 5\cdot 0 & 2\cdot 3 + 0\cdot 2 + 5\cdot 0 & 2\cdot 0 + 0\cdot 0 + 5\cdot 1 & 2\cdot 0 +\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}+1\cdot 0 + 4.1\\ +0\cdot 0 + 5\cdot 1\end{matrix}\Bigg) = \begin{pmatrix}4 & 11 & 4 & 4\\ 2 & 6 & 5 & 5\end{pmatrix}.$$

Así pues, la operación de multiplicación de dos matrices rectangulares es realizable solamente en el caso en que el número de columnas en el primer factor es igual al número de filas en el segundo factor; en los demás casos el producto de las matrices no se determina. En particular, si las matrices $A$ y $B$ son matrices cuadradas de un mismo orden, la multiplicación de las matrices es siempre realizable, cualquiera que sea el orden en que siguen los factores.

Señalemos, no obstante, que incluso en este caso particular no siempre $AB = BA$. Por ejemplo, sea $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, en-

tonces

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot0+0\cdot0&1\cdot1+0\cdot1\\1\cdot0+0\cdot0&1\cdot1+0\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot1+1\cdot1&0\cdot0+1\cdot0\\0\cdot1+1\cdot1&0\cdot0+1\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$$

es decir, $AB \neq BA$.

Así pues, la multiplicación de las matrices no es conmutativa, es decir, en el caso general, $AB \neq BA$. Por eso, al multiplicar matrices, hay que atenerse estrictamente, para evitar errores, al orden prefijado en que siguen los factores.

Si $AB = BA$, entonces las matrices $A$ y $B$ reciben el nombre de *conmutables*.

Por ejemplo, las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-3&2\\-2&-4\end{pmatrix}$ son conmutables, puesto que $AB=\begin{pmatrix}-7&-6\\6&-4\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}-7&-6\\6&-4\end{pmatrix}$, es decir, $AB=BA$.

La operación de multiplicación de matrices es *asociativa* y también *distributiva respecto de la adición*, es decir, para cualesquiera matrices rectangulares $A$, $B$, $C$, para las cuales tienen sentido los productos correspondientes, se verifican las igualdades:

a) $(AB)\,C = A\,(BC)$;

b) $(A + B)\,C = AC + BC$, $C\,(A + B) = CA + CB$.

La demostración de estas igualdades se omite.

La operación de multiplicación de las matrices se extiende de un modo correspondiente al caso de varios factores. Por definición de producto de matrices, una matriz $A$ puede multiplicarse por sí misma sólo en el caso cuando ella es cuadrada.

Sean dados una matriz cuadrada $A$ de orden $n$ y un número natural $p > 1$. La matriz $\underbrace{AA\ldots A}_{p\text{ veces}}$ se llama *p-ésima potencia de la matriz A* y se designa $A^p$, es decir, para $p > 1$ tenemos, por definición, $A^p = \underbrace{AA\ldots A}_{p\text{ veces}}$.

Además, por definición, $A^1 = A$.

**Ejemplo.** Hállese el cubo de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$.

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix},$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}.$$

De la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices se desprende que $A^pA^q = A^{p+q}$, donde $p$ y $q$ son números naturales arbitrariamente elegidos.

Señalemos que para cualquier matriz $A$ de dimensiones $m \times r$ el producto de la matriz $A$ por la matriz nula 0 de dimensiones $r \times n$ es una matriz nula de dimensiones $m \times n$, y el producto de la matriz nula 0 de dimensiones $l \times m$ por la matriz $A$ de dimensiones $m \times r$ es una matriz nula 0 de dimensiones $l \times r$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir, en aquellos casos cuando el producto de las matrices tien sentido, para cualquier matriz $A$ se verifican las igualdades $A0 = 0$ y $0A = 0$. En particular, para toda matriz cuadrada $A$ de orden $n$ y para una matriz nula cuadrada 0 de orden $n$ tenemos $A0 = 0A = 0$.

Se sabe que el producto de dos números es igual a cero, si, y sólo si, por lo menos uno de los factores es igual a cero. A diferencia de los números, el producto de dos matrices puede ser igual a cero incluso cuando cada uno de los factores no sea una matriz nula, es decir, existen las matrices $A \neq 0$ y $B \neq 0$ tales, que $AB = 0$.

Por ejemplo, las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq$ $\neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son tales, que el producto $AB$ es una matriz nula. En efecto, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot 1 \\ 0\cdot 0+0\cdot 1 & 0\cdot 0+0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

Observemos que la operación de división de matrices no se analiza, es decir, el símbolo $\frac{B}{A}$ no existe para las matrices.

La matriz cuadrada de orden $n$

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

cuyos elementos $a_{ii} = 1$ para todos los $i = 1, 2, \dots, n$, y los demás elementos son nulos, posee la siguiente propiedad: $EA = A$ para cualquier matriz $A$ de dimensiones $n \times m$, y $AE = A$ para toda

matriz $A$ de dimensiones $m \times n$. En particular, $AE = EA = A$ para cada matriz cuadrada $A$ de orden $n$; $FE = F$ para cada matriz fila $F$ de dimensiones $1 \times n$; $EX = X$ para cada matriz columna $X$ de dimensiones $n \times 1$. La matriz $E$ en un producto de matrices desempeña el mismo papel que el número 1 en un producto de números, razón por la cual la matriz $E$ suele llamarse *matriz unidad* de orden $n$.

Se denomina *transposición* de una matriz $A$ el proceso en que las filas y las columnas se cambian de papel conservando sus números. De este modo, las filas de la matriz dada $A$ serán en la misma sucesión columnas de la matriz transpuesta que se denota con $A^T$, y las columnas de la matriz $A$ serán en la misma sucesión las filas de la matriz transpuesta $A^T$.

**Ejemplo.** Si $=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, entonces $A^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Está claro que en el proceso de transposición la matriz $A$ de dimensiones $m \times n$ se convierte en la matriz $A^T$ de dimensiones $n \times m$. Si $A$ es una matriz cuadrada de dimensiones $n$, la matriz transpuesta $A^T$ también es una matriz cuadrada de orden $n$. Observemos que la matriz unidad no varía en el proceso de transposición. Se comprueba fácilmente que la transposición de las matrices posee las siguientes propiedades:

a) $(A^T)^T = A$;
b) $(A + B)^T = A^T + B^T$, $(A - B)^T = A^T - B^T$;
c) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ ($\lambda$ es un número);
d) $(AB)^T = B^T A^T$.

## § 2. Determinantes

Sea dada una matriz cuadrada de segundo orden

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Se llama *determinante de segundo orden*, correspondiente a la matriz (1), un número $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Dicho determinante se denota con el símbolo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

o con una letra $\Delta$, o bien con el símbolo $|A|$. De este modo, por definición

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (3)$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5)-(-1)\cdot 4 = -6.$$

Los elementos de la matriz (1) suelen denominarse *elementos del determinante* (2), las filas y columnas de la matriz (1). *filas y columnas del determinante* (2).

Examinemos las propiedades más simples de los determinantes de segundo orden.

1. El determinante de la matriz cuadrada (1) es igual al determinante de su matriz transpuesta. Efectivamente, sea

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Por cuanto $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, y $\Delta^T = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, entonces $\Delta = \Delta^T$.

La sustitución del determinante de la matriz (1) por el determinante de la matriz transpuesta se denomina *transposición* del determinante (2). Por eso la propiedad 1 puede enunciarse así: el determinante (2) no varía en el proceso de su transposición.

**Observación.** Puesto que de acuerdo con la propiedad 1, todas las filas del determinante se pueden sustituir, sin cambiar su valor, por las columnas correspondientes; entonces. si está demostrada la validez de una afirmación para las columnas del determinante, queda demostrada de este modo la validez de la misma afirmación también para las filas. Teniendo presente estos razonamientos, las propiedades de los determinantes que se analizan más abajo se establecerán sólo para las columnas del determinante.

2. Al permutar las columnas (filas). el determinante cambia de signo.

En efecto, sea $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ y sea $\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$. En este caso $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$,

$$\Delta_1 = a_{12}a_{21} - a_{22}a_{11} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}),\ \text{es decir.}\ \Delta_1 = -\Delta.$$

3. Si todos los elementos de al menos una columna (fila) de un determinante son nulas, el determinante es igual a cero.

En efecto, si $\Delta=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}$, entonces $\Delta=0\cdot a_{22}-0\cdot a_{12}=0$.

Si $\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}$, entonces, según la propiedad 2, $\Delta_1=-\Delta$, y, consecuentemente, $\Delta_1=0$.

4. El determinante que tiene dos columnas (filas) iguales es nulo.

En efecto, si $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}$, entonces $\Delta=a_{11}a_{21}-a_{21}a_{11}=0$. Si $\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$, entonces $\Delta_1=a_{12}a_{22}-a_{22}a_{12}=0$.

5. Si todos los elementos de cierta columna (fila) de un determinante los multiplicamos por un mismo número $\alpha$, entonces el determinante resultará multiplicado por este número.

En efecto, sea, por ejemplo, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Entonces, $\Delta_1 = a_{11}(\alpha a_{22}) - a_{21}(\alpha a_{12}) = \alpha(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \alpha\Delta$.

La propiedad 5 se enuncia a veces del modo siguiente: *si todos los elementos de cierta columna (fila) de un determinante contienen un factor común $\alpha$, éste puede ser sacado del signo del determinante.*

Así por ejemplo, según lo demostrado, $\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

**La propiedad 5 expresa la regla de multiplicación de un determinante por cierto número.**

6. El determinante en el que los elementos de dos columnas (filas) son respectivamente proporcionales es igual a cero.

Efectivamente, sea $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ y sea, por ejemplo, $a_{11} = \beta a_{12}$, $a_{21} = \beta a_{22}$. Entonces, en virtud de las propiedades 5 y 4 del determinante, tenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta a_{12} & a_{12} \\ \beta a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Si cada elemento de alguna columna (fila) de un determinante es la suma de dos sumandos, el determinante será igual a la suma de dos determinantes, en uno de los cuales los elementos de la columna (fila) correspondiente serán los primeros sumandos, y en el otro, los segundos sumandos, mientras que los demás elementos de estos dos determinantes serán los mismos que tiene el determinante dado.

En efecto, supongamos, por ejemplo, que $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Entonces $\Delta = (a_{11} + b_{11})a_{22} - (a_{21} + b_{21})a_{12} = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + (b_{11}a_{22} - b_{21}a_{12}) = \Delta_1 + \Delta_2$. La propiedad 7 expresa la regla de adición de determinantes.

8. Un determinante no varía, si a los elementos de alguna columna (fila) se les adicionan los elementos correspondientes de otra columna (fila) multiplicados por un mismo número.

En efecto, supongamos, por ejemplo, que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + \alpha a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Mostremos que $\Delta = \Delta_1$. En virtud de las propiedades 7 y 6 de los determinantes tenemos

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha a_{12} & a_{12} \\ \alpha a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta.$$

Sea dada una matriz de tercer orden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Se denomina *determinante de tercer orden*, correspondiete a la matriz(4) un número

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & s_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Este determinante se denota con el símbolo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

o con una letra $\Delta$, o bien con el símbolo $|A|$. De este modo, por definición,

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(1+0) - 0(4-3) + 2(0+1) = 4.$$

Los elementos de la matriz (4) llevan el nombre de *elementos* del determinante (6), las filas y columnas de la matriz (4) se llaman *filas y columnas* del determinante (6).

Para estudiar las propiedades del determinante de tercer orden introduzcamos algunos conceptos nuevos.

Se denomina *menor* de cualquier elemento del determinante de tercer orden (6) un determinante de segundo orden, correspondiente a una matriz obtenida de la matriz dada (4) suprimiendo una columna o una fila, en las cuales está contenido el elemento tomado. El menor de un elemento $a_{ij}$ suele designarse con $M_{ij}$. Por ejemplo, el menor de un elemento $a_{11}$ se designa con $M_{11}$, el elemento $a_{31}$, con $M_{31}$,

etc. De este modo, por definición,

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad M_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Se denomina *complemento algebraico* de cualquier elemento $a_{ij}$ del determinante de tercer orden (4) el menor de dicho elemento $M_{ij}$ multiplicado por $(-1)^{i+j}$. El complemento algebraico del elemento $a_{ij}$ se denota con la letra mayúscula de la misma denominación provista de los mismos dos índices que tiene el elemento dado.

Por ejemplo, el complemento algebraico del elemento $a_{21}$ se denota con $A_{21}$, el del elemento $a_{23}$, $A_{23}$, etc. De este modo, por definición,

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

**Teorema 1.** *El determinante (6) es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier columna (fila) suya por los complementos algebraicos que les corresponden, es decir.*

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, \quad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \quad \Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \qquad (8)$$

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}, \quad \Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

Demostremos, por ejemplo, la cuarta ecuación de (8). Con este fin transformemos el segundo miembro de esta igualdad:

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+$$

$$+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$

$$-a_{13}a_{31}a_{22}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{32}a_{13})+$$

$$+a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13})=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}.$$

Al comparar la expresión obtenida con la expresión (5) del determinante $\Delta$, concluimos que $a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\Delta$. De modo análogo se establece la validez de las demás igualdades (8).

La notación del determinante (6) de conformidad con cualquiera de las fórmulas aducidas (8) lleva el nombre de *desarrollo* de dicho determinante por los elementos de la columna o fila correspondientes. Estos desarrollos resultan ser cómodos al calcular los determinantes de tercer orden.

Por ejemplo, al desarrollar el determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

por los elementos de la segunda fila, obtenemos

$$\Delta=1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}+(-2)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-(6-1)+2(2-12)=-25.$$

Para los determinantes de tercer orden quedan válidas las propiedades 1 . . . 8, examinadas para los determinantes de segundo orden. La demostración de dichas propiedades se deduce inmediatamente del teorema 1 sobre el desarrollo del determinante de tercer orden por los elementos de la fila (columna) y de las propiedades correspondientes de los determinantes de segundo orden. Así por ejemplo, la propiedad 1. consistente en que el determinante no varía, si sus filas se sustituyen por las columnas, puede demostrarse del

modo siguiente. Sea

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Desarrollando el determinante $\Delta^T$ por los elementos de la primera fila, tenemos

$$\Delta^T=-a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Teniendo presente que el determinante de segundo orden no varía, al sustituir las filas por las columnas, obtendremos

$$\Delta^T=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Comparando la expresión obtenida con la (5) para el determinante $\Delta$, concluimos que $\Delta^T=\Delta$.

De modo análogo se establece la validez de las propiedades 2 . . . 8.

Las propiedades 1 . . . 8 de los determinantes en combinación con el teorema 1 sobre el desarrollo del determinante por los elementos de las filas y de las columnas permiten, a menudo, facilitar el cálculo del determinante de tercer orden.

**Ejemplo.** Calcúlese el determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 20 & 15 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

De acuerdo con la propiedad 5 de los determinantes de tercer orden, al sacar del signo del determinante el factor común 5 de la primera fila y el factor común 4 de la segunda columna, obtenemos

$$\Delta=5\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Ahora, sumemos a los elementos de la segunda columna los elementos de la primera, multiplicados por (—1), y a los elementos de la tercera columna, los elementos de la primera columna, multiplicados por (—3). En virtud de la propiedad 7, el determinante no varía y será igual a

$$\Delta=20\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Al desarrollar el determinante obtenido por los elementos de la primera fila, tenemos

$$\Delta = 20\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 20(-4-0) = -80.$$

Valiéndonos de los determinantes de tercer orden, podemos a una matriz cuadrada de cuarto orden ponerle en correspondencia un número que será determinante de cuarto orden. Luego, introducir los determinantes de quinto orden, con ayuda de los determinantes de cuarto orden, etc. De este modo, para introducir los determinantes de $n$-ésimo orden se debe disponer de los determinantes de orden $(n-1)$. Tal manera de introducir los determinantes se denomina introducción de los determinantes por inducción. Veamos cómo se introducen los determinantes de $n$-ésimo orden por inducción según $n$.

Supongamos que $n = 1$; como determinante de la matriz cuadrada de orden 1 (es decir, del número $a_{11}$) se considera el propio número $a_{11}$. Convengamos en considerar que los determinantes de las matrices cuadradas de orden $(n-1)$ ya están introducidos y que está demostrada la validez de sus propiedades principales (las propiedades de tipo 1 ... 8, demostradas anteriormente para los determinantes de orden 2). Examinemos una matriz cuadrada de $n$-ésimo orden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Al suprimir en esta matriz la $i$-ésima fila y la $j$-ésima columna, dejando intacto el orden de los elementos, obtendremos una matriz cuadrada de orden $(n-1)$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,j-1} & a_{1,\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,j-1} & a_{2,\,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{i-1,\,1} & a_{i-1,\,2} & \dots & a_{i-1,\,j-1} & a_{i-1,\,j+1} & \dots & a_{i-1,\,n} \\ a_{i+1,\,1} & a_{i+1,\,2} & \dots & a_{i+1,\,j-1} & a_{i+1,\,j+1} & \dots & a_{i+1,\,n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,j-1} & a_{n,\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz se designa con $M_{ij}$ y lleva el nombre de *menor del elemento* $a_{ij}$ de la matriz (9).

Se denomina *determinante* de la matriz (9) un número

$$a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - a_{41}M_{41} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}. \tag{10}$$

El determinante de la matriz (9) se denota con el símbolo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (11)$$

o con una letra $\Delta$, o bien con el símbolo $|A|$. De este modo, por definición,

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n+1} a_{n1}M_{n1}. \qquad (12)$$

Los elementos de la matriz (9) se llaman *elementos del determinante* (11); las filas y columnas de la matriz (9) se llaman *filas y columnas del determinante* (11). Los menores del elemento $a_{ij}$ de la matriz (9) llevan el nombre de *menores del elemento $a_{ij}$ del determinante* (11). Señalemos que los determinantes de segundo orden, introducidos según la fórmula (3) y según la fórmula (10), serán iguales. El determinante que se obtiene a partir del determinante (11) sustituyendo en éste las filas por las columnas y las columnas por las filas recibe el nombre de *determinante transpuesto con el determinante* $\Delta$ y se designa por $\Delta^T$, mientras que la sustitución del determinante $\Delta$ por el determinante $\Delta^T$ se denomina *transposición del determinante* $\Delta$.

Se llama *complemento algebraico* de cualquier elemento $a_{ij}$ del determinante de $n$-ésimo orden (11) al menor $M_{ij}$ de dicho elemento multiplicado por $(-1)^{i+j}$. El complemento algebraico de un elemento $a_{ij}$ se denota con la letra mayúscula de la misma denominación y con los mismos dos subíndices que tiene el elemento dado, es decir, por definición, $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

**Teorema 2.** *El determinante de $n$-ésimo orden* (11) *es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquiera de sus columnas (filas) por el complemento algebraico que les corresponde, es decir,*

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, n,$$

$$(13)$$

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n.$$

La demostración del teorema 2 se omite.

Con ayuda del teorema 2 sobre el desarrollo del determinante de $n$-ésimo orden por los elementos de una columna (fila) y de las propiedades 1 . . . 8 para los determinantes de $(n-1)$-ésimo orden se de-

muestran las propiedades 1 . . . 8 de los determinantes de $n$-ésimo orden.

Sin detenernos en la demostración, demos a conocer estas propiedades:

1. Al transponer un determinante, el valor de éste no varía, es decir, $\Delta = \Delta^T$.

2. Cuando se permutan dos columnas (dos filas), el determinante cambia de signo.

3. Si todos los elementos de al menos una columna (fila) de un determinante son nulos, el último es igual a cero.

4. Un determinante que tiene dos columnas (filas) iguales es igual a cero.

5. Si todos los elementos de una columna (fila) cualquiera de un determinante se multiplican por un mismo número $\alpha$, el determinante quedará multiplicado por este número (es decir, el factor común de los elementos de una columna (fila) puede sacarse del signo del determinante).

6. Un determinante en el que los elementos de dos columnas (filas) son respectivamente proporcionales, es igual a cero.

7. Si cada elemento de una columna (fila) cualquiera de un determinante es la suma de dos sumandos, entonces el determinante es igual a la suma de dos determinantes, en uno de los cuales los elementos de la columna (fila) correspondiente son los primeros sumandos, y en el otro, los segundos, mientras que los elementos restantes de dos determinantes citados son los mismos que tiene el determinante dado.

8. El determinante no varía, si a los elementos de una columna (fila) cualquiera se les adicionan los elementos correspondientes de otra columna (fila) multiplicados por un mismo número.

Enunciemos y demostremos una propiedad más de los determinantes.

9. La suma de elementos de cierta columna (fila) de un determinante de $n$-ésimo orden ($n \geqslant 2$), multiplicados por los complementos algebraicos de los elementos correspondientes de otra columna (fila) es igual a cero, es decir, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0$ $\Big($o bien $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0\Big)$, cualesquiera que sean $n \geqslant 2$ y $i \neq j$.

**Demostración.** Supongamos, para concretar, que $j > i$, entonces, al desarrollar el determinante por los elementos de la $j$-ésima columna, obtendremos

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1,\,j-1} & a_{1i} & a_{1,\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2,\,j-1} & a_{2i} & a_{2,\,j+1} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3,\,j-1} & a_{3i} & a_{3,\,j+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{n,\,j-1} & a_{ni} & a_{n,\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

El determinante en el segundo miembro de la igualdad (14) tiene iguales los elementos en la $i$-ésima y en la $j$-ésima columnas, respectivamente. De conformidad con la propiedad 4, el determinante (14) es nulo, por consiguiente

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0.$$

Para el caso en que $i > j$ la demostración es análoga. La propiedad 9 está demostrada. Calculemos el determinante de la matriz unidad, valiéndonos de las propiedades 1 . . . 8. Designemos con $E_k$ la matriz unidad de orden $k$. Sea dada una matriz $E_n$. Desarrollando el determinante de esta matriz por la primera columna, obtenemos

$$|E_n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{21} + \ldots + 0 \cdot E_{n1} = |E_{n-1}|.$$

Repitiendo estos razonamientos para el determinante $|E_{n-1}|$, luego para $|E_{n-2}|$, etc., llegamos a la conclusión de que $|E_n| = 1$. Así pues, *el determinante de la matriz unidad de cualquier orden $n$ es igual a* 1.

## § 3. Matriz inversa. Rango de una matriz

Si dos matrices cuadradas $A$ y $B$ de un mismo orden $n$ son tales, que $AB = BA = E$ (donde $E$ es la matriz unidad de orden $n$), suele decirse que las matrices $A$ y $B$ son *inversas una de la otra* y se usan las designaciones $B = A^{-1}$ y $A = B^{-1}$. Por ejemplo, las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

son inversas una de la otra, por cuanto $AB = BA = E$, donde

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{es decir } A = B^{-1},\ B = A^{-1}.$$

Por definición, la matriz inversa de la matriz cuadrada dada $A$ de orden $n$ se llama matriz cuadrada $A^{-1}$ de orden $n$ que posee la propiedad de que $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, donde $E$ es la matriz unidad de orden $n$.

Para cada matriz $A$ de orden $n$ que tiene una matriz inversa $A^{-1}$, la matriz inversa $A^{-1}$ es única.

En efecto, supongamos que una matriz $A$ de orden $n$ tiene la matriz inversa $A^{-1}$. Supongamos también que existe una matriz $C$ de orden $n$ tal, que $CA = AC = E$. Entonces

$$C = EC = (A^{-1}A)\,C = A^{-1}(AC) = A^{-1}E = A^{-1}.$$

Las matrices inversas poseen las siguientes propiedades:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$, b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, c) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Omitimos aquí la demostración de estas propiedades.

Aclaremos cuáles matrices tienen matrices inversas y si la matriz $A$ tiene la inversa $A^{-1}$, cómo se encuentra la última.

Sea dada una matriz cuadrada $A$ de orden $n$ $(n \geqslant 2)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Formemos una matriz cuadrada $A$ de orden $n$ por medio del siguiente procedimiento: en lugar de cada elemento de la matriz $A$ pongamos el complemento algebraico de este elemento, es decir.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Transpongamos la matriz $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

La matriz $\widetilde{A}^T$ lleva el nombre de *matriz adjunta*. Por ejemplo, hallemos la matriz adjunta $\widetilde{A}^T$, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por cuanto

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{vmatrix}=6, \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6 & 0\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-18,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}6 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=14, \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 4 & 3\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & 3\end{vmatrix}=3, \quad A_{23}=(-1)_{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0, \quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 6 & 0\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 6 & 2\end{vmatrix}=2,$$

tenemos que

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}6 & -18 & 14\\ 0 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ y } \widetilde{A}^T=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ -18 & 3 & 0\\ 14 & -4 & 2\end{pmatrix}.$$

Una matriz cuadrada $A$ se llama *degenerada* (*singular*), si su determinante es igual a cero ($|A|=0$), y se llama *regular*, si $|A|\neq 0$.

**Teorema 3.** *Para cualquier matriz regular $A$ ($|A|\neq 0$) existe la matriz inversa $A^{-1}$.*

**Demostración.** Examinemos una matriz regular de primer orden es decir, el número $a_{11}$, distinto de cero; la matriz inversa de esta matriz será el número $\frac{1}{a_{11}}$.

Sea dada una matriz regular $A$ de segundo orden. Hallemos el producto de las matrices $A\widetilde{A}^T$ y $\widetilde{A}^TA$, donde $\widetilde{A}^T$ es una matriz adjunta. Por cuanto la suma de los productos de los elementos de cierta columna (fila) de la matriz $A$ por los complementos algebraicos de dichos elementos es igual al determinante $|A|$ (véase el teorema 2), y la suma de los productos de los elementos de cierta columna (fila) de la matriz $A$ por los complementos algebraicos de elementos de la otra columna (fila) (de conformidad con la propiedad 9 de los determinantes) es nula, entonces

$$A\widetilde{A}^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}\\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A| & 0\\ 0 & |A|\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A}^TA=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}A_{11}a_{11}+A_{21}a_{21} & A_{11}a_{12}+A_{21}a_{22}\\ A_{12}a_{11}+A_{22}a_{21} & A_{12}a_{12}+A_{22}a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|A| & 0\\ 0 & |A|\end{pmatrix}.$$

Cada elemento de las matrices obtenidas tiene por factor común el número $|A|$, por consiguiente

$$A\widetilde{A}^T = |A|\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = |A|E; \quad \widetilde{A}^T A = |A|\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = |A|E.$$

De aquí, por ser la matriz $A$ ($|A| \neq 0$) regular, tenemos

$$A\left(\frac{1}{|A|}\widetilde{A}^T\right) = E = \left(\frac{1}{|A|}\widetilde{A}^T\right)A.$$

Por consiguiente, para la matriz regular de segundo orden $A$ la matriz inversa $A^{-1}$ será una matriz, cuyos elementos son los elementos correspondientes de la matriz adjunta $\widetilde{A}^T$ divididos por el determinante $|A|$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|}\\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|}\end{pmatrix}.$$

De este modo, no sólo demostramos la existencia de la matriz inversa $A^{-1}$ para la matriz regular de segundo orden $A$, sino también indicamos el método de construcción de la primera.

De modo análogo se demuestra que para cualquier matriz regular $A$ de $n$-ésimo orden, donde $n \geqslant 3$, la matriz inversa $A^{-1}$ será una matriz, cuyos elementos son los elementos correspondientes de la matriz adjunta $\widetilde{A}^T$, divididos por el determinante $|A|$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{12}}{|A|} & & \frac{A_{1n}}{|A|}\\ \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & & \frac{A_{2n}}{|A|}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \frac{A_{n1}}{|A|} & \frac{A_{n2}}{|A|} & & \frac{A_{nn}}{|A|}\end{pmatrix}^T = \begin{vmatrix}\frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{n1}}{|A|}\\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{n2}}{|A|}\\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \frac{A_{nn}}{|A|}\end{vmatrix}$$

El teorema está demostrado.

**Ejemplo.** La matriz

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

es regular, puesto que $|A| = 6 \neq 0$. Su matriz adjunta es

$$\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ -18 & 3 & 0\\ 14 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1/2 & 0\\ 7/3 & -2/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

**Teorema 4.** *El determinante del producto de dos matrices cuadradas A y B de n-ésimo orden es igual al producto de sus determinantes, es decir,* $|AB| = |A|\,|B|$ (la propiedad análoga es válida también para cualquier número finito de factores).

Omitimos aquí la demostración del teorema 4.

Por cuanto el determinante de la matriz unidad $E$ de orden $n$ es igual a 1, entonces, los determinantes de dos matrices recíprocamente inversas serán números recíprocamente inversos, es decir, $|A|\,|A^{-1}| = 1$.

Toda matriz degenerada $A$ de orden $n$ no tiene inversa, puesto que, de acuerdo con el teorema 4, el producto de la matriz degenerada $A$ por cualquier matriz de orden $n$ será nuevamente una matriz degenerada.

Las matrices inversas se emplean frecuentemente para la resolución de las ecuaciones matriciales.

Sean dadas las matrices $A$, $B$ y $C$. Si se pide hallar una matriz $X$ tal, que se verifique la igualdad matricial $AX = B$, se dice que está dada una *ecuación matricial*

$$AX = B \tag{1}$$

con la matriz incógnita $X$. La matriz $X$, que satisface la ecuación (1), se denomina *solución de la ecuación* (1).

Si se pide hallar una matriz $Y$ tal, que se verifique la igualdad matricial $YA = C$, se dice que está dada la *ecuación matricial*

$$YA = C \tag{2}$$

con la matriz desconocida $Y$. La matriz $Y$, que satisface la ecuación (2), se denomina *solución de la ecuación* (2).

Veamos un caso particular de resolución de las ecuaciones matriciales (1) y (2). Sea $A$ una matriz regular cuadrada de $n$-ésimo orden; $B$, una matriz de dimensiones $n \times m$, y $C$, una matriz de dimensiones $k \times n$, donde $n$, $m$, $k$ son números naturales cualesquiera. En este caso las ecuaciones (1) y (2) tienen soluciones.

En efecto, multipliquemos ambos miembros de la primera ecuación por la matriz $A^{-1}$ a la izquierda, lo que puede realizarse en vista de las dimensiones elegidas de la matriz $B$. Al efectuar las operaciones correspondientes:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B,$$

llegamos a que existe una matriz $X = A^{-1}B$ de dimensión $n \times m$ que satisface la ecuación (1).

Multipliquemos ambos miembros de la segunda ecuación por la matriz $A^{-1}$ a la derecha, lo que puede realizarse en vista de las dimensiones elegidas de la matriz $C$. Al efectuar las operaciones correspondientes:

$$YAA^{-1} = CA^{-1}, \quad YE = CA^{-1}, \quad Y = CA^{-1},$$

obtenemos que existe una matriz $Y = CA^{-1}$ de dimensiones $k \times n$ que satisface la ecuación (2).

Señalemos que si incluso $B = C$, mas las matrices $A^{-1}$ y $B$ no son conmutables, entonces $X \neq Y$, es decir, para las mismas matrices $A$ y $B = C$ las ecuaciones (1) y (2) tienen, en el caso general, soluciones diferentes.

**Ejemplo.** Sea

$$A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Resolvamos las ecuaciones (1) y (2). Hallemos ante todo

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix}.$$

En este caso

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -2 & -11\end{pmatrix},$$

$$Y=BA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 11\\ 2 & -7\end{pmatrix},$$

es decir, $X \neq Y$.

En el § 2 se ha definido el concepto de menor del elemento $a_{ij}$ de una matriz cuadrada de $n$-ésimo orden. En el caso general de una matriz de dimensiones $m \times n$ el concepto de menor de los elementos de la matriz no se introduce; en lugar de ello se da el concepto de menor de orden $k$ de la matriz dada, donde el número $k$ puede tomar valores a partir de la unidad hasta el mínimo de los números $m$ y $n$, es decir, $1 \leqslant k \leqslant \text{mín}\,(m, n)$

Sea dada una matriz $A$ de dimensiones $m \times n$ y supongamos que $k$ es un número natural tal, que $1 \leqslant k \leqslant \text{mín}\,(m, n)$. Elijamos arbitrariamente $k$ filas y $k$ columnas de la matriz $A$. Formemos una matriz cuadrada $M$ de orden $k$, utilizando con este fin los elementos dispuestos en las intersecciones de las filas y columnas mencionadas (sin variar el orden de los elementos). El determinante de la matriz $M$ se llama *menor de k-ésimo orden de la matriz A*.

**Ejemplo.** Sea dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

de dimensiones $3 \times 2$. En este caso los menores de primer orden de la matriz son elementos de dicha matriz, es decir, los números 1, 3, 3, 4, $-3$, 0. Los menores de segundo orden son determinantes

$$\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & 0\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}3 & 4\\ -3 & 0\end{vmatrix}.$$

La matriz mencionada no tiene menores de órdenes más altos.

Si se trata de una matriz cuadrada $A$ de orden $n$, su menor de $n$-ésimo orden es el determinante $|A|$, los menores de $(n-1)$-ésimo

orden son los menores de los elementos correspondientes de esta matriz; los menores de orden 1 son los elementos de esta matriz. Además, la matriz citada tiene menores de orden $k$, donde $1 < k < n - 1$.

El orden más alto de los menores, distintos de cero, de la matriz $A$ lleva el nombre de *rango de la matriz A* de dimensiones $m \times n$.

Si todos los elementos de la matriz $A$ son ceros, se dice que el rango de la matriz es igual a cero.

El rango de una matriz cuadrada regular $A$ de $n$-ésimo orden es igual a $n$.

Poz ejemplo, el rando de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ es igual a la unidad, puesto que los menores de segundo orden de esta matriz son nulos (debido a la proporcionalidad de las filas de la matriz), mas hay menores de primer orden (elementos de la matriz $A$) que son distintos de cero.

Sea dada una matriz $A$ de dimensiones $m \times n$ y supongamos que existe un número natural $l < \min (m, n)$. Si todos los menores de $l$-ésimo orden de la matriz $A$ son nulos, entonces serán también nulos todos los menores de dicha matriz de orden $(l + 1)$.

En efecto, elijamos cualquier menor de la matriz citada de orden $(l + 1)$ y desarrollémoslo por los elementos de cierta fila. Cada sumando del desarrollo contendrá, a título de factor, cierto determinante de orden $l$, que es el menor de $l$-ésimo orden del elemento correspondiente de la fila elegida del determinante de orden $(l + 1)$. Por cuanto todo menor de orden $l$ es igual a cero, entonces la suma del desarrollo es también igual a cero, a consecuencia de lo cual el menor elegido de orden $(l + 1)$ es nulo. Por consiguiente, si todos los menores de $l$-ésimo orden son nulos, todos los menores de orden superior a $l$ son también nulos.

De este modo, con el fin de determinar el rango de una matriz de dimensiones $m \times n$, se debe hallar, al principio, por lo menos un menor de primer orden que sea distinto de cero, es decir, hace falta esclarecer si hay entre los elementos de la matriz por lo menos uno que sea distinto de cero. Si tal elemento no existe, el rango de la matriz será igual a cero. Si la matriz tiene un elemento distinto de cero, es necesario hallar por lo menos un menor de segundo orden distinto de cero. Si tal menor no existe, el rango de la matriz será igual a 1. Si hay un menor de segundo orden distinto de cero, se debe buscar el menor de tercer orden que sea distinto de cero, etc. hasta que se encuentre un menor de $r$-ésimo orden distinto de cero; pero o bien todos los menores de orden $r + 1$ son nulos, o bien $r = \min (m, n)$. Entonces el rango de la matriz es igual a $r$.

Para determinar el rango de una matriz de dimensiones $m \times n$ se procede frecuentemente del modo siguiente. Se elige un elemento cualquiera de la matriz, distinto de cero. A continuación, añadiendo una fila y una columna, distintas de aquellas en las que se dispone el elemento, se forman toda clase de menores de segundo orden hasta

que se encuentre el menor de segundo orden que sea distinto de cero. Luego, añadiendo cierta fila y cierta columna, distinta de aquellas en las que se dispone el menor hallado de segundo orden, se forman toda clase de menores de tercer orden hasta que se encuentre el menor de tercer orden que sea distinto de cero. Este proceso se continúa hasta que se encuentre el menor de orden $r$ que sea distinto de cero, para el cual todos los menores de orden $(r+1)$, construidos por el método indicado, sean iguales a cero, o bien no haya tales menores en general (si la matriz contiene $r$ filas o $r$ columnas). Entonces el rango de la matriz es igual a $r$.

No se aduce aquí la demostración de la validez de este método para determinar el rango de una matriz.

**Ejemplo.** Hállese el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}.$$

El menor de primer orden (el número 1) dispuesto en la intersección de la primera columna con la primera fila es disitnto de cero. El menor de segundo orden, dispuesto en la intersección de las primeras dos columnas y las primeras dos filas, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$, es también distinto de cero. Todos los menores de tercer orden de esta matriz son nulos. Por consiguiente, el rango de la matriz es igual a dos.

## § 4. Sistemas de ecuaciones lineales

Analicemos un sistema de $m$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las incógnitas, $a_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n)$, los coeficientes y $b_1, b_2, \ldots, b_m$, los términos independientes del sistema de ecuaciones (1). Recordemos que una colección numérica $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, correspondiente a la colección de incógnitas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lleva el nombre de solución del sistema (1), si, al sustituir en cada ecuación del sistema (1) los números correspondientes, en lugar de las incógnitas, se obtienen $m$ igualdades numéricas lícitas. Resolver el sistema (1) significa hallar todas sus soluciones o demostrar que el sistema no tiene soluciones.

Un sistema de ecuaciones lineales se denomina *compatible*, si tiene por lo menos una solución, e *incompatible* (contradictorio), si no tiene soluciones. Un sistema compatible se llama *determinado*, si tiene una solución única, e *indeterminado*, si tiene más de una solu-

ción. Se puede mostrar que el sistema indeterminado de ecuaciones lineales siempre tiene una infinidad de soluciones.

**Ejemplos.** La ecuación lineal con una sola incógnita $a_{11}x_1 = b_1$ tiene para $a_{11} \neq 0$, la única solución $x = \frac{b_1}{a_{11}}$.

La ecuación lineal con dos incógnitas

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

tiene una infinidad de soluciones para $a_{11} \neq 0$ y para $a_{12} \neq 0$.

En efecto, sea, por ejemplo $a_{12} \neq 0$, entonces la ecuación $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ es equivalente a la ecuación

$$x_2 = \frac{b_1 - a_{11}x_1}{a_{12}},$$

que tiene por solución la expresión $\left(\alpha, \ -\frac{a_{11}\alpha}{a_{12}} + \frac{b_1}{a_{12}}\right)$, donde $\alpha$ es un número real cualquiera.

El sistema de dos ecuaciones lineales con una sola incógnita

$$\begin{cases} a_{11}x = b_1, \ (a_{11} \neq 0), \\ a_{21}x = b_2 \ (a_{21} \neq 0) \end{cases}$$

donde $\frac{b_1}{a_{11}} \neq \frac{b_2}{a_{21}}$, es incompatible.

Efectivamente, supongamos que el número $\alpha$ es la solución de la ecuación $a_{11}x = b_1$, es decir, admitamos que se verifica la igualdad numérica $a_{11}\alpha = b_1$. En este caso $\alpha = \frac{b_1}{a_{11}}$. Si $\alpha = \frac{b_1}{a_{11}}$ fuera una solución de la ecuación $a_{21}x = b_2$, sería válida la igualdad numérica $\frac{a_{21}b_1}{a_{11}} = b_2$, o bien, en virtud de que $a_{21} \neq 0$, la igualdad numérica $\frac{b_1}{a_{11}} = \frac{b_2}{a_{21}}$, lo que contradice la hipótesis. Así pues, la solución $\alpha$ de la ecuación $a_{11}x = b_1$ no es una solución de la ecuación $a_{21}x = b_2$, y esto significa que el sistema de dos ecuaciones con una sola incógnita, donde $\frac{b_1}{a_{11}} \neq \frac{b_2}{a_{21}}$, es incompatible.

Se denomina *matriz básica del sistema* (1) una matriz $A$ de dimensiones $m \times n$, cuyos elementos están representados por los coeficientes de las incógnitas del sistema de ecuaciones (1), es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Se denomina *matriz de incógnitas del sistema* (1) una matriz columna $X$, cuyos elementos están representados por las incógnitas del sistema,

es decir,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

Se denomina *matriz de términos independientes del sistema* (1) una matriz columna $B$, cuyos elementos están representados por los términos independientes del sistema, es decir,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

La ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o bien

$$AX = B \qquad (2)$$

lleva el nombre de *ecuación matricial del sistema* (1), si las matrices $A$, $X$ y $B$ son las matrices correspondientes del sistema (1).

Por cuanto cualquier colección numérica $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, que representa la solución del sistema (1) y está escrita en forma de una matriz columna

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

es una solución de la ecuación matricial (2), y como cualquier matriz columna numérica

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

que representa la solución de la ecuación matricial (2) del sistema (1) y está escrita en forma de una colección numérica $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ es una solución del sistema (1), suele decirse que *el sistema de ecuaciones lineales* (1) *es equivalente a la ecuación matricial* (2) *del sistema* (1).

Veamos un caso particular del sistema (1). Sean dados un sistema de $n$ ecuaciones con $n$ incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (3)$$

y la ecuación matricial correspondiente de este sistema

$$\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right.$$

o bien

$$AX = B. \qquad (4)$$

El determinante de la matriz $A$ del sistema (3) se denominará *determinante básica* y se designará con $\Delta$, es decir, $\Delta = |A|$. Supongamos que la matriz básica $A$ (que es una matriz cuadrada de $n$-ésimo orden) del sistema (3) es regular, es decir, admitamos que $\Delta = |A| \neq 0$. En este caso, según lo expuesto en el § 3, existe la única matriz inversa $A^{-1}$. Multiplicando a la izquierda por la matriz inversa $A^{-1}$ los miembros primero y segundo de la ecuación matricial (4) del sistema (3), obtenemos que $X = A^{-1}B$, con la particularidad de que la matriz $X$ es de dimensiones $n \times 1$, es decir, es una matriz columna. Así pues, debido a la unicidad de la matriz inversa $A^{-1}$, la ecuación matricial (4) del sistema (3) tiene una solución única, que es la matriz columna $X = A^{-1}B$.

Por cuanto la ecuación matricial (4) es equivalente al sistema (3), entonces, si el determinante de la matriz básica $A$ del sistema lineal (3) es distinto de cero (es decir, $|A| \neq 0$), el sistema (3) será compatible y está determinado, es decir, tiene solución única.

Esta única solución del sistema (3) puede hallarse según la regla de Cramer, cuya enunciación se aducirá más abajo.

Si en la matriz básica $A$ del sistema (3) de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas sustituimos la j-ésima columna de coeficientes del sistema 3 por la columna de términos independientes de dicho sistema, la matriz obtenida se denomina *matriz complementaria del sistema* (3) y se designa por $\overset{j}{A}$, es decir,

$$\overset{j}{A} = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1,j-1} b_1\, a_{1,j+1} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2,j-1} b_2\, a_{2,j+1} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{n,j-1} b_n a_{n,j+1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

El determinante de la matriz $\overset{j}{A}$ se denota, por regla general, con $\Delta_j$, es decir, $\Delta_j = |\overset{j}{A}|$.

Pasemos ahora a la resolución del sistema de ecuaciones (3).

Sea $n = 1$, es decir, supongamos que el sistema (3) consta de una sola ecuación con una incógnita: $a_{11}x = b_1$, y sea $a_{11} \neq 0$. Está claro que esta ecuación tiene una solución única que es el número $\frac{b_1}{a_{11}}$.

Sea ahora $n = 2$. Examinemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{6}$$

La matriz básica $A$ y las matrices complementarias $\overset{1}{A}$ y $\overset{2}{A}$ de este sistema son respectivamente las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \overset{1}{A} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \overset{2}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix},$$

Supongamos que el determinante de la matriz básica $A$ es distinto de cero ($\Delta = |A| \neq 0$). Entonces existe la única matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

y se verifica la cadena de igualdades matriciales

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{b_1A_{11} + b_2A_{21}}{|A|} \\ \dfrac{b_1A_{12} + b_2A_{22}}{|A|} \end{pmatrix},$$

de donde

$$x_1 = \frac{b_1A_{11} + b_2A_{21}}{|A|} = \frac{b_1(-1)^{1+1}M_{11} + b_2(-1)^{2+1}M_{21}}{|A|} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|\overset{1}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{b_1A_{12} + b_2A_{22}}{|A|} = \frac{b_1(-1)^{1+2}M_{12} + b_2(-1)^{2+2}M_{22}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|} =$$

$$= \frac{|\overset{2}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

es desir, los componentes de la solución $(x_1, x_2)$ del sistema (6) se hallan valiéndose de las fórmulas

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{7}$$

donde $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$ son los determinantes de las matrices $A$, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$ del sistema (6).

Estudiemos un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{8}$$

La matriz básica $A$ y las matrices complementarias $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ del sistema (8) son, respectivamente:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\overset{1}{A}=\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \overset{2}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \overset{3}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Supongamos que el determinante de la matriz básica $A$ es distinto de cero ($\Delta = |A| \neq 0$). En este caso existe la única matriz inversa

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

y se verifica la cadena de igualdades matriciales

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{12} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32} \\ b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33} \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}}{|A|} \\ \dfrac{b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32}}{|A|} \\ \dfrac{b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}}{|A|} \end{vmatrix},$$

de donde

$$x_1=\frac{b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}}{|A|}=\frac{b_1(-1)^{1+1}M_{11}+b_2(-1)^{2+1}M_{21}+b_3(-1)^{3+1}M_{31}}{|A|}=$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{|\overset{1}{A}|}{|A|}=\frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2=\frac{b_1A_{12}+b_2A_{22}+b_3A_{32}}{|A|}=\frac{b_1(-1)^{1+2}M_{12}+b_2(-1)^{2+2}M_{22}+b_3(-1)^{3+2}M_{32}}{|A|}=$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{|\overset{2}{A}|}{|A|}=\frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$x_3=\frac{b_1A_{13}+b_2A_{23}+b_3A_{33}}{|A|}=\frac{b_1(-1)^{1+3}M_{13}+b_2(-1)^{2+3}M_{23}+b_3(-1)^{3+3}M_{33}}{|A|}=$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{|\overset{3}{A}|}{|A|}=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

es decir, los componentes de la solución $(x_1, x_2, x_3)$ del sistema (8) se hallan por las fórmulas

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

donde $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ son los determinantes de las matrices $A$, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$ del sistema (8).

Demostremos que si el determinante de la matriz básica $A$ del sistema (3) es distinto de cero, entonces el $j$-ésimo componente $x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ de la única solución $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ del sistema (4) se determina por la fórmula

$$x_j=\frac{|\overset{j}{A}|}{|A|}=\frac{\Delta_j}{\Delta}\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

donde $|\overset{j}{A}| = \Delta_j$ es el determinante de la matriz complementaria $\overset{j}{A}$ del sistema (3), y $|A| = \Delta$, el determinante de la matriz básica $A$ del sistema (3).

Examinemos el $j$-ésimo componente de la matriz columna $A^{-1}B$, la cual es la única solución de la ecuación matricial (4) del sistema (3). Tenemos

$$x_j=\frac{b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}}{|A|}=$$

$$=\frac{b_1(-1)^{1+j}M_{1j}+b_2(-1)^{2+j}M_{2j}+\ldots+b_n(-1)^{n+j}M_{nj}}{|A|}=$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{|\overset{j}{A}|}{|A|} = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

lo que se trataba de demostrar.

La regla, de acuerdo con la cual se determina la solución del sistema (3), lleva el nombre de Cramer. Enunciémosla.

**Regla de Cramer**. *Si el sistema (3) de $n$ ecuaciones con $n$ incógnitas es tal, que el determinante de su matriz básica no es nulo ($\Delta \neq 0$), entonces el sistema tiene una solución única ($x_1, x_2, \ldots, x_n$), cada uno de cuyos componentes se determina por las fórmulas de Cramer, es decir, $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), donde $\Delta_j$ es el determinante de la matriz complementaria $\overset{j}{A}$ que se obtiene de la matriz básica $A$ del sistema (3) sustituyendo en éste la $j$-ésima columna por la columna de términos independientes del sistema.*

**Ejemplo.** Resuélvase el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 10x_1 + 12x_2 + 8x_3 = 4. \end{cases}$$

El determinante de la matriz básica es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 12 & 8 \end{vmatrix} = -72 \neq 0.$$

Por consiguiente, el sistema tiene una solución única. Hallémosla, rigiéndonos por la regla de Cramer:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 12 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 10 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 36,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 12 & 4 \end{vmatrix} = -90.$$

Por consiguiente, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{4}$, es decir, el sistema tiene una solución única: $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

Cuando el determinante $|A|$ de la matriz básica $A$ del sistema (3) es igual a cero, la regla de Cramer resulta inaplicable.

Pasemos ahora al estudio de los sistemas de $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas.

Se denomina *matriz ampliada* del sistema de ecuaciones (1) una matriz que se obtiene por adición a la matriz básica $A$ del sistema (1) de una columna de términos independientes que forma la última columna y se separa por una raya vertical, es decir, una matriz

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}a_{12} & \ldots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21}a_{22} & \ldots & a_{2n} & & b_2 \\ \cdot\;\cdot & \ldots & \cdot & & \cdot \\ a_{m1}a_{m2} & \ldots & a_{mn} & & b_n \end{array}\right).$$

Cabe señalar que el rango de la matriz ampliada $B$ no es inferior al rango de la matriz básica $A$ del sistema (1). Para ser más exacto, si el rango de la matriz básica es igual a $r$, y el rango de la ampliada es $R$, entonces $r \leqslant R$. Al mismo tiempo es obvio que $R \leqslant r + 1$.

La cuestión sobre la compatibilidad del sistema (1) se resuelve por el **criterio de Kronecker—Capelli**: *el sistema* (1) *de m ecuaciones lineales con n incógnitas es compatible si, y sólo si, el rango de la matriz ampliada B es igual al rango de la matriz básica A del sistema* (1).

La demostración de este teorema no se aduce en esta obra.

Supongamos que el rango de la matriz básica del sistema (1) es igual a $r$, con la particularidad de que $1 \leqslant r \leqslant \text{mín}\,(m, n)$.

En este caso cualquier menor distinto de cero de orden de la matriz básica del sistema (1) se llama *menor principal*.

La resolución del sistema de ecuaciones lineales consiste en lo siguiente. Calculamos el rango de la matriz básica $A$ del sistema (1) y de la matriz ampliada $B$.

Si el rango de la matriz básica $A$ del sistema (1) no es igual al rango de la matriz ampliada $B$, entonces, de acuerdo con el criterio de Kronecker—Capelli, el sistema es incompatible, es decir, el sistema (1) no tiene ninguna solución. Con esto se da por terminada la resolución del sistema (1).

Si los rangos de las matrices básica y ampliada son iguales y equivalen a $r$, es decir, si el sistema (1) es compatible, se toma cualquier menor distinto de cero de la matriz básica de orden $r$ y se consideran $r$ ecuaciones cuyos coeficientes integran dicho menor principal, mientras que las ecuaciones restantes de sistema se desprecian. Las incógnitas, cuyos coeficientes integran dicho menor principal se declaran *principales*, y las demás incógnitas, *independientes*. El nuevo sistema se reescribe de tal manera que en los primeros miembros de todas las ecuaciones quedan sólo los términos que contienen $r$ incógnitas principales; todos los demás términos de las ecuaciones, que contienen $(n - r)$ incógnitas, se trasladan a los segundos miembros de las ecuaciones. Luego, se hallan las incógnitas principales de acuerdo con la regla de Cramer. Es fácil ver en este caso que las incógnitas principales se expresan en términos de las incógnitas independientes, cada una de las cuales puede adquirir cualquier

valor numérico. Las soluciones obtenidas del nuevo sistema con $r$ incógnitas principales se llama *solución general del sistema* (1).

Atribuyendo a todas las incógnitas independientes ciertos valores numéricos, se hallan, a base de la solución general, los valores numéricos correspondientes de las incógnitas principales y, de este modo, se determina la solución del sistema original de ecuaciones (1), la cual lleva el nombre de solución *particular* para los valores numéricos dados de las incógnitas independientes. Empleando el procedimiento mencionado se puede obtener cualquier solución del sistema (1).

**Ejemplos.** 1. Veamos el sistema

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

El rango de la matriz básica de este sistema es igual a dos, puesto que existe un menor de segundo orden, distinto de cero, de la matriz citada, por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

mientras que todos los menores de tercer orden son nulos.

El rango de la matriz ampliada de dicho sistema es igual a tres, puesto que existe un menor de tercer orden, distinto de cero, de la matriz citada, por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35.$$

De acuerdo con el criterio de Kronecker—Capelli, el sistema es incompatible, es decir, no tiene soluciones.

2. Examinemos el sistema

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 9x_2 - 11x_3 = 2. \end{cases}$$

El rango de la matriz básica de este sistema es igual a dos y el rango de la matriz ampliada es también igual a dos, puesto que, por ejemplo, el menor de segundo orden

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -17$$

de la matriz básica es distinto de cero, mientras que todos los menores de tercer orden de las matrices básica y ampliada son nulos.

Quiere decir, el sistema es compatible. Tomemos por el menor principal, por ejemplo, el menor $\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$. Dado que la tercera ecuación del sistema no contiene elementos de este menor principal, desechamos la tercera ecuación. Las incógnitas $x_1$ y $x_2$ las declaramos principales, pues sus coeficientes integran el menor principal; la incógnita $x_3$ la declaramos independiente.

Obtenemos un sistema que es equivalente al de partida:

$$\begin{cases} 7x_1+3x_2=2x_3+2, \\ x_1-2x_2=-3x_3. \end{cases}$$

Resolvámoslo según la regla de Cramer:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 2x_3+2 & 3 \\ -3x_3 & -2 \end{vmatrix}}{-17}=\frac{-4x_3-4+9x_3}{-17}=\frac{5x_3-4}{-17}=-\frac{5}{17}x_3+\frac{4}{17},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 7 & 2x_3+2 \\ 1 & -3x_3 \end{vmatrix}}{-17}=\frac{-21x_3-2x_3-2}{-17}=\frac{-23x_3-2}{-17}=\frac{23}{17}x_3+\frac{2}{17}.$$

Así pues, la solución general del sistema de partida representa una infinidad de colecciones $(x_1, x_2\ x_3)$ de la forma $\left(-\frac{5}{17}t+\frac{4}{17}, \frac{23}{17}t+\right.$ $\left.+\frac{2}{17}, t\right)$, donde $t$ es un número real cualquiera. La solución particular de la ecuación de partida será, por ejemplo, una colección numérica $\left(\frac{4}{17}, \frac{2}{17}, 0\right)$ que se obtiene cuando $t=0$.

3. ¿Para cuáles $k$ será compatible el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+ky=3, \\ kx+4y=6? \end{cases}$$

Por cuanto $r \neq 0$, este sistema es compatible en dos casos: cuando $\Delta \neq 0$, y cuando $R=r=1$. Analicemos por eso dos casos.

a) Si $\Delta \neq 0$, es decir, si $\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{vmatrix} \neq 0$, es decir, si $k^2 \neq 4$, entonces, de acuerdo con la regla de Cramer, el sistema tiene una solución única.

Quiere decir, para cualquier $k$, a excepción de $k=2$ y $k=-2$, el sistema cuenta con la única solución.

b) Si $R=r=1$, es decir, si

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & k \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ k & 6 \end{vmatrix}=0,$$

es decir, si $k=2$, el sistema es compatible.

Resumiendo, llegamos a que el esquema de partida es compatible para cualesquiera $k$, salvo para $k=-2$.

*Analicemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas $x$ e $y$*

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases} \tag{9}$$

valiéndonos del criterio de Kronecker—Capelli.

La matriz básica de este sistema

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

tiene el rango $r$, con la particularidad de que $0 \leqslant r \leqslant 2$.

La matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

tiene el rango $R$, siendo $0 \leqslant r \leqslant R$. Es obvio que $r \leqslant R \leqslant r+1$.

Tiene lugar la siguiente afirmación.

*Sea dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas* (9). *Entonces:*

1. *si* $r = R = 0$, *es decir, si todos los coeficientes* $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, $c_1$, $c_2$ *son iguales a cero, cualquier par de números reales será la solución del sistema* (9);

2. *si* $r=0$, $R=1$, *es decir, si* $a_1=a_2=b_1=b_2=0$, *y* $c_1^2+c_2^2 \neq 0$, *entonces el sistema* (9) *no tiene soluciones;*

3. *si* $r=1$, $R=1$, *el sistema* (9) *tiene una infinidad de soluciones, pero no todo par de números reales será su solución;*

4. *si* $r=1$, $R=2$, *el sistema* (9) *no tiene soluciones;*

5. *si* $r=2$, $R=2$, *el sistema* (9) *tendrá una solución única la cual puede hallarse por la regla de Cramer.*

Es válida también la **afirmación inversa**

1. *Si el sistema* (9) *tiene la única solución, entonces* $r=R=2$;

2. *si el sistema* (9) *no tiene soluciones, entonces* $r \neq R$, *es decir, o bien* $r=0$ y $R=1$, *o bien* $r=1$ y $R=2$;

3. *si todo par de números reales es una solución del sistema* (9), *entonces* $r=R=0$;

4. *si el sistema* (9) *tiene una infinidad de soluciones, pero no todo par de números reales constituye su solución, entonces* $r=R=1$.

**Demostremos** estas afirmaciones sólo para el caso en que ambas ecuaciones del sistema (9) son de primer grado, es decir, cuando se verifican las condiciones $a_1^2+b_1^2 \neq 0$, $a_2^2+b_2^2 \neq 0$. En este caso cada una de las ecuaciones de dicho sistema define por separado una recta en el plano, donde viene dado el sistema de coordenadas $xOy$ (véase el cap. III). Esto nos ofrece la posibilidad de atribuir carácter geométrico a los razonamientos ulteriores en el análisis del sistema (9).

**Teorema**. *Sean dadas dos rectas mediante las ecuaciones*

$$a_1x + b_1y - c_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y - c_2 = 0, \qquad (10)$$

*donde* $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$, y $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

1. *Para que dos rectas se corten, es necesario y suficiente que sea* $R = r = 2$.

2. *Para que dos rectas sean paralelas, pero no coincidentes, es necesario y suficiente que sea* $r = 1$, $R = 2$.

3. *Para que dos rectas coincidan, es necesario y suficiente que sea* $r = R = 1$.

**Demostración.** Demostremos al principio la **suficiencia** de las condiciones.

1. Si $r = R = 2$, el sistema (10) tendrá la única solución, la cual se encuentra con facilidad por la regla de Cramer, y esto significa que las rectas tienen un punto común, es decir, se intersecan.

2. Si $r = 1$, $R = 2$, el sistema (10), es incompatible, por lo cual las rectas no tienen puntos comunes, es decir, son paralelas y no coinciden.

3. Si $r = R = 1$, todos los menores de segundo orden de las matrices básica y ampliada son nulos, es decir,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Estas condiciones pueden escribirse así:

$$a_1b_2 = b_1a_2, \qquad (11)$$
$$c_1b_2 = b_1c_2, \qquad (12)$$
$$a_1c_2 = a_2c_1. \qquad (13)$$

Analicemos ahora todos los casos que pueden tener lugar.

a) Si $a_1 = 0$, entonces $b_1 \neq 0$, puesto que $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$. En este caso de (11) se deduce que $a_2 = 0$, y por cuanto $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$, tenemos $b_2 \neq 0$. De (12) encontramos que $\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b^2} = \alpha$, y las ecuaciones de las rectas toman la forma

$$b_1(y - \alpha) = 0, \quad b_2(y - \alpha) = 0.$$

Ya que $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$, de aquí se desprende que estas rectas coinciden con la recta $y - \alpha = 0$.

b) Si $b_1 = 0$, entonces $a_1 \neq 0$, y de (11) se deduce que $b_2 = 0$ (con la particularidad de que $a_2 \neq 0$). Entonces, de (13) tenemos $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \beta$, y por esta razón las ecuaciones de las rectas tomarán la forma $a_1(x - \beta) = 0$, $a_2(x - \beta) = 0$. Por cuanto $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq$ $\neq 0$, de aquí se desprende que estas rectas coinciden con la recta $x - \beta = 0$.

c) Si $a_1 \neq 0$ y $b_1 \neq 0$, de (11) se deduce que $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \gamma$, y de (12) y (13) se desprende que $c_2 = \frac{b_2}{b_1} c_1 = \frac{a_2}{a_1} c_1$. De este modo, obtenemos que $a_2 = \gamma a_1$, $b_2 = \gamma b_1$, $c_2 = \gamma c_1$, por lo cual las ecuaciones de las rectas tomarán la forma

$$a_1 x + b_1 y - c_1 = 0, \quad \gamma (a_1 x + b_1 y - c_1) = 0.$$

Por cuanto $\gamma \neq 0$, de aquí se desprende que estas rectas coinciden.

Demostremos ahora la **necesidad** de las condiciones. La demostración se realizará por reducción al absurdo.

1. Supongamos que las rectas se cortan. Demostremos que $r = R = 2$. Si resultara que $r = 1$, $R = 2$, entonces, según lo demostrado, las rectas serían paralelas y no coincidentes. Si resultara que $r = R = 1$, entonces, según lo demostrado, las rectas serían coincidentes.

Por consiguiente, $r = R = 2$.

2. Supongamos que las rectas son paralelas. Demostremos que $r = 1$, $R = 2$. Si resultara que $r = R = 2$, entonces, según lo demostrado, las rectas se cortarían. Si resultara que $r = R = 1$, entonces, según lo demostrado, las rectas serían coincidentes. Por consiguiente, $r = 1$, $R = 2$.

3. Supongamos que las rectas coinciden. Demostremos que $r = R = 1$. Si resultara que $r = R = 2$, entonces, según lo demostrado, las rectas serían paralelas. Por consiguiente, $r = R = 1$. El teorema queda completamente demostrado.

### *Ejercicios*

**1.** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hállense $A+B$, $A-B$, $2A+3B$, $3A-2B$.

**2.** Hállese una matriz $C$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $A + 2C = 3B$.

**3.** Hállense los productos $AB$ y $BA$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**4.** Sea dada una matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hállense todas las matrices $X$ conmutables con $A$, es decir, aquellas, para las cuales $AX = XA$.

**5.** Una matriz $S = \alpha E$, donde $E$ es la matriz unidad de $n$-ésimo orden y $\alpha$, un número, recibe el nombre de matriz escalar. Demostrar que la matriz escalar $S$ es conmutable con cada matriz de orden $n$, es decir, si $A$ es una matriz de orden $n$, entonces $SA = AS$.

**6.** Muéstrese que las matrices $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ son conmutables. Hállese su producto.

7. Hállense todas las matrices cuadradas $B$, para las cuales $AB=0$, si $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

8. Hállese la forma general de la matriz $A$ de tercer orden, para la cual $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}A=0$.

9. Sea $J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Muéstrese que $J^2=-E$, $E^2=E$.

10. Sean dados un polinomio $P(x)=x^2-5x+6$ y una matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Hállese $P(A)=A^2-5A+6E$.

Escríbanse las matrices transpuestas para las matrices (11 ... 14):

11. $A=(2\ 1\ 3)$; 12. $B=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$; 13. $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; 14. $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

15. Compruébese el cumplimiento de la propiedad de transposición en el ejemplo de las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

16. Muéstrese que al multiplicar por la izquierda la matriz $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ por una matriz arbitraria $A$ de tercer orden se cambian de lugar las primeras dos filas de la matriz $A$. Establézcase qué sucede al multiplicar por la derecha.

17. Muéstrese que al multiplicar por la izquierda la matriz $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ por una matriz arbitraria $A$ de tercer orden, la 2[da] fila de la matriz $A$ queda multiplicada por $\alpha$. Establézcase qué ocurre al multiplicar por la derecha.

18. Muéstrese que al multiplicar la matriz $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & \alpha\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ por una matriz arbitraria $A$ de tercer orden a la derecha se agrega a la primera columna de la matriz $A$ la tercera columna multiplicada por $\alpha$. Establézcase qué ocurre al multiplicar por la izquierda.

Calcúlense los determinantes (19 . . . 25):

19. $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & -4 & 7\\ -3 & 12 & -15\end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix}a & 1 & a\\ -1 & a & 1\\ a & -1 & a\end{vmatrix}$ 22. $\begin{vmatrix}1 & b & 1\\ 0 & b & 0\\ b & 0 & b\end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix}a & 1 & a\\ 0 & -a & -1\\ a & 1 & -a\end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix}a & -a & a\\ a & a & -a\\ a & -a & -a\end{vmatrix}$. 25. $\begin{vmatrix}2 & -1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & -2 & 4\\ 3 & 2 & -1 & 3\\ 5 & -2 & 1 & -2\end{vmatrix}$.

Hállese el rango de la matriz (26 ... 28):

**26.** $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. **27.** $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 5 & -1 & -17 \\ 2 & -1 & 13 \end{pmatrix}$.

**28.** $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

**29.** Cerciórese de que para $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, si $|A|=ad-cb\neq 0$, entonces

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**30.** Hállese la matriz inversa $A^{-1}$, si $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

**31.** Demuéstrese que si las matrices $A$ y $B$ son conmutables, lo serán también las matrices inversas $A^{-1}$ y $B^{-1}$.

**32.** Cerciórese de que $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$, si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Resuélvase el sistema de ecuaciones (33 ... 40):

**33.** $\begin{cases} 5x_1+2x_2+3x_3+7=0, \\ 5x_1+2x_2+3x_3=4. \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} 5x_1-3x_2=7, \\ -2x_1+9x_2=4, \\ 2x_1+4x_2=-2. \end{cases}$

**35.** $\begin{cases} -x_1+2x+3x_3=0, \\ x_1-4x_2-13x_3=0, \\ -3x_1+5x_2+4x_3=0. \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} 2x-4y+z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2. \end{cases}$

**37.** $\begin{cases} x+2y+3z=3, \\ 2x+y-z=3, \\ 3x+3y+2z=10. \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} 4x_1+5x_3=6, \\ x_2-6x_3=-2. \\ 3x_1+4x_3=3. \end{cases}$

**39.** $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+4y+6z=3, \\ 3x+y-z=1. \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} 2x-3y+z-2=0, \\ x+5y-4z+5=0, \\ 4x+y-3z+4=0. \end{cases}$

CAPÍTULO

# XI

# NÚMEROS COMPLEJOS

Al estudiar los números reales hemos señalado que en el conjunto de números reales no se puede encontrar, por ejemplo, un número cuyo cuadrado sea igual a $(-1)$. Para que los problemas semejantes sean resolubles, el concepto de número se hace más amplio introduciendo en el análisis los números complejos.

## § 1. Concepto de número complejo

Sean dadas las expresiones del tipo $a + bi$, donde $a$ y $b$ son números reales e $i$, cierto símbolo cuyo sentido y relación con el número real $b$, al igual que el sentido del signo «+» que une $a$ y $b$, serán aclarados más abajo. Introduzcamos las definiciones de igualdad, suma y producto de tales expresiones.

Las expresiones $a + bi$ y $c + di$ se consideran *iguales*, si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$ simultáneamente. La igualdad entre las expresiones $a + bi$ y $c + di$ suele escribirse en la forma $a + bi = c + di$.

De la definición de igualdad se deduce que dos expresiones $a + bi$ y $c + di$ *son diferentes*, es decir, $a + bi \neq c + di$, si se cumple por lo menos una de las desigualdades $a \neq c$ o $b \neq d$.

**Observación.** De todos los signos de desigualdades, a saber, $\neq, <, \geqslant, \leqslant, >$ para las expresiones del tipo $a + bi$ se emplea solamente el signo $\neq$.

Se llama *suma* de las expresiones $a + bi$ y $c + di$ la expresión $(a + c) + (b + d)\,i$. La suma de las expresiones $a + bi$ y $c + di$ suele designarse por $(a + bi) + (c + di)$, es decir, por definición, $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$.

Se llama *producto* de las expresiones $a + bi$ y $c + di$ la expresión $(ac - bd) + (ad + bc)\,i$. El producto de las expresiones $a + bi$ y $c + di$ suele designarse por $(a + bi)(c + di)$, es decir, por definición, $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$.

El conjunto de todas las expresiones del tipo $a + bi$, que se distinguen, se suman y se multiplican de acuerdo con las defini-

ciones recién enunciadas, recibe el nombre de *conjunto de números complejos*, y cada elemento de dicho conjunto, es decir, la expresión $a + bi$, se denomina *número complejo*.

El número complejo $a + bi$ se denota frecuentemente con una letra, por ejemplo, con la letra $z$. En tal caso se escribe $z = a + bi$.

Sean dados los números complejos $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, $z_3 = a_3 + b_3i$, . . ., $z_n = a_n + b_ni$. Para determinar la suma de los números complejos $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, es necesario hallar la suma de los primeros dos números, luego a la suma obtenida añadir el tercer número, a esta última suma adicionar el cuarto número, etc, hasta que se agoten todos los sumandos. De modo análogo se determina también el producto de varios números complejos.

Si un número complejo $z$ figura como factor $n$ veces ($n \geqslant 2$), el producto $\underbrace{zz \ldots z}_{n \text{ veces}}$ recibe el nombre de *n-ésima potencia* ($n \geqslant 2$) *del número* $z$ y se designa con $z^n$, es decir, por definición,

$$\underbrace{zz \ldots z}_{n \text{ veces}} = z^n.$$

Además, por definición, $z^1 = z$.

Demos a conocer las **leyes principales** de adición y multiplicación de los números complejos:

a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (conmutatividad de la adición);

b) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (asociatividad de la adición);

c) $z_1z_2 = z_2z_1$ (conmutatividad de la multiplicación);

d) $(z_1z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2z_3)$ (asociatividad de la multiplicación);

e) $(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$ (distributividad de la multiplicación respecto de la adición).

La validez de estas leyes se desprende de la definición de suma y de producto de los números complejos y de la validez de las leyes análogas para la adición y multiplicación de los números reales (omitimos la comprobación de su validez).

Para las operaciones de adición y multiplicación de los números complejos se introducen las operaciones inversas respecto de ellas.

Se denomina *diferencia* de los números complejos $z_1$ y $z_2$ un número complejo $z_3$ tal, que, siendo adicionado a $z_2$, da $z_1$.

Mostremos que para cualesquiera números complejos $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$ la diferencia entre ellos $z_3 = z_1 - z_2$ existe, es única y se calcula según la regla $z_3 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$, es decir, existe el único número complejo $z_3 = x + yi$, el cual, siendo adicionado a $z_2$, da $z_1$. Por definición de suma de los números complejos tenemos $z_2 + z_3 = (a_2 + x) + (b_2 + y)\, i$. Por definición de igualdad entre los números complejos; los números $z_1$ y $z_2 + z_3$ son iguales si, y sólo si, se verifican simultáneamente las igualdades

$$a_2 + x = a_1, \quad b_2 + y = b_1.$$

Los números $x$ o $y$ se determinan siempre a partir de estas igualdades y, además, de un modo único: $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$, es decir, existe el único número complejo $z_3 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$ el cual será precisamente la diferencia entre $z_1$ y $z_2$.

Se denomina *cociente* de la división de un número complejo $z_1$ por otro número complejo $z_2$ tal, que $z_2 \neq 0 + 0i$, un número complejo $z_3$ que, siendo multiplicado por $z_2$, da $z_1$.

Se puede mostrar que para cualesquiera números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ $(z_2 \neq 0 + 0i)$ el cociente $\sqrt{z_3} = \sqrt{\frac{z_1}{z_2}}$ existe, es único y se calcula según la regla

$$z_3 = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

Esta igualdad aquí no se demuestra.

Veamos los números complejos de la forma $a + 0i$. Cada número de esta índole se acostumbra considerar como un número real $a$, es decir, todo número de la forma $a + 0i$ se identifica con el número real $a$. Los números $a$ y $a + 0i$ no se distinguen corrientemente e incluso suele escribirse la igualdad $a + 0i = a$. En particular, no se distinguen los números $0$ y $0 + 0i$, el número $0 + 0i$ también se denomina cero y se escribe $0 + 0i = 0$.

Veamos ahora los números complejos de la forma $0 + bi$. Es costumbre denotar tales números simplemente con $bi$ y escribir la igualdad $0 + bi = bi$. En particular, un número complejo $0 + 1i$ se acostumbra denotar simplemente con $i$ y escribir la igualdad $0 + 1i = i$. El número complejo $i$ se llama *unidad imaginaria*. Mostremos que la unidad imaginaria posee la propiedad de que $i^2 = -1$. En efecto, en virtud de los convenios asumidos se verifican las siguientes igualdades: $i^2 = (0 + 1i)^2 = (0 + 1i)\cdot(0 + 1i) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1) + (0\cdot 1 + 1\cdot 0)\, i = -1 + 0i = -1$.

Los números complejos del tipo $0 + bi$ se denominan *números imaginarios puros*.

De acuerdo con los convenios asumidos, cualquier número imaginario puro $bi$ representa el producto de dos números complejos: del número $b$ y de la unidad imaginaria $i$. Efectivamente,

$$(b + 0i)(0 + 1i) = (b\cdot 0 - 0\cdot 1) + (b\cdot 1 + 0\cdot 0)\, i = \\ = 0 + bi = bi.$$

Cualquier número complejo $a + bi$ representa la suma de dos números complejos: del número $a$ y del número imaginario puro $bi$. En efecto, $(a + 0i) + (0 + bi) = (a + 0) + (0 + b)\, i = a + bi$.

De la definición de operaciones de adición, sustracción y multiplicación de los números complejos se deduce que dichas operaciones pueden realizarse según las reglas que rigen las operaciones sobre los polimonios (véase el cap. II), sustituyendo $i^2$ por $-1$, y reuniendo después los términos que contienen $i$ y los que no la contienen.

**Ejemplos**: $(2+3i)-4+(7-13i)+4i=(2-4+7)+$
$+(3-13+4)\,i=5-6i$;

$(4+5i)+(x+yi)-(a^2-bi)=(4+x-a^2)+(5+$
$+y+b)\,i$;

$(a+bi)(x+yi)=ax+ayi+bxi+byi^2=(ax-by)+$
$+(ay+bx)\,i$;

$(2+4i)(7-i)=14-2i+28i-4i^2=18+26i.$

Sean $z_1$ y $z_2$ unos números complejos cualesquiera y $n$, un número natural cualquiera. Valiéndonos de las reglas para las operaciones con los números complejos, podemos demostrar con facilidad la validez de las fórmulas de multiplicación reducida:

$$(z_1+z_2)^n=z_1^n+C_n^1z_1^{n-1}z_2+C_n^2z_1^{n-2}z_2^2+\ldots+C_n^{n-1}z_1z_2^{n-1}+z_2^n;$$
$$z_1^n-z_2^n=(z_1-z_2)(z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_2+z_1^{n-3}z_2^2+\ldots+z_1z_2^{n-2}+z_2^{n-1}),$$

y, en particular, de las fórmulas

$$(z_1+z_2)^2=z_1^2+2z_1z_2+z_2^2; \qquad z_1^2-z_2^2=(z_1+z_2)(z_1-z_2).$$

**Interpretación geométrica de los números complejos.** Supongamos que en un plano está dado un sistema rectangular de coordenadas. A todo número complejo $z=$ $=a+bi$ le pondremos en correspondencia un punto en el plano, cuyas coordenadas son $a$ y $b$, es decir, el punto $M\,(a,\,b)$ (fig. 192). Es fácil ver que entre el conjunto de números complejos y el conjunto de puntos en el plano se ha establecido, de este modo, una correspondencia tal, que a todo número le corresponde solamente un punto y que a números distintos les corresponden distintos puntos. En el plano, además, no hay punto que no corresponda a cierto número complejo. Quiere decir, entre el conjunto de números complejos y el conjunto de puntos en el plano se ha establecido una correspondencia biunívoca y por eso podemos considerar que el número complejo $z=a+bi$ es un punto en el plano con coordenadas $(a,\,b)$.

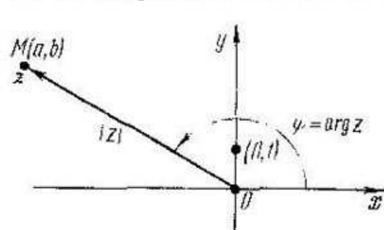


Fig. 192

Se llama *módulo* del número complejo $z=a+bi$ un número real $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Por cuanto al número complejo $z=a+bi$ se le puede poner en correspondencia un punto $M$ del plano con coordenadas $a$ y $b$, entonces, al módulo del número complejo se le puede atribuir el siguiente significado geométrico: $|z|$ es la distancia entre el punto correspondiente $M\,(a,\,b)$ y el origen de coordenadas. Veamos los siguientes problemas.

1. Hállese el conjunto de puntos de un plano que correspoden a los números complejos $z$ tales, que $|z| = 1$.

De conformidad con el significado geométrico del módulo de un número complejo, se trata de los puntos cuya distancia hasta el origen de coordenadas es igual a la unidad, es decir, de los puntos dispuestos en la circunferencia de radio igual a la unidad con centro en el origen de coordenadas (fig. 193).

2. Hállese el conjunto de puntos de un plano que corresponden a los números complejos $z$ tales, que $2 \leqslant |z| < 3$.

De acuerdo con el significado geométrico del módulo de un número complejo, se trata de los puntos dispuestos en el interior de un

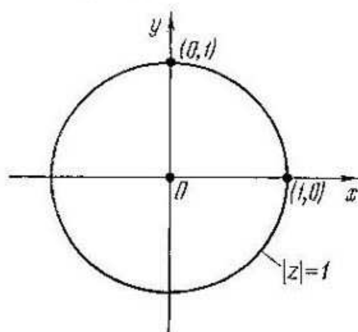



Fig. 193

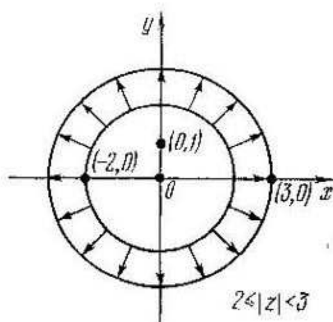



Fig. 194

anillo formado por las circunferencias de radios 2 y 3 con centro en el origen de coordenadas, incluida la circunferencia de radio 2 (fig. 194).

El número complejo $z = a + bi$ puede considerarse como un vector $z$, cuyo origen se ubica en el origen de coordenadas y el extromo, en el punto $M(a, b)$ que expresa dicho número (véase la fig. 192). En adelante, al hablar de los vectores que expresan los números complejos, supondremos que el origen de dichos vectores se dispone en el origen de coordenadas.

Veamos cómo se ilustran geométricamente la adición y la sustracción de dos números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ en el caso cuando tres puntos $O(0, 0)$, $M_1(a, b)$ y $M_2(c, d)$ no se disponen en una misma recta.

Sean dados los números $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ y $z_3 = (a+c) + (b + d)i$. Examinemos el vector $z_1$, cuyo extremo se ubica en el punto $M_1(a, b)$, el vector $z_2$ con su extremo en el punto $M_2(c, d)$ y el vector $z_3$ con extremo dispuesto en el punto $M_3(a + c, b + d)$. El vector $z_3$ es la diagonal del paralelogramo $OM_1M_3M_2$ (fig. 195). Por cuanto el número $z_3$ es la suma de los números $z_1$ y $z_2$, de aquí se desprende que la adición de dos números complejos puede interpretarse geométricamente como adición según la regla del paralelogra-

mo de los vectores $z_1$ y $z_2$, cuyos orígenes se encuentran en el origen de coordenadas, y los extremos, en los puntos $M_1$ $(a, b)$ y $M_2$ $(c, d)$ que expresan dichos números.

Los vectores que expresan los números complejos $z = a + bi$ y $(-z) = -a - bi$ se disponen simétricamente con relación al origen

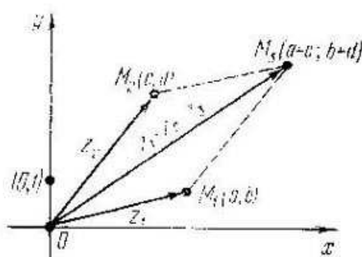


Fig. 195

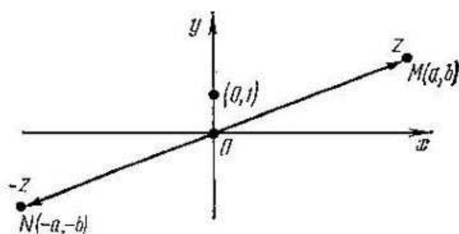


Fig. 196

de coordenadas, puesto que los extremos de estos vectores es decir, los puntos $M$ $(a, b)$ y $N$ $(-a, -b)$ son simétricos con relación al origen de coordenadas (fig. 196).

Sean dados los números $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$. Estudiemos el vector $z_1$, cuyo extremo se dispone en el punto $M_1$ $(a, b)$, y el vector

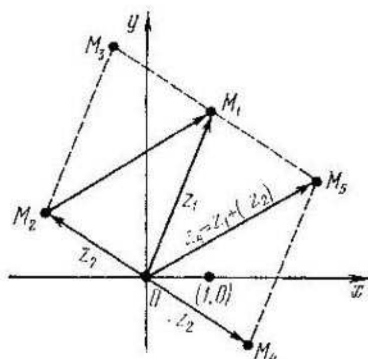


Fig. 197

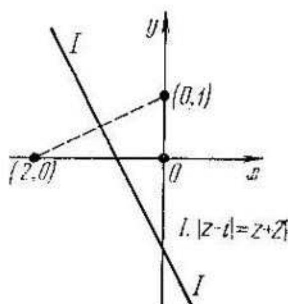


Fig. 198

$z_2$ con su extremo dispuesto en el punto $M_2$ $(c, d)$ (fig. 197). Construyamos sobre dichos vectores el paralelogramo $OM_1M_3M_2$. Veamos el vector $(-z_2)$, cuyo extremo se dispone en el punto $M_4$ $(-c, -d)$. Al sumar los vectores $z_1$ y $(-z_2)$ según la regla del paralelogramo, obtenemos su suma, el vector $z_4$, cuyo extremo se dispone en el punto $M_5$ $(a - c, b - d)$. Es evidente que la longitud del vector $z_4$ es igual a la del segmento $M_1M_2$. Por cuanto la longitud del vector $z_4$ es igual

a $|z_4| = |z_1 - z_2|$, de aquí se desprende que la longitud de la diagonal $M_1M_2$ es igual a $|z_1 - z_2|$ y el módulo de la diferencia entre dos números complejos $z_1$ y $z_2$ representa la distancia entre los puntos $M_1$ y $M_2$ que representan dichos números.

Tal interpretación geométrica de la suma y del módulo de la diferencia entre dos números complejos se emplea con frecuencia en la resolución de los problemas.

**Ejemplos.** 1. Hállese el conjunto de puntos del plano que correspondan a los números complejos $z$ tales, que se verifique $|z - i| = |z + 2|$.

La distancia de los puntos buscados a los puntos, correspondientes a los números complejos $i$ y $(-2)$ son iguales. Quiere decir, el conjunto buscado consta de los puntos de una recta que es perpendicular al segmento que une los puntos $(0; 1)$ y $(-2; 0)$ y que pasa por el centro de este segmento (fig. 198).

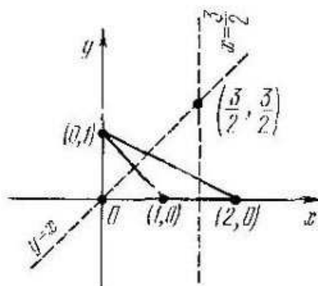


Fig. 199

2. Hállense los puntos $z$, que satisfacen la condición $|z - 1| = |z - 2| = |z - i|$.

Los puntos, correspondientes a los números 1, 2 y $i$, forman un triángulo. Solamente un punto satisface la condición del problema, a saber, el centro de la circunferencia circunscrita de dicho triángulo. Por cuanto el punto mencionado es equidistante con respecto de los puntos $(1; 0)$ y $(2; 0)$, entonces su coordenada es $x = \frac{3}{2}$, y por ser equidistante de los puntos $(1; 0)$ y $(0; 1)$, entonces $y = x = \frac{3}{2}$, es decir, la condición del problema la satisface el único número $z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} i$ (fig. 199).

Se denomina *argumento* de un número complejo $z = a + bi$, distinto de cero, cualquiera de los números $\varphi$ que representan la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{b}{a^2+b^2}. \end{cases}$$

Para el número $z = 0$ el argumento no se determina. El sistema dado tiene una infinidad de soluciones (puesto que en el plano de coordenadas el par de números $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ define un punto de la circunferencia unidad), con la particularidad de que si $\varphi_0$ es una de las soluciones, todas las demás soluciones se obtienen a partir de

ésta última por la fórmula $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, donde $k$ es un número entero cualquiera. De este modo, todo número complejo $z \neq 0$ cuenta con una infinidad de argumentos que se diferencian uno del otro en un número múltiplo de $2\pi$.

Se llama *argumento principal* de un número complejo $z = a + bi \neq 0$ el argumento de éste elegido en el intervalo $[0,2\pi)$ y se denota por $\arg z$.

El argumento de un número complejo $z$ tiene el siguiente significado geométrico. Si un número complejo $z = a + bi \neq 0$ se considera como un vector $z$ cuyo extremo se dispone en el punto $M(a, b)$, entonces la magnitud del ángulo $\varphi$, al cual se debe girar en el sentido contrario a las agujas del reloj el eje positivo $Ox$ hasta que coincida éste por primera vez con el vector $z$, es precisamente el argumento principal del número complejo $z$ (véase la fig. 192). La magnitud de cualquier ángulo que difiere del argumento principal $\arg z$ en un número entero de ángulos completos será también argumento del número en consideración $z$.

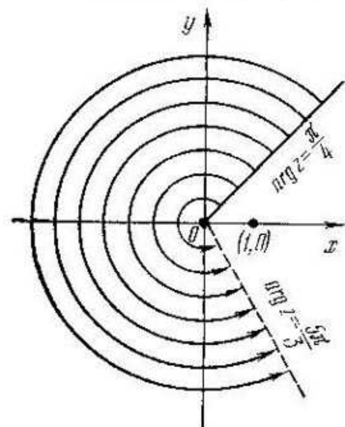


Fig. 200

**Ejemplo.** Hállense en un plano los puntos $z$ que satisfacen la condición $\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z < \frac{5\pi}{3}$.

Todos los puntos dispuestos en un rayo cualquiera que parte del origen de coordenadas tienen un mismo argumento principal, razón por la cual la condición del problema la satisfacen todos los puntos de aquella parte del plano que se dispone entre los rayos que parten del origen de coordenadas bajo los ángulos $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{3}$, como también por los puntos dispuestos en el primer rayo (fig. 200).

**Números complejos conjugados.** Un número complejo $\bar{z} = a - bi$ se denomina *conjugado del número complejo* $z = a + bi$.

De acuerdo con las fórmulas de multiplicación reducida, $z\bar{z} = (a + bi) \times (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$.

Esta propiedad de los números complejos conjugados permite reducir la operación de división de un número complejo $z_1$ por otro número complejo $z_2$ $(z_2 \neq 0)$ a la multiplicación de los números complejos $z_1$ y $\bar{z}_2$. En efecto, sean $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ y $z_2 \neq 0$, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 - a_1b_2 i + b_1a_2 i - b_1b_2 i^2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i,$$

**Ejemplo.** $\frac{2+i}{4-i}=\frac{(2+i)(4+i)}{(4+i)(4-i)}=\frac{8+2i+4i+i^2}{16+1}=\frac{7}{17}+\frac{6}{17}i.$

Por definición, si $z \neq 0$, tenemos $z^0=1$; si $z \neq 0$ y $n$ es un número natural, entonces $z^{-n}=\frac{1}{z^n}$.

**Ejemplos.** 1. $(2+i)^0=1$;

2. $i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{-i}{i(-i)}=\frac{-i}{-i^2}=-i$;

3. $(2+i)^{-2}=\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{1}{4+4i+i^2}=\frac{1}{3+4i}=\frac{1(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=$
$=\frac{3-4i}{9+16}=\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i.$

Es fácil ver que un número conjugado del número $\bar z$ es el número $z$, es decir, $z=\bar{\bar z}$, y, por eso, los números $\bar z$ y $z$ se llaman *recíprocamente conjugados*. En la interpretación geométrica de los números complejos los recíprocamente conjugados representan puntos simétricos con relación al eje real $Ox$ (fig. 201). Aportemos una serie de propiedades de los números recíprocamente conjugados.

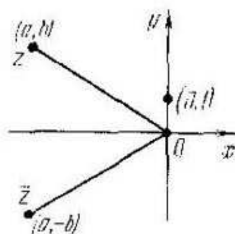


Fig. 201

a) $|\bar z|=|z|$.

Efectivamente, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $|\bar z|=$ $=\sqrt{a_2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$, es decir, $|\bar z|=$ $=|z|$.

b) Si $z=a$, donde $a$ es un número entero, entonces $\bar z=z$, $\arg \bar z=\arg z$.

c) Si $\bar z \neq z$, entonces $\arg \bar z=2\pi-\arg z$.

En efecto, si $\varphi$ es una solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \operatorname{sen}\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

entonces el número $\varphi_1=2\pi-\varphi$ es la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \operatorname{sen}\varphi=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

d) $|z|=\sqrt{z\bar z}$

En efecto, por cuanto $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, y como $z\bar z=$ $=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$, entonces $|z|=\sqrt{z\bar z}$.

e) La suma y el producto de los números recíprocamente conjugados es un número real.

En efecto, si $z = a + bi$, entonces $z + \bar{z} = 2a$ (un número real) y $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (un número real).

f) Un número conjugado de la suma de dos números complejos cualesquiera es igual a la suma de los números conjugados de los sumandos, es decir, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

En efecto, si $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, entonces $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)\, i = \overline{[(a + c) + (b + d)\, i]} = \overline{z_1 + z_2}$.

g) Un número conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de los números conjugados de los factores, es decir, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

En efecto, si $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, entonces $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\, i$ e $\overline{(z_1 z_2)} = (ac - bd) - (ad + bc)\, i$, y $\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) + (-ad - bc)\, i = (ac - bd) - (ad + bc)\, i$, es decir, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

h) Un número conjugado de la diferencia entre dos números complejos es igual a la diferencia entre los números conjugados, es decir, $\overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

La propiedad h) se demuestra igual que la f).

i) Si $z_2 \neq 0$, entonces $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

La propiedad i) se demuestra igual que la g).

j) Un número conjugado de la $n$-ésima potencia de un número complejo $z$ es igual a la $n$-ésima potencia del número conjugado de $z$, es decir, $\overline{(z^n)} = (\bar{z}^n)$, donde $n$ es un número natural.

Demostremos esta propiedad por el método de inducción matemática. Cuando $n = 1$, el teorema es obvio. Supongamos que es también obvio para $n = k$, es decir, admitamos que se verifica la igualdad $\overline{(z^k)} = (\bar{z})^k$, y demostremos que $\overline{(z^{k+1})} = (\bar{z})^{k+1}$. En efecto, $\overline{(z^{k+1})} = \overline{(z^k \cdot z)}$. De acuerdo con la propiedad g) de los números conjugados tenemos $\overline{(z^k z)} = \overline{(z^k)}\, \bar{z}$. Valiéndonos ahora de la suposición de que $n = k$, obtenemos $\overline{(z^k)}\, \bar{z} = (\bar{z})^k \bar{z} = (\bar{z})^{k+1}$, y la propiedad j) queda demostrada.

Como corolario de las propiedades demostradas más arriba (f, h, j) obtenemos la validez de la siguiente **afirmación.**

*Si un número $z$ viene expresado en términos del número complejo $\alpha$ con ayuda de la suma y la diferencia de las potencias naturales del último, entonces, sustituyendo en esta expresión el número $\alpha$ por el número conjugado de él, $\bar{\alpha}$, obtenemos el número $\bar{z}$, que es conjugado del número $z$.*

## § 2. Forma trigonométrica de los números complejos

Sea $z = a + bi$ un número complejo distinto de cero. Designemos con $r$ el módulo de este número y con $\varphi$, uno de sus argumentos. Entonces, el número $z$ puede ser escrito en la forma

$$z = r(\cos\varphi + i\ \mathrm{sen}\ \varphi). \tag{1}$$

El segundo miembro de la igualdad (1) recibe el nombre de *forma trigonométrica* del número complejo $z$.

La forma trigonométrica de un número complejo distinto de cero está definida de modo unívoco: es la notación del número complejo $z$ en la forma (1), donde $r$ es un número positivo igual al módulo del número $z$; el coseno y el seno se toman de un mismo ángulo $\varphi$, que es igual al argumento del número $z$, y, además, entre el coseno y el seno se pone el signo más.

Está claro que los números complejos dados a continuación están scritos no en forma trigonométrica:

$$z_1 = \cos\frac{\varphi}{2} + i\ \mathrm{sen}\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right); \quad z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right);$$

$$z_3 = \mathrm{sen}\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}; \quad z_4 = \cos\frac{\pi}{4} - i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{4}.$$

La forma trigonométrica de estos números complejos es la siguiente:

$$z_1 = \cos\frac{\varphi}{2} + i\ \mathrm{sen}\frac{\varphi}{2}; \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\ \mathrm{sen}\frac{4\pi}{3}\right);$$

$$z_3 = \cos\frac{\pi}{3} + i\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{3}; \quad z_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\ \mathrm{sen}\frac{7\pi}{4}.$$

Las operaciones de multiplicación, división y elevación a potencia entera con los números complejos se realizan con mayor comodidad, si dichos números están escritos en la forma trigonométrica.

**Teorema 1**. *El módulo del producto de dos números complejos es igual al producto de sus módulos, y el argumento es igual a la suma de los argumentos.*

**Demostración**. Sean dados los números complejos $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\ \mathrm{sen}\ \varphi_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\ \mathrm{sen}\ \varphi_2)$. Analicemos el número $z_3 = z_1 z_2$. Aplicando las reglas que rigen las operaciones sobre los números complejos y, además, las fórmulas para el coseno y el seno de la suma de dos ángulos, tenemos:

$$\begin{aligned} z_3 = z_1 z_2 &= [r_1(\cos\varphi_1 + i\ \mathrm{sen}\ \varphi_1)]\ [r_2(\cos\varphi_2 + i\ \mathrm{sen}\ \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 + i\ \mathrm{sen}\ \varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\ \mathrm{sen}\ \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \mathrm{sen}\ \varphi_1\ \mathrm{sen}\ \varphi_2) + (\mathrm{sen}\ \varphi_1\cos\varphi_2 + \\ &\qquad + \cos\varphi_1\ \mathrm{sen}\ \varphi_2)\, i] = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \\ &\qquad + \varphi_2) + i\ \mathrm{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Así pues, $z_3 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)]$, es decir, el número $z_3$ está escrito en la forma trigonométrica y su módulo es igual a $r_1 r_2$, mientras que su argumento es $(\varphi_1 + \varphi_2)$, lo que demuestra el teorema.

**Teorema 2.** *El módulo del cociente de dos números complejos $z_1$ y $z_2$ ($z_2 \neq 0$) es igual al cociente de sus módulos, y el argumento es igual a la diferencia entre los argumentos.*

La demostración de este teorema es semejante a la del teorema 1, se debe solamente multiplicar con anticipación el numerador y el denominador del cociente $\frac{z_1}{z_2}$ por $(\cos\varphi_2 - i \operatorname{sen}\varphi_2)$.

**Teorema 3 (fórmula de Moivre).** *Sea $z$ un número complejo cualquiera distinto de cero y sea $n$ cualquier número entero*, en este caso tenemos

$$z^n = [r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi). \qquad (2)$$

**Demostración.** 1. Para cualquier $n$ natural demostremos esta fórmula por el método de inducción matemática.

Cuando $n = 1$, la fórmula es justa. Supongamos que la fórmula (2) es también justa para $n = k$, es decir, admitamos que se verifica la igualdad

$$z^k = [r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^k = r^k(\cos k\varphi + i \operatorname{sen} k\varphi). \qquad (3)$$

Demostremos que la validez de la igualdad (3) predetermina el hecho de que la fórmula (2) se verifica también para $n = k + 1$. Aplicando la fórmula (3), las reglas que rigen las operaciones sobre los números complejos y las fórmulas para el seno y coseno de la suma de dos ángulos, tenemos

$$z^{k+1} = z^k z = [r^k(\cos k\varphi + i \operatorname{sen} k\varphi)][r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)] =$$
$$= r^{k+1}[(\cos k\varphi \cos\varphi - \operatorname{sen} k\varphi \operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen} k\varphi \cos\varphi +$$
$$+ \cos k\varphi \operatorname{sen}\varphi)] = r^{k+1}[\cos(k+1)\varphi + i \operatorname{sen}(k+1)\varphi],$$

es decir, la fórmula (2) queda demostrada para $n = k + 1$. Por consiguiente, según el método de inducción matemática la fórmula (2) es válida para cualquier $n$ natural.

2. Si $n = 0$ y $z \neq 0$, entonces, por definición, $z^0 = 1$, por lo cual $z^0 = 1 \cdot (\cos 0\varphi + i \operatorname{sen} 0\varphi)$, es decir, la fórmula (2) es justa para $n = 0$.

3. Sea $n = -1$. Aplicando la definición de potencia con exponente entero negativo y el teorema 2, llegamos a que

$$z^{-1} = \frac{\cos 0 + i \operatorname{sen} 0}{r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(+\varphi)],$$

es decir, para $n = -1$ la fórmula (2) es válida.

4. Sea $n$ un número entero negativo cualquiera, entonces $n = -m$, donde $m = |n|$ es un número natural. Aplicando primeramente la definición de potencia con exponente entero, y luego, la

validez de la fórmula (2) para $n = -1$, al principio, y después para cualquier $m$ natural, tenemos

$$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^m = \left\{\frac{1}{r\,[\cos(+\varphi) + i \operatorname{sen}(+\varphi)]}\right\}^m =$$

$$= \left\{\frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi)]\right\}^m =$$

$$= \left(\frac{1}{r}\right)^m [\cos(-m\varphi) + i \operatorname{sen}(-m\varphi)] = r^n\ (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi).$$

Así pues, la fórmula (2) es válida para cualquier $n$ entero. El teorema está demostrado.

He aquí un ejemplo de aplicación de la fórmula de Moivre. Calculemos sen $3x$ y cos $3x$ a través de sen $x$ y cos $x$. Según la fórmula de Moivre,

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x.$$

Al mismo tiempo, de acuerdo con la fórmula del binomio de Newton,

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^3 = \cos^3 x + i\, 3\cos^2 x \operatorname{sen} x + 3 \cos x\,(i \operatorname{sen} x)^2 +$$
$$+ (i \operatorname{sen} x)^3 = (\cos^2 x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x) + i\,(3 \cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x).$$

Así, según la regla de igualdad de los números complejos, tenemos

$$\operatorname{sen} 3x = 3 \cos^2 x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x, \quad \cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \operatorname{sen}^2 x.$$

Aplicando la identidad trigonométrica fundamental, podemos escribir estas fórmulas en la forma:

$$\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x, \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

**Observación.** Estas mismas fórmulas se han obtenido en el cap. V con ayuda de otro método. Haciendo uso de las fórmulas de Moivre y del binomio de Newton, podemos calcular cos $nx$ y sen $nx$ para cualquier número natural $n$.

La forma trigonométrica de los números complejos permite demostrar las propiedades de los módulos de los números complejos:

a) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$;

b) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, si $z_2 \neq 0$;

c) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

d) $|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

e) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$;

f) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$.

Demostremos estas propiedades. La propiedad a) se ha demostrado en el teorema 1, y la propiedad b), en el teorema 2.

Demostremos la propiedad c) Sea $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)$, y $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_2)$. Por cuanto

$$(z_1 + z_2) = (r_1 \cos\varphi_1 + r_2 \cos\varphi_2) + i\,(r_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + r_2 \operatorname{sen}\varphi_2),$$

entonces

$$|z_1+z_2| = (r_1^2\cos^2\varphi_1 + 2r_1r_2\cos\varphi_2 +$$
$$+ r_2^2\cos^2\varphi_2 + r_1^2\operatorname{sen}^2\varphi_1 + 2r_1r_2\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{sen}\varphi_2 + r_2^2\operatorname{sen}^2\varphi_2)^{1/2} =$$
$$= \sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Por cuanto $\cos(\varphi_1-\varphi_2)\leqslant 1$, entonces $|z_1+z_2|\leqslant\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2} = r_1+r_2 = |z_1|+|z_2|$. La propiedad c) está demostrada.

La propiedad d) se demuestra análogamente.

La propiedad e) se desprende de la propiedad d). En efecto, $|z_1| = |(z_1+z_2)-z_2|\leqslant|z_1+z_2|+|z_2|$, de donde

$$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|. \qquad (4)$$

Análogamente, $|z_2| = |(z_2+z_1)-z_1|\leqslant|z_2+z_1|+|z_1|$, de donde

$$|z_2|-|z_1|\leqslant|z_1+z_2|. \qquad (5)$$

La validez de las desigualdades (4) y (5) predetermina la validez de la propiedad e).

La propiedad f) se demuestra de igual manera.

**Raíces de los números complejos y sus propiedades.** En el capítulo IV se resolvía un problema: hallar, para cualquier número dado $a$ y cualquier número natural dado $n$, un número $b$ tal, que se verifique $b^n = a$. Los números $b$ suelen llamarse raíces de $n$-ésimo grado del número $a$. Allí se mostró que si el número $a$ es real y positivo, y $n$, un número natural par, entonces existen dos números reales, $b_1$ y $b_2$, tales, que $b_1^n = a$ y $b_2^n = a$; si $a$ es un número entero, y $n$, un número natural impar, existe el único número real $b$ tal, que $b^n = a$.

No obstante, en el dominio de números reales ya no se puede hallar un número cuya potencia par sea igual a un número negativo. En el dominio de números complejos esto resulta posible. Es válida una afirmación más general: en el conjunto de números complejos puede hallarse la raíz de cualquier grado natural de cualquier número complejo. Esta afirmación es un corolario del siguiente teorema.

**Teorema 4.** *Sea $z$ un número complejo, $z\neq 0$, y sea $n$ un número natural. Existen $n$ diferentes números complejos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$* tales, que $\alpha_i^n = z$, donde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Estos números se denominan *raíces de grado $n$ del número complejo $z$*. Para designar dichas raíces no hay símbolos especiales semejantes al símbolo que se emplea para denotar una raíz aritmética.

**Demostración.** Cuando $n = 1$, el teorema es obvio. Supongamos que $n\geqslant 2$ y sea $z = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$ $(z\neq 0)$. Buscaremos un número complejo $\alpha = \rho(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi)$ tal, que sea $\alpha^n = z$. Mostremos que tal número $\alpha$ existe. Más aún, mostremos que hay una infinidad de tales números, pero solamente $n$ de ellos se diferencian entre sí.

De acuerdo con la fórmula de Moivre tenemos

$$z = \alpha^n = \rho^n (\cos n\psi + i \operatorname{sen} n\psi).$$

Por definición de módulo de un número complejo, $|z| = \rho^n$, es decir, $r = \rho^n$, de donde $\rho = \sqrt[n]{r}$ (por definición de módulo de un número complejo $z \neq 0$, los números $\rho$ y $r$ son positivos, por lo cual el símbolo de la raíz aritmética en este caso está justificado).

Recurriendo a la definición de igualdad entre dos números complejos, llegamos a que se verifican a la vez las igualdades

$$\begin{cases} \cos n\psi = \cos \varphi, \\ \operatorname{sen} n\psi = \operatorname{sen} \varphi. \end{cases}$$

Estas igualdades se verifican simultáneamente si, y sólo si, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, donde $k$ es cualquier número entero, es decir, para $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, donde $k$ es cualquier número entero. Quiere decir, los números $\alpha$ son tales, que cada uno de ellos satisface la igualdad $\alpha^n = r (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, además ellos existen y pueden ser escritos en la forma

$$\alpha = \sqrt[n]{r} \left\{ \cos \left( \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right\}, \qquad (6)$$

donde $k$ es un número entero cualquiera. Designando con $\alpha_p$ la raíz, que se calcula según la fórmula (6) para $k = p$, obtenemos:

$$\alpha_0 = \sqrt[n]{r} \left\{ \cos \left( \frac{\varphi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi}{n} \right) \right\},$$

$$\alpha_1 = \sqrt[n]{r} \left\{ \cos \left( \frac{\varphi + 2\pi}{u} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi + 2\pi}{n} \right) \right\},$$

$$\alpha_2 = \sqrt[n]{r} \left\{ \cos \left( \frac{\varphi + 2\pi \cdot 2}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi + 2\pi \cdot 2}{n} \right) \right\},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\alpha_{n-1} = \sqrt[n]{r} \left\{ \cos \left( \frac{\varphi + 2\pi (n-1)}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi + 2\pi (n-1)}{n} \right) \right\},$$

$$\alpha_n = \sqrt[n]{r} \left\{ \cos \left( \frac{\varphi + 2\pi n}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi + 2\pi n}{n} \right) \right\} = \alpha_0,$$

$$\alpha_{n+1} = \sqrt[n]{r} \left\{ \cos \left( \frac{\varphi + 2\pi (n+1)}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\varphi + 2\pi (n+1)}{n} \right) \right\} = \alpha_1,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\alpha_{2n} = \alpha_0,$$

$$\alpha_{-1} = \alpha_{n-1},$$

$$\alpha_{-2} = \alpha_{n-2},$$

. . . . . . .

$$\alpha_{-n} = \alpha_0$$

. . . . . . .

De aquí se ve con facilidad que para cualquier $p$ entero se verifican las igualdades $\alpha_0 = \alpha_{pn}$, $\alpha_1 = \alpha_{pn+1}$, $\alpha_2 = \alpha_{pn+2}$, . . ., . . ., $\alpha_{n-1} = \alpha_{pn+n-1}$.

Así pues, hay exactamente $n$ raíces diferentes: $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, . . . . . ., $\alpha_{n-1}$. Ellas pueden calcularse según la fórmula

$$\alpha_k = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right\}, \tag{7}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Cabe señalar que de la fórmula (7) pueden obtenerse todas las $n$ raíces, si en lugar de $k$ sustituimos en dicha fórmula cualesquiera $n$ números enteros seguidos.

**Ejemplo.** Hállense las raíces de tercer grado del número $z = \sqrt{3}+i$.

Por cuanto $r = 2$, y $\varphi = \frac{\pi}{6}$, entonces $\alpha_k = \sqrt[3]{2}\left\{\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}\right)\right\}$, donde $k = 1, 2, 3$, es decir,

$$\alpha_1 = \sqrt[3]{2}\left\{\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{13\pi}{18}\right)\right\},$$

$$\alpha_2 = \sqrt[3]{2}\left\{\cos\left(\frac{25\pi}{18}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{25\pi}{18}\right)\right\},$$

$$\alpha_3 = \sqrt[3]{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right)\right\}.$$

Analicemos un caso particular: la búsqueda de la raíz de $n$-ésimo grado de la unidad, es decir, hallemos los números $\alpha_k$ tales, que se verifique $\alpha_k^n = 1$. Por cuanto $r = 1$ y $\varphi = 0$, tenemos

$$\alpha_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \tag{8}$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Si $n = 2m$ (un número par), entonces entre las raíces citadas existen dos reales, $\alpha_0 = 1$ y $\alpha_m = -1$. Si $n = 2m+1$ (un número impar), entonces existe la única raíz real que es $\alpha_0 = 1$.

Demos a conocer también otras propiedades de las raíces de $n$-ésimo grado de la unidad:

a) $|\alpha_k| = 1$;

b) $\alpha_k \alpha_m = \alpha_{k+m}$;

c) $\frac{\alpha_k}{\alpha_m} = \alpha_{k-m}$;

d) $\alpha_k^m = \alpha_{km}$, donde $m$ es un número entero cualquiera (la raíz $\alpha_n$ se halla por la fórmula (8), donde en lugar de $k$ se debe tomar $n$).

Demostremos estas propiedades. La propiedad a) se deduce de la definición de módulo de un número complejo.

Para demostrar la propiedad b), hagamos uso del teorema sobre el producto de números complejos en la forma trigonométrica:

$$\alpha_k\alpha_m = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right)+\left(\frac{2\pi m}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right)+\left(\frac{2\pi m}{n}\right) = \alpha_{k+m}.$$

La propiedad c) se demuestra análogamente.

Demostremos la propiedad d). De acuerdo con la fórmula de Moivre tenemos .

$$\alpha_k^m = \cos\left[\left(\frac{2\pi k}{n}\right)m\right] + i \operatorname{sen}\left[\left(\frac{2\pi k}{n}\right)m\right] = \alpha_{km}.$$

Veamos ahora la interpretación geométrica de la $n$-ésima potencia de la unidad:

$$\alpha_0 = 1,$$

$$\alpha_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

$$\alpha_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{n}\right),$$

$$\alpha_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{n}\right), \ \ldots,$$

$$\alpha_{n-2} = \cos\left[\frac{2\pi(n-2)}{n}\right] + i \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi(n-2)}{n}\right],$$

$$\alpha_{n-1} = \cos\left[\frac{2\pi(n-1)}{n}\right] + i \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi(n-1)}{n}\right].$$

Es evidente que los puntos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ serán los vértices de un $n$-ángulo regular inscrito en la circunferencia unidad y uno de los vértices del $n$-ángulo citado será el punto $A_0$ (1; 0).

**Ejemplos.** 1. Sea $n=3$, entonces $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $\alpha_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)$. Los puntos $A_0 (1; 0)$, $A_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $A_2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ son los vértices del triángulo regular $A_0A_2A_2$ inscrito en la circunferencia unidad (fig. 202).

2. Sea $n = 4$, entonces $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -i$. Los puntos $A_0$ (1; 0), $A_1$ (0; 1), $A_2$ = (−1; 0) y $A_3$ (0; −1) son los vértices del cuadrado $A_0A_1A_2A_3$, inscrito en la circunferencia unidad (fig. 203).

Aduzcamos la fórmula para una raíz de $n$-ésimo grado del número (−1). Por cuanto $r=1$ y $\varphi=\pi$, entonces $\alpha_k = \cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi+2\pi k}{n}\right)$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

De aquí se ve que si $n = 2m$ (un número par), entonces entre $\alpha_k$ no hay ningún número que sea real. Si $n = 2m + 1$ (número impar), existe el único número real $\alpha_m = -1$.

En general, para cualquier número positivo $a$ y todo número natural par $n$ existen sólo dos números reales, $b_1$ y $b_2$, tales, que $b_1^n = b_2^n = a$.

En efecto, como para cualquier número positivo $a = |a| \times (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$, entonces todas las raíces de $n$-ésimo grado de dicho número se calculan según la fórmula $b_k = \sqrt[n]{|a|} \left\{\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\right\}$.

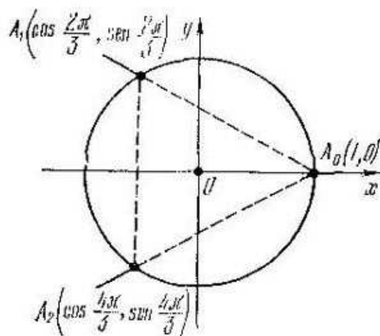



Fig. 202

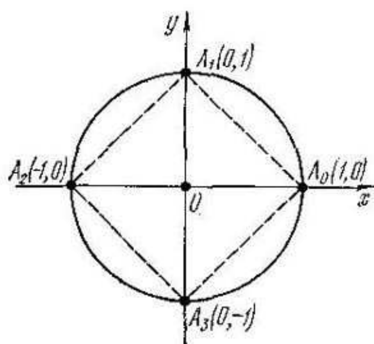



Fig. 203

Si $n = 2m$, entre los números mencionados habrá solamente dos números reales, $b_0 = \sqrt[n]{|a|}$ y $b_m = -\sqrt[n]{|a|}$, lo que se afirmó más arriba.

De modo análogo podemos demostrar la validez de las siguientes **afirmaciones**:

*Para cualquier número positivo $a$ y todo número natural impar $n$ existe el único número real $b = \sqrt[n]{a}$ tal, que $b^n = a$.*

*Para cualquier número negativo $a$ y todo número natural impar $n$ existe el único número real $b = -\sqrt[n]{|a|}$ tal, que $b^n = a$.*

*Para cualquier número negativo $a$ y todo número natural par $n$ no existe ningún número real $b$ tal, que se verifique $b^n = a$.*

## § 3. Campos de números y anillos de números

En este párrafo se analizan los *conjuntos de números*, con la particularidad de que por conjuntos de números se entienden o bien todos los números complejos o bien alguna parte de ellos.

En adelante por *operación* se entiende una de las cuatro operaciones aritméticas: adición, multiplicación, sustracción y división.

Un conjunto se denomina *cerrado* respecto de cierta operación dada, si la aplicación de dicha operación a todo par de números perteneciente al conjunto proporciona un número del mismo conjunto.

**Ejemplos.** 1. El conjunto de números naturales es cerrado respecto de la operación de adición, puesto que la suma de cualesquiera números naturales es un número natural.

**Ejemplos.** 1. El conjunto de todos los números complejos forma un campo llamado campo de números complejos.

2. El conjunto de números naturales no es cerrado respecto de la operación de sustracción, puesto que la diferencia entre dos números naturales no siempre es un número natural, por ejemplo $2 - 3 = -1$ ($-1$ no es un número natural).

3. Un conjunto compuesto por 0, 1 y $-1$ es cerrado respecto de la operación de multiplicación.

4. El conjunto de números enteros es cerrado respecto de la operación de sustracción, pero no es cerrado respecto de la operación de división.

Un conjunto de números, cerrado respecto de las operaciones de adición, multiplicación, sustracción y división (a excepción de la división por cero) recibe el nombre de *campo de números.*

**Ejemplos.** 1. El conjunto de todos los números complejos forma un campo de números complejos.

2. El conjunto de todos los números reales forma un campo, llamado campo de números reales.

3. El conjunto de todos los números racionales forma un campo llamado campo de números racionales.

4. El conjunto de todos los números enteros no forma un campo de números, pues no es cerrado respecto de la operación de división.

5. El conjunto de números del tipo $(p + q\sqrt{2})$, donde $p$ y $q$ son números racionales cualesquiera, forma un campo de números.

**Demostración.** a) Por cuanto

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) + (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2},$$

y $(p_1 + p_2)$, $(q_1 + q_2)$ son números racionales, entonces el carácter cerrado de dicho conjunto respecto de la operación de adición queda demostrado.

De modo análogo se demuestra el carácter cerrado respecto de la operación de sustracción.

b) Por cuanto

$$(p_1 + q_1\sqrt{2})\,(p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1p_2 + 2q_1q_2) + (p_1q_2 + p_2q_1)\,\sqrt{2},$$

y $(p_1p_2 + 2q_1q_2)$, $(p_1q_2 + p_2q_1)$ son números racionales, entonces queda demostrado el carácter cerrado de este conjunto respecto de la operación de multiplicación.

c) Por cuanto

$$\frac{(p_1 + q_1\sqrt{2})}{(p_2 + q_2\sqrt{2})} = \frac{(p_1 + q_1\sqrt{2})\,(p_2 - q_2\sqrt{2})}{(p_2 + q_2\sqrt{2})\,(p_2 - q_2\sqrt{2})} = \frac{p_1p_2 - 2q_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2} + \frac{q_1p_2 - p_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2}\sqrt{2}$$

y $p_2^2 - 2q_2^2 \neq 0$, entonces el carácter cerrado respecto de la operación de división queda demostrado.

Así pues, el conjunto de números del tipo $(p + q\sqrt{2})$, donde $p$, $q$ son números racionales cualesquiera, es un campo.

6. El conjunto de números del tipo $(p + q\sqrt{2})$, donde $p$, $q$ son números naturales cualesquiera, no es un campo, puesto que el conjunto de números naturales no es cerrado respecto de la operación de sustracción.

El conjunto de números, cerrado respecto de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación, recibe el nombre de *anillo de números.*

**Ejemplos.** 1. Cualquier campo de números es un anillo de números.

2. El conjunto de números enteros es un anillo de números, puesto que este conjunto es cerrado respecto de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación.

3. El conjunto de números pares es un anillo de números, puesto que al adicionar, sustraer y multiplicar números pares se obtiene de nuevo un número par.

4. El conjunto de números impares no será un anillo, puesto que al adicionar números impares ya resulta un número par, es decir, tal conjunto de números no es cerrado respecto de la operación de adición.

5. El conjunto de números del tipo $(p + q\sqrt{2})$, donde $p$ y $q$ son números enteros cualesquiera, es un anillo de números, pero no es un campo de números. Efectivamente, por cuanto el conjunto de números enteros es cerrado respecto de la operación de adición, sustracción y multiplicación, entonces

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) + (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2},$$

$$(p_1 + q_1\sqrt{2}) - (p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1 - p_2) + (q_1 - q_2)\sqrt{2},$$

$$(p_1 + q_1\sqrt{2})(p_2 + q_2\sqrt{2}) = (p_1p_2 + 2q_1q_2) + (p_1q_2 + p_2q_1)\sqrt{2},$$

donde $(p_1 + p_2)$, $(q_1 + q_2)$, $(p_1 - p_2)$, $(q_1 - q_2)$, $(p_1p_2 + 2q_1q_2)$, $(p_1q_2 + p_2q_1)$ son números enteros. Por consiguiente, el conjunto de números del tipo $(p + q\sqrt{2})$ es cerrado respecto de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación, es decir, es un anillo de números.

Veamos la operación de división. Por cuanto

$$\frac{p_1 + q_1\sqrt{2}}{p_2 + q_2\sqrt{2}} = \frac{p_1p_2 - 2q_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2} + \frac{q_1p_2 - p_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2}\sqrt{2}$$

y el conjunto de números enteros no es cerrado respecto de la operación de división, entonces para $p_1$, $p_2$, $q_1$, $q_2$ enteros las expresiones numéricas $\frac{p_1p_2 - 2q_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2}$, $\frac{q_1p_1 - p_1q_2}{p_2^2 - 2q_2^2}$

pueden adquirir también valores no enteros. Por consiguiente, el conjunto de números del tipo $(p + q\sqrt{2})$ no es cerrado respecto de la operación de división, es decir, no es un campo de números.

## § 4. Polinomios sobre el campo de números complejos

Se llama *polinomio de grado n* ($n$ es un número entero no negativo dado) *de la variable x sobre el campo de números K* la expresión de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son números dados del campo $K$, con la particularidad de que $a_0 \neq 0$.

De esta definición se deduce, en particular, que los polinomios de grado nulo son números del campo $K$ distintos de cero. El número cero se considera un polinomio, con la particularidad de que es el único polinomio cuyo grado no está definido.

Para la notación abreviada de los polinomios se emplean, de ordinario, los siguientes símbolos: $P(x)$, $Q(x)$, $T(x)$, $R(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ u otros; si se quiere recalcar que un polinomio $P(x)$ es de grado $n$, se escribe $P_n(x)$. En el § 5 del capítulo II los polinomios se estudiaban sobre el campo de números reales.

En este párrafo los polinomios se estudian, principalmente, sobre el campo de números complejos y por eso en lo que sigue por polinomio se entenderá un *polinomio sobre el campo de números complejos.* En los casos cuando los polinomios se consideran sobre otros campos de números, esto se especificará especialmente.

Dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se consideran *idénticamente iguales* (a veces se dice, brevemente, iguales), si, y sólo si, son iguales sus grados y los coeficientes de $x$ en potencias iguales. Para la notación de una igualdad idéntica de los polinomios se usa el signo de igualdad, si los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ son idénticamente iguales, se escribe $P(x) = Q(x)$. Quiere decir, si

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

entonces $P_n(x) = Q_m(x)$ si, y sólo si, $n = m$ y $a_{n-i} = b_{m-i}$ para todos los $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$.

Se denomina *suma* de los polinomios

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m,$$

donde $n \geqslant m$, un polinomio $T(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}x + c_n$ tal, que $c_{n-i} = a_{n-i} + b_{m-i}$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, con la particularidad de que $b_{m-i} = 0$ para todo $i = m+1, m+2, \ldots, n$, es decir, recibe el nombre de suma de

los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ el polinomio $T(x)$, cuyos coeficientes de toda potencia de la variable $x$ es igual a la suma de los coeficientes de la misma potencia de $x$ en los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$, con la particularidad de que si $n > m$, entonces los coeficientes $b_{m+1}$, $b_{m+2}, \ldots, b_n$ se deben considerar iguales a cero. Para hallar la suma de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ se deben escribir todos los términos sucesivos de estos dos polinomios y, a continuación, reducir los términos semejantes.

Se llama producto de dos polinomios

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

un polinomio

$$R(x) = d_0x^{m+n} + d_1x^{m+n-1} + d_2x^{m+n-2} + \ldots + d_{n+m-1}x + d_{n+m}$$

tal, que $d_i = \sum\limits_{p+q=i} a_{n-p}b_{m-q}$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n+m$,

es decir, recibe el nombre de producto de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ un polinomio $R(x)$, cuyo coeficiente $d_i$ es el resultado de la adición de todos los productos, en cada uno de los cuales se multiplican tales coeficientes $a_k$ y $b_l$ de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$, la suma de los índices $k + l$ de los cuales sea igual a $n + m - i$. Para hallar el producto de los polinomios $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ se debe multiplicar cada término del polinomio $P_n(x)$ por cada término del polinomio $Q_m(x)$, sumar los polinomios obtenidos y reducir los términos semejantes.

No es difícil de comprobar que son válidas las siguientes **leyes principales** de adición y multiplicación de los polinomios:

1. $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$ (conmutatividad de la adición);

2. $[P(x) + Q(x)] + T(x) = P(x) + [(Q(x) + T(x)]$ (asociatividad de la adición);

3. $P(x)\,Q(x) = Q(x)\,P(x)$ (conmutatividad de la multiplicación);

4. $[P(x)\,Q(x)]\,T(x) = P(x)\,[Q(x)\,T(x)]$ (asociatividad de la multiplicación);

5. $[P(x) + Q(x)]\,T(x) = P(x)\,T(x) + Q(x)\,T(x)$ (distributividad de la adición respecto de la multiplicación).

*Restar* de un polinomio $P(x)$ otro polinomio $T(x)$ significa hallar tal polinomio $Q(x)$, que se verifique $P(x) = T(x) + Q(x)$. No es difícil comprobar que para cualesquiera dos polinomios $P(x)$ y $T(x)$ tal polinomio $Q(x)$ existe y es único, él se denomina *diferencia* entre los polinomios $P(x)$ y $T(x)$ y se denota con $Q(x) = P(x) - T(x)$.

Si $T(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ y

$T^*(x) = -T(x) =$

$= (-a_0)\,x^n + (-a_1)\,x^{n-1} + (-a_2)\,x^{n-2} + \ldots + (-a_{n-1})\,x +$

$+ (-a_n)$, entonces $Q(x) = P(x) + T^*(x)$. Quiere decir, en el conjunto de polinomios es siempre realizable la operación de sustracción, inversa de la de adición.

*Dividir exactamente* un polinomio $P(x)$ por otro polinomio $T(x)$, distinto de cero, significa hallar un polinomio $Q(x)$ tal, que se verifique $P(x) = T(x) Q(x)$. Si tal polinomio $Q(x)$ existe, se dice que el polinomio $T(x)$ es divisor del polinomio $P(x)$, y el polinomio $Q(x)$ se llama *cociente* de la división del polinomio $P(x)$ por el $T(x)$.

No todo polinomio $P(x)$ es divisible exactamente por el polinomio $T(x)$. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + i$ no se divide exactamente por el polinomio $x + 1$. Quiere decir, en el conjunto de polinomios no siempre se realiza la operación de división exacta, inversa de la operación de multiplicación. En cambio, en el conjunto de polinomios es siempre realizable la operación de división inexacta.

*Dividir inexactamente* un polinomio $P(x)$ por otro polinomio $T(x)$, distinto de cero, significa hallar dos polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales, que se verifique

$$P(x) = T(x) q(x) + r(x), \tag{1}$$

con la particularidad de que o bien el grado del polinomio $r(x)$ es estrictamente inferior al grado del polinomio $T(x)$, o bien $r(x)$ es cero.

En el caso de cumplirse la igualdad (1), se dice que el polinomio $P(x)$ se divide por el polinomio $T(x)$ con el resto $r(x)$ y el cociente $q(x)$. En particular, si $r(x) = 0$, suele decirse que el polinomio $P(x)$ se divide por el $T(x)$ con el resto cero, o bien que el polinomio $P(x)$ se divide exactamente por el polinomio $T(x)$.

Por analogía con el teorema 5 del § 5 cap. II se demuestra el teorema de divisibilidad de los polinomios dados sobre un campo de números complejos.

**Teorema 1.** *Para cualesquiera dos polinomios $P(x)$ y $T(x)$, donde $T(x) \neq 0$, existe un par único de polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales, que $P(x) = T(x) q(x) + r(x)$, con la particularidad de que o bien el grado del polinomio $r(x)$ es estrictamente inferior al grado del polinomio $T(x)$, o bien $r(x)$ es nulo.*

Existen varios procedimientos para determinar los coeficientes de los polinomios $q(x)$ y $r(x)$. El más usado entre ellos es el método de coeficientes indeterminados, examinado en el 5 del capítulo II. En el mismo párrafo hemos estudiado detalladamente la cuestión sobre la división de un polinomio por el binomio $(x - \alpha)$, donde $\alpha$ es un número real. Todos los resultados obtenidos en el § 5, cap. II son válidos también para el caso en que los coeficientes del polinomio y el número $\alpha$ son unos números complejos cualesquiera.

En particular, resultan lícitos los siguientes teoremas.

**Teorema 2 (teorema de Bezout).** *El resto que se obtiene al dividir un polinomio $P(x)$ por el binomio $(x - \alpha)$ es igual al valor del polinomio $P(x)$* para $x = \alpha$, es decir, $r = P(\alpha)$.

**Teorema 3.** *Un polinomio $P(x)$ es divisible exactamente por el binomio $(x - \alpha)$ si, y sólo si, el valor del polinomio para $x = \alpha$ es igual a cero, es decir, si $P(\alpha) = 0$.*

El número $\alpha$ lleva el nombre de *raíz del polinomio* $P(x)$, si $P(\alpha) = 0$. Enunciemos el teorema 3, valiéndonos de la definición de raíz de un polinomio.

**Teorema 4.** *Un número $\alpha$ es raíz del polinomio $P(x)$ si, y sólo si, el polinomio $P(x)$ es divisible exactamente por el binomio $(x - \alpha)$.*

Surge el interrogativo de si todo polinomio tiene raíz. La respuesta a esta pregunta la da el teorema fundamental del Algebra.

**Teorema (Teorema fundamental del algebra).** *Todo polinomio de grado $n$ $(n \geqslant 1)$ sobre un campo de números complejos tiene por lo menos una raíz.*

Este teorema se acepta aquí sin demostración. A título de corolario de este teorema se demostrará el teorema siguiente.

**Teorema 5.** *Todo polinomio $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ de grado $n$ $(n \geqslant 1)$ sobre un campo de números complejos se desarrolla en un producto de $n$ factores lineales, es decir,*

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n). \qquad (2)$$

**Demostración.** Sea $P_n$ un polinomio de grado $n$. En virtud del teorema fundamental del algebra, él tiene una raíz. Designémosla con $\alpha_1$. Entonces, de acuerdo con el teorema 4, $P_n(x) = (x - \alpha_1) \times q_1(x)$, donde $q_1(x)$ es un polinomio de grado $(n - 1)$. Para el polinomio $q_1(x)$ es aplicable también el teorema fundamental del algebra, por lo cual $q_1(x)$ tiene una raíz $\alpha_2$. Entonces, de acuerdo con el teorema 4, $q_1(x) = (x - \alpha_2)q_2(x)$, donde $q_2(x)$ es un polinomio de grado $(n - 2)$. Continuando este proceso, llegamos a que $q_{n-1}(x) = (x - \alpha_{n-1})q_n(x)$, donde $q_n(x)$ es un polinomio de primer grado, es decir, $q_n(x) = b_0(x - \alpha_n)$ $(b_0 \neq 0)$. De estos razonamientos se desprende que

$$P_n(x) = b_0(x - \alpha_1)(x - \beta_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n). \qquad (3)$$

Al abrir los paréntesis en el producto que figura en el segundo miembro de la igualdad (3), concluímos que en el polinomio $P_n(x)$ el coeficiente de $x^n$ será $b_0$, mas, al mismo tiempo, este coeficiente es igual a $a_0$, por lo cual $b_0 = a_0$.

Se ha mostrado, pues, que $P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n)$. El teorema está demostrado.

Cabe señalar que en la igualdad (3) algunos de los números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pueden ser iguales. Reuniendo juntos los factores lineales iguales, podemos escribir la igualded (2) en la forma

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}(x - \alpha_3)^{k_3}\ldots(x - \alpha_m)^{k_m}, \qquad (4)$$

donde $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_m = n$, en este caso se supone que entre los números $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ ya no hay iguales. Se puede mostrar que en la igualdad (4) el número $\alpha_i$ es la raíz de multiplicidad $k_i$ del polinomio $P_n(x)$.

Del teorema 2 se desprenden los siguientes teoremas.

**Teorema 6.** *Cualquier polinomio de grado n sobre un campo de números complejos tiene n raíces, si cada una de las raíces se cuenta tantas veces, cual es su multiplicidad.*

**Teorema 7 (fórmula de Viete).** Si $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_n$, es decir, si el coeficiente superior del polinomio es igual a la unidad ($a_0 = 1$), y los números $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ son las raíces del polinomio, se verifican las igualdades

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n),$$

$$a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_2\alpha_n + \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\alpha_n + \ldots + \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n),$$

$$a_n = (-1)^n(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n).$$

**Demostración.** De acuerdo con el teorema 5 tenemos

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)\ldots(x - \alpha_n).$$

Abriendo los paréntesis y haciendo uso de la regla de igualdad de los polinomios, obtenemos la validez de dichas igualdades, que se llaman fórmulas de Viete.

**Teorema 8.** *Si un polinomio*

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \; (a_0 \neq 0)$$

*de coeficientes reales $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tiene una raíz compleja $a + bi$, tiene sin falta también la raíz $a - bi$, es decir, un número conjugado de la raíz del polinomio de coeficientes reales es también la raíz de dicho polinomio.*

**Demostración.** Sea el número $a + bi$ una raíz del polinomio.

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \; (a_0 \neq 0).$$

Entonces $P_n(a + bi) = 0$, es decir, se verifica la igualdad

$$a_0(a + bi)^n + a_1(a + bi)^{n-1} + a_2(a + bi)^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}(a + bi) + a_n = 0.$$

Recurriendo a la fórmula del binomio de Newton, podemos escribir el primer miembro de esta igualdad en la forma $A + Bi$, de donde obtenemos, teniendo presente la regla, de acuerdo con la cual un número complejo se considera igual a cero, $A = 0$ y $B = 0$.

Veamos ahora

$$P_n(a - bi) = a_0(a - bi)^n + a_1(a - bi)^{n-1} +$$
$$+ a_2(a - bi)^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(a - bi) + a_n.$$

Anteriormente hemos demostrado que el producto, la potencia y la suma algebraica de los números, conjugados de los números complejos dados, es un número complejo conjugado del producto, de la potencia y de la suma algebraica de los números dados, respectiva-

mente, razón por la cual $P_n(a - bi) = A - Bi$ (se ha tomado en consideración, además, que los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales), pero, por cuanto $A = B = 0$, tenemos, pues, que $P_n(a - bi) = 0$, lo que significa que el número $(a - bi)$ es la raíz del polinomio $P_n(x)$. El teorema está demostrado.

**Teorema 9.** *Si un polinomio con coeficientes reales tiene una raíz compleja $a + bi$, entonces es divisible exactamente por el trinomio de segundo grado $x^2 + px + q$, donde $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$.*

**Demostración.** Si el número $x = a + bi$ es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces, de acuerdo con el teorema 8, el número $x_2 = a - bi$ es también la raíz de este polinomio. En este caso $P(x)$ es divisible exactamente tanto por el binomio $(x - x_1)$, como por el $(x - x_2)$, quiere decir, se divide por el producto de ellos

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - a - bi)(x - a + bi) = \\ = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

lo que se trataba de demostrar.

**Teorema 10.** *Todo polinomio con coeficientes reales se desarrolla en el producto de los binomios $(x - \alpha_k)$, o bien de los trinomios $x^2 + p_mx + q_m$, o bien de los binomios $(x - \alpha_k)$ y los trinomios $x^2 + p_mx + q_m$* donde $\alpha_k$, $p_m$, $q_m$ *son números reales y los trinomios $x^2 + p_mx + q_m$ no tienen raíces reales.*

El teorema 10 es un corolario de los teoremas 5 y 9.

**Ejemplo.** Se sabe que el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 4$ cuenta con una raíz $x_1 = 1 + i$. Desarróllese este polinomio en un producto de binomios y trinomios con coeficientes reales.

Por cuanto el polinomio $P(x)$ cuenta con la raíz $x = 1 + i$, entonces, de acuerdo con el teorema 9, es divisible por el trinomio $x^2 - 2x + 2$. Al dividir el polinomio $P(x)$ por este trinomio, obtendremos $x^4 - 2x^3 + 4x - 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2)$.

Desarrollando ahora el polinomio $x^2 - 2$ en factores lineales, obtenemos la respuesta:

$$P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

Sea dado un polinomio

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n \quad (a_0 \neq 0). \qquad (5)$$

Hemos mostrado más arriba que:

1. El polinomio (5) sobre un campo de números complejos puede ser escrito en la forma

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \ldots (x - \alpha_n),$$

donde los números $a_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ pertenecen al mismo campo.

2. El polinomio (5) sobre un campo de números reales puede ser escrito en la forma

$$P_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_k)(x^2 + p_1x + q_1) \ldots \\ \ldots (x^2 + p_mx + q_m), \qquad (6)$$

donde $k + 2m = n$, y los números $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, p_1, q_1, \ldots$ $\ldots, p_m, q_m$ son reales. En este caso los trinomios de segundo grado en el desarrollo (6) no se pueden representar como el producto de dos factores $(x - \alpha_i)(x - \alpha_j)$ con $\alpha_i$ y $\alpha_j$ reales.

Pasemos ahora al cálculo de las raíces de los polinomios.

Empecemos por un polinomio de primer grado

$$P_1(x) = a_0 x + a_1 \ (a_0 \neq 0).$$

Cualquiera que sea el campo de números, este polinomio tiene una sola raíz $x_1 = -\frac{a_1}{a_0}$. Veamos un polinomio de segundo grado

$$P_2(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \ (a_0 \neq 0).$$

Según se deduce del teorema 6, el polinomio $P_2(x)$ sobre un campo de números complejos tiene dos raíces. Para encontrarlas transformemos el polinomio $P_2(x)$, formando un cuadrado perfecto:

$$P_2(x) = a_0\left[x^2 + 2x\frac{a_1}{2a_0} + \left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 + \frac{a_2}{a_0}\right] = a_0\left[\left(x + \frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{D}{4a_0^2}\right],$$

donde $D = a_1^2 - 4a_0a_2$. Hallemos un número complejo $\beta$ tal que sea $\beta^2 = \frac{D}{4a_0^2}$. Entonces

$$P_2(x) = a_0\left(x + \frac{a_1}{2a_0} - \beta\right)\left(x + \frac{a_1}{2a_0} + \beta\right),$$

de donde resulta obvio que el polinomio $P_2(x)$ tiene dos raíces:

$$x_1 = -\frac{a_1}{2a_0} + \beta, \quad x_2 = -\frac{a_1}{2a_0} - \beta.$$

Observemos que si $D \neq 0$, existen dos números complejos $\beta_1$ y $\beta_2$ tales, que $\beta_1^2 = \beta_2^2 = \frac{D}{4a_0^2}$. Por cuanto $\beta_1 = -\beta_2$, entonces para encontrar las raíces del polinomio $P_2(x)$ no importa cuál de ellas se tomará por $\beta$. Si $D = 0$, entonces $x_1 = x_2 = -\frac{a_1}{2a_0}$, y el polinomio $P_2(x)$ tiene una raíz de multiplicidad dos.

Cuando los coeficientes $a_0, a_1, a_2$ son números reales, $D$ también será un número real y por eso:

a) si $D > 0$, el polinomio $P_2(x)$ tendrá dos raíces distintas y reales: $x_1 \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2a_0}$, $x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2a_0}$;

b) si $D = 0$, el polinomio $P_2(x)$ **tiene** una **sola raíz real** de multiplicidad dos; $x_1 = x_1 = -\frac{a_1}{2a_0}$;

c) si $D < 0$, el polinomio $p_2(x)$ **tiene** dos raíces **complejas**:

$$x_1 = -\frac{a_1}{2a_0} + \frac{\sqrt{|D|}}{2a_0} i, \ x_2 = -\frac{a_1}{2a_0} - \frac{\sqrt{|D|}}{2a_0} i.$$

Para cualquier polinomio de tercer o cuarto grado sobre un campo de números complejos existen los métodos de determinación de sus raíces, sin embargo, estos métodos no se exponen aquí por ser demasiado engorrosos.

En lo que se refiere a los polinomios de grado cinco y superiores, para éstos no existen métodos generales de determinación de las raíces.

En algunos casos particulares, valiéndose de los teoremas sobre raíces enteras y racionales de un polinomio (véase el § 5, cap. II), se logra representar un polinomio dado en forma del producto de polinomios de primero y segundo órdenes y, de este modo, hallar todas sus raíces.

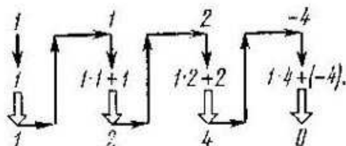
**Ejemplo.** Hállense las raíces del polinomio $P_3(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Veamos el polinomio $Q_3(x)=8P_3(x)=(2x)^3+(2x)^2+2(2x)-4$, o bien $T_3(t)=t^3+t^2+2t-4$, donde $t=2x$. Los divisores del término independiente del polinomio $T_3(t)$ son: $+1, -1, +2, -2, +4, -4$.

Hallemos los valores del polinomio $T_3(t)$ en estos puntos:

$$T_3(1)=1+1+2-4=0;$$
$$T_3(-1)=-1+1-2-4=-6\neq 0,$$
$$T_3(2)=8+4+4-4=12\neq 0,$$
$$T_3(-2)=-8+4-4-4=-12\neq 0,$$
$$T_3(4)=64+16+8-4=84\neq 0,$$
$$T_3(-4)=-64+16-8-4=-60\neq 0.$$

De acuerdo con el teorema de raíz entera (§ 5, cap. II), el polinomio $T_3(t)$ tiene una sola raíz entera 1. Por eso, se la puede representar en forma del producto del binomio $(t-1)$ y de un trinomio de segundo grado. Con el fin de hallar los coeficientes del trinomio de segundo grado apliquemos el esquema de Horner:




Así pues, $T_3(t)=(t-1)(t^2+2t+4)$.

El trinomio de segundo grado $t^2+2t+4$ tiene las raíces complejas $t_2=-1+\sqrt{3}i$ $t_3=-1-\sqrt{3}i$. Por consiguiente, el polinomio de partida $P_3(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ cuenta con una

raíz racional $x_1=\frac{1}{2}$ y dos raíces complejas $x_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $x_3=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Estudiemos en conclusión un problema en el que se buscan las raíces de un polinomio, dado sobre otros campos numéricos. Si el polinomio está dado sobre un campo de números reales, entonces, de acuerdo con el teorema 6, resulta que el número de raíces reales es inferior o igual al grado del polinomio dado. Sobre la determinación de las raíces reales puede decirse lo mismo que se dijo sobre la determinación de las raíces complejas. Si un polinomio está dado sobre un campo de números racionales, entonces, valiéndonos del teorema 9 (§ 5 cap. II), podemos encontrar todas las raíces racionales del polinomio dado. Por analogía, si el polinomio viene dado sobre un anillo de números enteros, entonces todas las raíces enteras del polinomio en consideración pueden ser halladas haciendo uso del teorema 8 del § 5 cap. II.

## § 5. Anillos, campos, grupos

En los párrafos y capítulos anteriores se han considerado, a la par con los números, unos objetos más complejos, a saber, polinomios, matrices, funciones, etc.

Sobre dichos objetos se realizaban ciertas operaciones análogas a las operaciones aritméticas con los números. Por ejemplo, se analizaban la adición de matrices, la división de un polinomio por otro polinomio, etc. Por eso resulta natural extender el concepto de campo y anillos de números a los conjuntos, compuestos por objetos o elementos más complejos. Mas, para poder hacerlo es necesario definir las operaciones sobre los elementos del conjunto dado.

Sea dado un conjunto no vacío de elementos. Diremos que en este conjunto está definida una *operación algebraica*, si se indica la ley, conforme a la cual a todo par de elementos $a$ y $b$ del conjunto citado se le asigna unívocamente cierto elemento $c$ que también pertenece a este conjunto.

Si esta operación se llama *adición*, entonces el elemento $c$ se denominará *suma* de $a$ y $b$ y se designará $c = a + b$.

Si la operación se llama *multiplicación*, el elemento $c$ se denominará *producto* de los elementos $a$ y $b$ y se designará $c = ab$.

**Anillos.** Un conjunto no vacío de elementos se llama *anillo*, si en dicho conjunto están definidas dos operaciones, adición y multiplicación, que poseen las siguientes propiedades:

1. La adición es conmutativa: $a + b = b + a$;
2. La adición es asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3. La adición y la multiplicación están ligadas por la ley izquierda y derecha de distributividad: $c(a + b) = ca + cb$, $(a + b)c = ac + bc$;

4. Existe tal elemento de este conjunto que, siendo adicionado a cualquier otro elemento del conjunto, no hace variar el último. El elemento citado se denomina *cero* del anillo y se designa por el símbolo 0; en otras palabras, existe tal elemento 0 que $a + 0 = 0 + a = a$.

5. Para todo elemento $a$ del conjunto existe el así llamado elemento *opuesto*, perteneciente al mismo conjunto, y tal, que la suma de $a$ y de dicho elemento es igual a cero del anillo; designando este elemento con $(-a)$, escribamos esta propiedad en la forma $a + (-a) = 0$.

Notemos que de la definición aducida se desprenden las siguientes propiedades del anillo:

1. Cualquier anillo tiene un cero único.

2. En cualquier anillo existe, para cada elemento $a$, el único elemento opuesto.

3. Para todo elemento $a$ del anillo se verifican las igualdades $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

Si en un anillo dado la operación de multiplicación posee, además, la propiedad de conmutatividad, es decir, si para cualesquiera dos elementos $a$ y $b$ del anillo se verifica la igualdad $ab = ba$, el anillo se denomina *conmutativo*.

Si en un anillo dado la operación de multiplicación posee, además, la propiedad de asociatividad, es decir, para cualesquiera tres elementos $a$, $b$ y $c$ del anillo se verifica la igualdad $(ab)\,c = a\,(bc)$, el anillo se denomina *asociativo*.

Los anillos de números examinados en el § 3 representan los ejemplos más simples de anillos conmutativos y asociativos.

He aquí otros *ejemplos* de anillos.

1. Un conjunto de polinomios, enteros respecto de una letra $x$, con coeficientes del campo de números dado forma el anillo conmutativo y asociativo, el cual se llama anillo de polinomios sobre el campo dado.

En efecto, según se ha indicado en el § 4, la suma y el producto de polinomios es un polinomio, es decir, en el conjunto de polinomios están definidas dos operaciones: la adición y la multiplicación. Además, en el § 4 fue indicado que ambas operaciones son conmutativas, asociativas y están ligadas por la ley de distributividad. El cero de este anillo es un polinomio, cuyos coeficientes son todos iguales a cero. El elemento opuesto para cada polinomio es un polinomio que se obtiene multiplicando el polinomio citado por el número $(-1)$.

2. El conjunto de todas las funciones, continuas en el segmento dado $[a;\,b]$, también forma un anillo conmutativo y asociativo.

En efecto, en el capítulo IX hemos dado la definición de función continua en el segmento dado y hemos indicado que la suma y el producto de dos funciones continuas es una función continua. Es fácil comprobar que las operaciones de adición y multiplicación de funciones continuas son conmutativas, asociativas y están ligadas

por la ley de distributividad. El cero de este anillo es una función igual idénticamente a cero, el elemento opuesto para la función $f(x)$ es la función $[-f(x)]$.

3. El conjunto de todas las matrices cuadradas de un orden dado $n$ forma un anillo. En efecto, en el capítulo X hemos mostrado que la suma y el producto de las matrices cuadradas de un orden dado es una matriz cuadrada del mismo orden. El cero de este anillo es una matriz cuadrada de orden $n$, cuyos elementos son todos iguales a cero. El elemento opuesto para la matriz dada es una matriz en la que todos sus elementos han sido obtenidos de los elementos de la matriz dada, multiplicándolos por el número $(-1)$.

En el cap. X se ha indicado que la operación de multiplicación de las matrices es asociativa, pero no es conmutativa. Por eso el anillo de matrices cuadradas de un orden dado $n$ será asociativo, pero no conmutativo.

**Campos.** El conjunto de elementos recibe el nombre de *campo*, si dicho conjunto consta por lo menos de dos elementos y constituye un anillo conmutativo y asociativo, y si en el mismo existe un elemento (llamado unidad del campo) tal, que el producto de cualquier elemento $a$ del campo por la unidad citada es igual a este elemento $a$, y si, además, en el conjunto existe, para todo elemento $a$ distinto de cero, un elemento (llamado elemento *inverso*) tal, que el producto de cualquier elemento $a$ por su elemento inverso es igual a la unidad del campo.

A título de ejemplo de los campos pueden servir todos los campos de números analizados en el § 3.

He aquí otros *ejemplos* de campos y anillos.

1. El conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde $a$ y $b$ son números cualesquiera de cierto anillo de números, forma un anillo conmutativo y asociativo respecto de las operaciones habituales de adición y multiplicación de matrices. En efecto, veamos la suma y el producto de las matrices del tipo (1). Está claro que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2(b+d) & a+c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2(ad+bc) & ac+2bd \end{pmatrix}.$$

Por cuanto los números que constituyen los elementos de las matrices que figuran en los segundos miembros de estas igualdades son números del anillo dado, esto quiere decir precisamente que la suma y el producto de las matrices del tipo (1) son matrices del tipo (1). Con otras palabras, se ha mostrado, que sobre el conjunto de matrices

del tipo (1) están definidas las operaciones de adición y multiplicación.

Se demuestra con la misma facilidad que son válidas también las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad de la adición y de la multiplicación de las matrices del tipo (1).

La matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\cdot 0 & 0 \end{pmatrix}$ es el cero de este anillo, y la matriz $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -2b & -a \end{pmatrix}$ es el elemento opuesto para la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$.

Hemos mostrado, pues, que el conjunto de matrices del tipo (1), donde $a$ y $b$ son números cualesquiera del anillo de números dado, forman un anillo conmutativo y asociativo.

2. El conjunto de matrices del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}, \tag{2}$$

donde $a$ y $b$ son números racionales, forman un campo.

Por cuanto el conjunto de números racionales es un anillo de números, entonces, de acuerdo con lo mostrado anteriormente, el conjunto de matrices del tipo (2) con $a$ y $b$ racionales forma un anillo conmutativo y asociativo. La unidad de este anillo es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Supongamos ahora que la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ no es el cero del anillo, es decir, admitamos que por lo menos uno de los números $a$ y $b$ es distinto de cero. Mostremos que para cualquier matriz existe una matriz del tipo (2), es decir, la matriz $\begin{pmatrix} x & x \\ 2y & y \end{pmatrix}$ tal, que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

es decir, mostremos que todo elemento de este anillo, distinto de cero, cuenta con un elemento inverso. Aplicando la regla de multiplicación de matrices, llegamos a que la validez de la igualdad (3) es equivalente a la validez de la igualdad

$$\begin{pmatrix} ax+2by & bx+ay \\ 2(ay+bx) & ax+2by \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

La igualdad (4) se verifica, si, y sólo si, el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+2by=1, \\ bx+ay=0 \end{cases} \tag{5}$$

tiene soluciones. Calculemos el determinante del sistema (5)

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - 2b^2. \qquad (6)$$

Por cuanto $a$ y $b$ son números racionales, la expresión $a^2 - 2b^2 \neq 0$. Quiere decir, para los números racionales dados $a$ y $b$ existe el único par de números $x$ e $y$ que satisface el sistema (5).

Se ha mostrado, pues, que existe una, y sólo una, matriz del tipo (2) que satisface las condiciones (3). Con otras palabras, hemos mostrado que un elemento distinto de cero cuenta con el único elemento inverso.

Esto significa que, efectivamente, el conjunto de matrices del tipo (2) con $a$ y $b$ racionales forma un campo.

**Observación.** El conjunto de matrices del tipo (2) con $a$ y $b$ reales no forma un campo, puesto que para los números reales el determinante (6) puede reducirse a cero, por ejemplo, cuando $a = b\sqrt{2}$, y, entonces, el elemento distinto de cero no tendrá elemento inverso.

3. Veamos un conjunto de elementos, donde cada elemento representa un par ordenado de números enteros $(n, m)$. Introduzcamos las siguientes definiciones.

Dos elementos $(n, m)$ y $(p, q)$ son iguales, si, y sólo si, $n = p$ y $m = q$.

Se llama suma de dos elementos $(n, m)$ y $(k, l)$ un elemento $(n + k, m + l)$, es decir, $(n, m) + (k, l) = (n + k, m + l)$.

Se llama producto de dos elementos $(n, m)$ y $(k, l)$ un elemento $(nk, ml)$, es decir, $(n, m)(k, l) = (nk, ml)$.

Mostremos que el conjunto introducido de este modo es un anillo conmutativo y asociativo. Designaremos todo elemento de este conjunto con la letra $A$, es decir, convendremos en que $A = (n, m)$. Comprobemos que las operaciones de adición y multiplicación poseen las propiedades siguientes:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $AB + BA$;
4. $(AB)\,C = A\,(BC)$;
5. $(A + B)\,C = AC + BC$.

En efecto, sea $A = (n, m)$, $B = (k, l)$, $C = (p, q)$. Entonces, haciendo uso de las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad de la adición y multiplicación de números enteros, llegamos a que

$$A + B = (n, m) + (k, l) = (n + k, m + l),$$
$$B + A = (k, l) + (n, m) = (k + n, l + m) = (n + k, m + l),$$

de donde se desprende precisamente que $A + B = B + A$, es decir, la propiedad 1 queda demostrada.

Demostremos la propiedad 5. Por definición,

$$(A+B)\,C = (n+k,\ m+l)\,(p,\ q) = (np+kp,\ mq+lq),$$
$$AC = (n,\ m)\,(p,\ q) = (np,\ mq),$$
$$BC = (k,\ l)\,(p,\ q) = (kp,\ lq),$$
$$AC+BC = (np,\ mq)+(kp,\ lq) = (np+kp,\ mq+lq),$$

es decir, $(A+B)\,C = AC+BC$. Las demás propiedades se demuestran análogamente.

El cero de este anillo lo constituye el elemento (0; 0). Para el elemento $(n, m)$ el opuesto será el elemento $(-n, -m)$. Demostremos que este anillo no es un campo. Es fácil ver que la unidad es el elemento (1; 1). Veamos, por ejemplo, el elemento (3; 2) y mostremos que para dicho elemento no existe el opuesto.

Supongamos lo contrario: tal elemento existe. Sea éste el elemento $(x, y)$. En este caso debe verificarse la igualdad $(3; 2)\,(x, y) = (1; 1)$, de donde proviene que deben ser válidas las igualdades $3x = 1$ y $2y = 1$. Mas en el conjunto de números enteros estas igualdades no se cumplen. Quiere decir, nuestra suposición no fue cierta, y esto significa que el anillo en consideración no es un campo.

4. Analicemos un conjunto que se compone de tres elementos $A_0, A_1, A_2$. Por elemento $A_0$ se entiende la clase de todos los números enteros divisibles exactamente por el número 3; por elemento $A_1$ se entiende la clase de todos los números enteros que, siendo divididos por 3, dan un resto igual a 1; por elemento $A_2$ se entiende la clase de todos los números enteros que, siendo divididos por 3, dan en el resto 2.

Definamos en el conjunto $\{A_0, A_1, A_2\}$ las operaciones de adición y multiplicación mediante las reglas siguientes:

$$A_k + A_l = \begin{cases} A_{k+l}, & \text{si } k+l<3, \\ A_{k+l-3}, & \text{si } k+l\geqslant 3; \end{cases}$$

$$A_k A_l = \begin{cases} A_{kl}, & \text{si } kl<3, \\ A_{kl-3}, & \text{si } kl\geqslant 3. \end{cases}$$

Se puede mostrar que la operación de adición de los elementos $A_k$ y $A_l$ significa la adición de cualesquiera números de las clases $A_k$ y $A_l$, perteneciendo su suma a la clase correspondiente $A_m$ $(k, l, m = 0, 1, 2)$; la operación de multiplicación de los elementos $A_k$ y $A_l$ significa la multiplicación de cualesquiera números de las clases $A_k$ y $A_l$, perteneciendo su producto a la clase correspondiente $A_m$ $(k, l, m = 0, 1, 2)$.

Es fácil comprobar también que las operaciones de adición y multiplicación de los elementos $A_k$ y $A_l$ poseen las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad.

El cero en este conjunto es la clase $A_0$. El elemento $A_{3-k}$ es opuesto del elemento $A_k$.

La unidad en dicho conjunto está representada por la clase $A_1$. Para el elemento $A_1$ el inverso será él mismo, es decir, $A_1$; para el elemento $A_2$ el inverso será él mismo, es decir, $A_2$. Quiere decir, todo elemento, distinto de cero, del conjunto en consideración, cuenta con un elemento inverso. Todas estas propiedades se comprueban con facilidad a base de las reglas que rigen la adición y multiplicación de las clases mencionadas. Quiere decir, el conjunto de que se trata es un campo.

**Observación.** Si estudiamos un conjunto compuesto por $k$ elementos ($k \geqslant 2$): $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$, donde por elemento $A_l$ se entiende la clase de todos los números enteros que siendo divididos por $k$ dan un resto igual a $l$ (donde $l = 0, 1, 2, \ldots, k-1$), entonces en cada uno de los conjuntos de tal género se pueden definir las operaciones de adición y multiplicación por analogía con el ejemplo analizado. Cualquiera que sea $k$ natural ($k \geqslant 2$), el conjunto de elementos $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ con operaciones de adición y multiplicación de elementos, definidas por el método mencionado, será un anillo, y si $k$ es un número primo, tal conjunto será un campo.

5. Veamos el conjunto de pares ordenados de números naturales $(n, m)$. Dividamos dicho conjunto en clases, reuniendo en una clase $A$ solamente los pares $(n, m)$ y $(k, l)$ que poseen la propiedad $n + l = m + k$. Por definición, los pares, pertenecientes a una misma clase $A$, se denominan iguales y se considera que cada par determina la clase $A$. En el conjunto, cuyos elementos se representan por las clases de pares iguales, definamos las operaciones de adición y multiplicación, rigiéndonos por las siguientes reglas.

Adicionar dos elementos $A$ y $B$ significa adicionar cualquier par $(n, m)$ de la clase $A$ y cualquier par $(p, q)$ de la clase $B$ conforme a la regla $(n, m) + (p, q) = (n + p, m + q)$. Cada par de este género $(n + p, m + q)$ pertenecerá a cierta clase $C$, la cual se llama suma de los elementos $A$ y $B$ y se denota $A + B$, es decir, $C = A + B$.

Multiplicar dos elementos $A$ y $B$ significa multiplicar cualquier par $(n, m)$ de la clase $A$ y cualquier par $(p, q)$ de la clase $B$ conforme a la regla $(n, m)(p, q) = (np + mq, nq + mp)$. Cada par de este género $(np + mq, nq + mp)$ pertenecerá a cierta clase $D$, la cual se llama producto de los elementos $A$ y $B$ y se designa $AB$, es decir, $D = AB$.

El conjunto introducido de las clases de pares es un anillo conmutativo y asociativo. En efecto, es fácil comprobar que las operaciones de adición y multiplicación poseen las propiedades de conmutatividad, asociatividad y destributividad.

Demostremos, por ejemplo, la propiedad de distributividad: $(A + B) M = AM + BM$. Supongamos que el par $(n, m) \in A$, el par $(k, l) \in B$ y el par $(p, q) \in M$. Si $A + B = C$, entonces la clase $C$ se define por el par $(n + k, m + l)$. Si $CM = D$, entonces la clase $D$ se define por el par $(np + kp + mq + lq,\ nq + kq + mp + lp)$. Si $AM = N_1$, entonces la clase $N_1$ se define por el par $(np + mq, nq + mp)$. Si $BM = N_2$, entonces la clase $N_2$ se define por el par

$(kp + lq, kq + lp)$. Si $N_1 + N_2 = N$, entonces la clase $N$ se define por el par $(np + mq + kp + lq, nq + mp + kq + lp)$.

Ahora es evidente, que las clases $D$ y $N$ se definen por un mismo par, es decir, $D$ y $N$ son una misma clase; de este modo se ha mostrado que $(A + B) M = AM + BM$. De modo análogo se demuestran también otras propiedades de adición y multiplicación.

El cero en dicho conjunto lo representa la clase de pares del tipo $(k, k)$.

Mostremos que toda clase $A$, definida por el par $(n, m)$, cuenta con una clase opuesta. Elijamos un número natural $p$ tal, que sea $p > n$ y $p > m$. Entonces los números $x = p - n$ e $y = p - m$ son naturales. Mostremos que la clase $B$, definida por el par $(x, y)$, es precisamente la clase opuesta de $A$. Efectivamente, $A + B = C$, donde la clase $C$ se define por el par $(p, p)$. Pero el par $(p, p)$ define la clase que representa el cero de este conjunto. Así pues, todo elemento de este conjunto cuenta con un elemento opuesto. Quiere decir, el conjunto en consideración es un anillo conmutativo y asociativo.

**Observación.** Al construir este anillo se han utilizado solamente las propiedades de los números naturales. Dicho anillo puede emplearse para la construcción de anillos de números enteros en la base de los números naturales. Esto se hace así: la clase $A$, definida por el par $(n, m)$, se identifica con:

a) un número natural, $k$, si $n > m$ y $n - m = k$;

b) el número cero, si $n = m$;

c) un número negativo $(-k)$, si $n < m$ y $m - n = k$.

El conjunto obtenido será precisamente el anillo de números enteros.

6. Veamos un conjunto de pares ordenados de números enteros $[a, b]$ tales, que $b \neq 0$. Dividamos este conjunto en clases, incluyendo en una misma clase $\alpha$ solamente aquellos pares $[a, b]$ y $[c, d]$ que poseen la propiedad $ad = bc$. Por definición, los pares, pertenecientes a una misma clase, se llaman iguales y se considera que cada uno de estos pares define la clase $\alpha$. En un conjunto, cuyos elementos están representados por las clases de pares distintos, definamos las operaciones de adición y multiplicación, rigiéndonos por las siguientes reglas.

Adicionar dos elementos $\alpha$ y $\beta$ significa adicionar cualquier par $[a, b]$ de la clase $\alpha$ y cualquier par $[c, d]$ de la clase $\beta$ de acuerdo con la regla $[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd]$. Todo par del tipo $[ad + bc, bd]$ pertenecerá a cierta clase $\gamma$, la cual se llama suma de los elementos $\alpha$ y $\beta$ y se denota $\alpha + \beta$, es decir, $\gamma = \alpha + \beta$.

Multiplicar dos elementos $\alpha$ y $\beta$ significa multiplicar cualquier par $[a, b]$ de los números pertenecientes a la clase $\alpha$ y cualquier par $[c, d]$ de la clase $\beta$ según la regla $[a, b] [c, d] = [ac, bd]$. El par $[ac, bd]$ pertenecerá a cierta clase $\delta$, la cual se llama producto de los elementos $\alpha$ y $\beta$ y se denota $\alpha\beta$, es decir, $\delta = \alpha\beta$.

El conjunto introducido de clases de pares es un campo. Efectivamente, es fácil comprobar que las operaciones de adición y multi-

plicación poseen las propiedades de conmutatividad, asociatividad y distributividad.

Demostremos, por ejemplo, la propiedad de distributividad: $(\alpha + \beta)\mu = \alpha\mu + \beta\mu$. Supongamos que el par $[a, b] \in \alpha$, el par $[c, d] \in \beta$, el par $[l, f] \in \mu$. Si $\alpha + \beta = \gamma$, entonces la clase $\gamma$ se define por el par $[ad + bc, bd]$, si $\gamma\mu = \nu$, entonces la clase $\nu$ se define por el par $[adl + bcl, bdf]$. Si $\alpha\mu = \delta_1$, entonces la clase $\delta_1$ se define por el par $[al, bf]$, si $\beta\mu = \delta_2$, entonces la clase $\delta_2$ se define par el par $[cl, df]$. Si $\delta_1 + \delta_2 = \delta$, entonces la clase $\delta$ se define por el par $[aldf + bfcl, bfdf]$. Dado que los pares $[aldf + bfcl, bfdf]$ y $(adl + bcl, bdf]$ satisfacen la condición de igualdad entre los pares, razón por la cual ambos pertenecen a una misma clase, es decir, la clase $\nu$ y la $\delta$ representan una misma clase. Hemos mostrado pues, que $(\alpha + \beta)\mu = \alpha\mu + \beta\mu$. De modo análogo se demuestran las otras propiedades de la adición y multiplicación. El cero de este conjunto es la clase $\gamma_0$, que se define por el par $[0, 1]$.

Mostremos que para cualquier clase $\alpha$, existe una clase opuesta $\beta$ tal, que $\alpha + \beta = \gamma_0$. Supongamos que el par $[a, b] \in \alpha$, entonces el par $[-a, b]$ define la clase $\beta$, la cual es precisamente la opuesta de la clase $\alpha$. En efecto, si $\alpha + \beta = \sigma$, entonces la clase $\sigma$ se define por el par $[0, b^2]$, donde $b^2 \neq 0$. Por cuanto los pares $[0, b^2]$ y $[0, 1]$ satisfacen la condición de igualdad entre pares, pertenecerán ambos a una misma clase, es decir, la clase $\sigma$ y la clase $\gamma$ representan una misma clase, lo que significa que $\alpha + \beta = \gamma_0$.

Así pues, cada elemento del conjunto en consideración cuenta con elemento opuesto. Quiere decir, el conjunto de que se trata es un anillo conmutativo y asociativo. La unidad en este anillo será la clase $E$ definida por el par $[1; 1]$.

Mostremos que cualquier clase $\alpha$, distinta de cero, cuenta con una clase inversa $\beta$, es decir, con una clase tal, que $\alpha\beta = E$. Supongamos que el par $[a, b] \in \alpha$, y $\alpha$ no es el cero del anillo, es decir, admitamos que $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Analicemos la clase $\beta$, que se define por el par $[b, a]$. Si $\alpha\beta = \mu$, entonces la clase $\mu$ se define por el par $[ab, ab]$. Puesto que los pares $[ab, ab]$ y $[1; 1]$ satisfacen la condición de igualdad entre pares, entonces ellos pertenecerán a una misma clase. Quiere decir, la clase $\mu$ coincide con la clase $E$, es decir, $\alpha\beta = E$.

Así pues, cualquier elemento, distinto de cero, del conjunto en consideración cuenta con un elemento opuesto. Esto significa que este conjunto es un campo.

**Observación.** Al construir el campo citado hemos empleado solamente las propiedades de los números enteros. Este campo puede utilizarse para construir un campo de números racionales en la base de los números enteros. Esto se hace así: una clase $\tau$ definida por el par $[a, b]$ se identifica con el número racional $\frac{a}{b}$; en este caso, si $a = bn$, donde $n$ es un número entero, la clase definida por el par $[nb, b]$ se identifica con el número entero $n$. El conjunto obtenido será precisamente el campo de números racionales.

7. Veamos un conjunto de pares ordenados de los números reales $\{a, b\}$. Consideraremos que dos elementos de este conjunto $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$ son iguales cuando, y sólo cuando, $a = c$ y $b = d$. Introduzcamos en este conjunto de pares de números reales las operaciones de adición y multiplicación: $\{a, b\} + \{c, d\} = \{a + c, b + d\}$, $\{a, b\}$ $\{c, d\} = \{ac - bd, ad + bc\}$.

Se puede mostrar que este conjunto es un campo. Si identificamos el par $\{a, b\}$ con un número complejo $a + bi$, se obtendrá el campo de números complejos, estudiado en el capítulo precedente.

**Grupos.** Examinemos ahora los conjuntos en los que está definida una sola operación. Si dicha operación posee ciertas propiedades determinadas, entonces este conjunto suele denominarse *grupo*. A saber, tiene lugar la siguiente definición.

Un conjunto no vacío de elementos recibe el nombre de *grupo*, si está definida en él una operación que se denota con * y que posee las propiedades:

a) de asociatividad $(a*b)*c = a*(b*c)$;

b) en este conjunto existe el así llamado elemento neutro, designado con el símbolo $e$, tal, que $a*e = e*a = a$, cualquiera que sea el elemento $a$ de este conjunto;

c) para cualquier elemento $a$ de dicho conjunto existe un elemento $b$ del mismo conjunto tal, que $a*b = b*a = e$.

Por cuanto las más aplicadas son dos operaciones, las de adición y multiplicación, entonces, a la par con esta definición general aduzcamos, además, dos casos particulares: definición de grupo respecto a la adición y de grupo respecto a la multiplicación.

Un conjunto de elementos se denomina *grupo respecto de la adición*, si está definida en él la operación llamada adición, que posee las siguientes propiedades:

a) asociatividad de la adición: $(a + b) + c = a + (b + c)$;

b) en este conjunto existe un elemento, llamado cero y designado con el símbolo 0, tal, que para cualquier elemento $a$ de este conunto $0 + a = a + 0 = a$;

c) para cualquier elemento $a$ de dicho conjunto existe un elemento $b$ del mismo conjunto tal, que $b + a = a + b = 0$.

El elemento $b$ se denomina opuesto del elemento $a$ y se denota con $(-a)$.

El conjunto de elementos recibe el nombre de *grupo respecto de la multiplicación*, si está definida en él la operación llamada multiplicación, que posee las siguientes propiedades:

a) asociatividad de la multiplicación: $(ab)\,c = a\,(bc)$;

b) en este conjunto existe un elemento, llamado unidad del grupo y designado con el símbolo $e$, tal, que para cualquier elemento $a$ de este conjunto $ae = ea = a$;

c) para cualquier elemento $a$ de dicho conjunto existe un elemento $c$ del mismo conjunto tal, que $ac = ca = e$.

El elemento $c$ se denomina inverso del elemento $a$ y se denota con $a^{-1}$.

Si la operación, definida en un grupo, es conmutativa, el grupo se llama *conmutativo*.

Demos a conocer los ejempjos de grupos.

1. Observemos que cada anillo es un grupo conmutativo respecto de la adición, cada campo es un grupo conmutativo respecto de la adición.

Todo anillo o todo campo no es un grupo respecto de la multiplicación, no obstante, si se considera cualquier campo, excluyendo de éste el elemento nulo, el conjunto nuevo ya será un grupo conmutativo respecto de la multiplicación.

2. Veamos un conjunto compuesto por el número cero y todos los polinomios, enteros con relación a la letra $x$ de potencia no superior a $n$, con coeficientes pertenecientes al campo de números dado.

En este conjunto está definida sólo una operación, la de adición de polinomios (la operación de multiplicación de polinomios lleva el producto fuera de los límites de este conjunto). Es fácil ver que en este conjunto la operación de adición de polinomios es conmutativa y asociativa, el elemento nulo del conjunto es un polinomio cuyos coeficientes son todos iguales a cero, y cualquier polinomio cuenta con elemento opuesto.

Quiere decir, el conjunto en consideración forma un grupo conmutativo respecto de la adición.

3. Veamos un conjunto de matrices que tienen $n$ filas y $m$ columnas, con la particularidad de que $n \neq m$. Es fácil ver que en dicho conjunto está definida una sola operación, la de adición de matrices (la operación de multiplicación no está definida para las matrices de esta índole). Vemos con facilidad que en este conjunto: a) la operación de adición es conmutativa y asociativa; b) existe el elemento nulo: una matriz cuyos elementos son todos iguales a cero; c) cualquier matriz cuenta con un elemento opuesto, que es la matriz, todos los elementos de la cual se han obtenido a partir de los elementos de la matriz dada, multiplicándolos por el número $(-1)$.

Quiere decir, el conjunto de tales matrices forma un grupo conmutativo respecto a la adición.

4. Veamos un conjunto compuesto por todos los números del tipo $2^k$, donde $k$ es un número entero cualquiera. Es obvio que la operación de multiplicación de estos números no lleva el producto fuera de los márgenes de dicho conjunto, con otras palabras, en el conjunto citado está definida la operación de multiplicación de los elementos (operación habitual de multiplicación de los números). Está claro también que esta operación es conmutativa y asociativa. El elemento unidad es el número 1, perteneciente a este conjunto, puesto que $1 = 2^0$; todo elemento $2^k$ cuenta con elemento inverso $2^{-k}$. Por lo tanto, este conjunto forma un grupo conmutativo respecto de la multiplicación.

5. Veamos el conjunto de todos los números racionales positivos. En este conjunto está definida la operación de multiplicación.

Además, dicha operación es conmutativa y asociativa. El número unidad es el elemento neutro de este conjunto; todo elemento $\frac{p}{q}$ de este conjunto cuenta con elemento inverso $\frac{q}{p}$. Quiere decir, el conjunto de todos los números racionales positivos forma un grupo conmutativo respecto a la multiplicación.

6. Veamos el conjunto de todos los números racionales positivos y aclaremos si dicho conjunto forma un grupo respecto de la operación*, donde* es la división de los números racionales. Aunque la operación* no sale de los márgenes de este conjunto y en él hay un elemento neutro (el número 1, pues todo elemento $\frac{p}{q}$ cuenta con el elemento $\frac{p}{q}$ tal, que $\frac{p}{q} * \frac{p}{q} = 1$), dicho conjunto no forma un grupo respecto de la operación introducida*, puesto que se comprueba fácilmente que la operación* no será asociativa.

7. Veamos el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $x^n = 1$, o, dicho de otra forma, estudiemos el conjunto de todas las raíces complejas de grado $n$ del número unidad. Según lo expuesto anteriormente en este mismo capítulo, el producto de cualesquiera dos raíces de grado $n$ del número unidad será también una raíz de grado $n$ del número unidad y, además, esta operación es conmutativa y asociativa. El elemento unidad es $\alpha_0 = 1$; el elemento inverso del elemento $\alpha_k$ es el elemento $\alpha_{-k}$. Quiere decir, este conjunto forma un grupo conmutativo respecto de la operación de multiplicación.

8. Veamos el conjunto de rotaciones de un triángulo equilátero alrededor de su centro, que hacen coincidir el triángulo con sí mismo. Si por multiplicación de dos rotaciones se toma su realización consecutiva, dicho conjunto formará un grupo conmutativo respecto de la operación mencionada. Se puede comprobar que en este caso se han cumplido todas las propiedades que definen un grupo conmutativo.

9. Veamos el conjunto de rotaciones de una esfera alrededor de su centro. A título de producto de rotaciones será natural tomar la realización consecutiva de dos rotaciones. Se puede mostrar que dicho conjunto forma un grupo conmutativo respecto de la operación introducida.

### *Ejercicios*

Realícense las operaciones indicadas (1 . . . 4):

1. $(2+3i)(3-2i)+(2-3i)(3+2i)$.

2. $\frac{4+i}{2-i}+\frac{5-3i}{3+i}$. 3. $\frac{1}{1+4i}+\frac{1}{4-i}$.

4. $\frac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\frac{(1-i)(3-i)}{3+i}$.

5. Constrúyanse en un plano los puntos que representan los siguientes números complejos: $3+2i$; $3$; $2+4i$; $3i$; $-1+2i$; $-4$; $-2-3i$; $-4i$.

6. Los extremos de un segmento vienen dados por ciertos números complejos $z_1$ y $z_2$. Hállense los números complejos; correspondientes: a) al centro del segmento; b) al punto que divide el segmento en la razón 1 : 3, a contar del punto $z_1$.

7. Los vértices de un triángulo se representan por ciertos números complejos $z_1$, $z_2$, $z_3$. Hállense todos los números complejos $z$ que completan dicho triángulo hasta que se obtenga un paralelogramo.

8. Calcúlense los módulos de los números complejos $i$; $1 + i$; $-i$; $-1$; $\sqrt{3} - i$; $1 + 2i$.

9. Determínense los argumentos de los números complejos $1 + i$; $\sqrt{3} - i$; $i$; $1$; $-i$; $-1$.

10. Está dado un punto $z = a + bi$. ¿Dónde se dispone el punto $z - - 2 + i$?

11. Sea $|z| = 1$. ¿Dónde se disponen los puntos que representan los números complejos $1 + 2z$?

12. Sea $|z| = 5$. ¿Dónde se disponen los puntos que representan los números complejos $1 - 2i + 3z$?

Indíquese dónde se sitúa el punto que representa un número complejo $z$, para el cual se verifica la siguiente condición (13 . . . 18):

13. $|i - z| = 1$. 14. $|z + 1 - 2i| = \sqrt{7}$

15. $\arg z = -\frac{5\pi}{6}$. 16. $|z - i| = |z + 2|$.

17. $-\pi < \arg z < \pi$. 18. $1 < |z + 2 - 3i| < 2$.

Escríbase en la fórma trigonométrica el siguiente número (19 . . . 21):

19. $z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

20. $z = \operatorname{ctg} \alpha + i$, donde $\alpha \in (\pi, 2\pi)$.

21. $z = 1 + \cos 40° + i \operatorname{sen} 40°$.

Hállense todos los $z$ que satisfacen la igualdad siguiente (22 . . . 24):

22. $(z + i)^5 + (z - i)^5 = 1$. 23. $z^5 = \bar{z}^5$.

24. $\left(\frac{z + i}{z - i}\right)^4 = 1$.

25. Hállese, entre los números complejos que satisfacen la condición $|z + 3i| \leqslant 1$, un número que tenga el argumento principal mínimo.

26. Hállese la condición necesaria y suficiente para que la suma de dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ sea un número real.

Demuéstrese que cada uno de los conjuntos que siguen abajo es un anillo (27 . . . 31):

27. Todos los números enteros multiplos del número natural dado $n$.

28. Todos los números del tipo $a + bi$, donde $a$ y $b$ son números enteros.

29. Todos los números enteros del tipo $a + b\sqrt{3}$, donde $a$ y $b$ son números enteros.

30. Las matrices de orden $n$ con elementos enteros (respecto de la adición y multiplicación de matrices).

31. Los polinomios de una incógnita con coeficientes enteros.

Demuéstrese que cada uno de los conjuntos que se dan a continuación forma un campo (32 . . . 34):

32. Los números del tipo $a + b\sqrt{3}$, donde $a$ y $b$ son números racionales.

33. Los números del tipo $a + bi$, donde $a$ y $b$ son números racionales.

34. El conjunto de dos elementos $\alpha$ y $\beta$ con las operaciones $\oplus$ y $\odot$, definidas mediante las siguientes reglas:

$$\alpha \oplus \alpha = \alpha \qquad \alpha \odot \alpha = \alpha,$$
$$\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha = \beta, \qquad \alpha \odot \beta = \beta \odot \alpha = \alpha,$$
$$\beta \oplus \beta = \beta, \qquad \beta \odot \beta = \beta.$$

35. ¿Formará un anillo o un campo el conjunto de pares $(a, b)$ de números enteros $a$ y $b$ con las operaciones $\oplus$ y $\odot$, definidas mediante las reglas siguientes:

$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$;

$(a, b) \odot (c, d) = (ac, bd)$?

Aclárese si forma un grupo cada uno de los siguientes conjuntos con la operación indicada sobre los elementos (36 . . . 44):

36. Los números pares respecto de la adición.

37. Los números enteros, múltiplos del número natural dado $n$, respecto a la adición.

38. Los números enteros impares respecto de la adición.

39. Los números enteros respecto de la sustracción.

40. Los números racionales, distintos de cero, respecto de la multiplicación.

41. Las matrices regulares de orden $n$ con elementos reales respecto de la multiplicación.

42. Las matrices de orden $n$ con elementos enteros y un determinante igual a la unidad, respecto de la multiplicación.

43. Los números reales positivos, si la operación se define del modo siguiente: $a \oplus b = a^b$.

44. Los polinomios reales de grado $n$ de la incógnita $x$, respecto de la adición.

45. ¿Formarán un grupo las rotaciones de un cuadrado en torno de su centro a 0°, 90°, 180°, 270°?

A nuestros lectores

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a Editorial Mir. 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, GSP, I-110, URSS.